La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Eleonora Cinti

Equazioni ellittiche bistabili con diffusione frazionaria

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 35–38.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_35_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Aprile 2011, 35-38

Equazioni ellittiche bistabili con diffusione frazionaria

ELEONORA CINTI

L'oggetto di questa tesi riguarda lo studio della seguente equazione nonlineare frazionaria:

$$(-\Delta)^s u = f(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n, \quad 0 < s < 1. \tag{1}$$

Le potenze frazionarie del Laplaciano sono operatori nonlocali e corrispondono a processi di Lévy stabili. Essi compaiono tipicamente in fenomeni di diffusione anomala in fisica e in biologia; inoltre rivestono particolare interesse in finanza matematica, in problemi di reazioni chimiche nei liquidi e di dinamica delle popolazioni. Recentemente le potenze frazionarie del Laplaciano sono state oggetto di interesse nel campo dell'analisi nonlineare e in un articolo del 2006 Caffarelli e Silvestre [5] ne hanno dato una nuova formulazione locale. Più precisamente, essi hanno provato che u è soluzione del problema (1) se e solo

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\lambda^{1-2s}\nabla v) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda > 0\}, \\ v(\cdot,0) = u & \text{on } \mathbb{R}^n = \partial\mathbb{R}^{n+1}_+, \\ -\lambda^{1-2s}\partial_\lambda v = f(v) & \text{on } \mathbb{R}^n = \partial\mathbb{R}^{n+1}_+. \end{cases} \tag{2}$$

In questa tesi trattiamo il problema nonlocale (1), sempre prendendo in considerazione la sua formulazione locale associata (2).

I risultati principali di questa tesi sono legati alla seguente congettura di De Giorgi per equazioni ellittiche non lineari:

Congettura di De Giorgi:
Sia $u : \mathbb{R}^n \to (-1, 1)$ una soluzione C^∞ su tutto $\mathbb{R}^n$ dell'equazione semilineare:

$$\Delta u = u^3 - u \tag{3}$$

e che soddisfa la condizione di monotonia $u_{x_n} > 0$ in $\mathbb{R}^n$.
Allora gli insiemi di livello $\{u = s\}$ sono iperpiani, almeno per $n \leq 8$, o equivalentemente esiste una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e un vettore $a \in \mathbb{R}^n$ tali che $u(x) = g(a \cdot x)$.

Se u soddisfa tale proprietà, cioè è funzione di una sola variabile Euclidea, diremo che u è unidimensionale, o ha simmetria 1-D.

Tale congettura è stata provata in dimensione $n = 2$ da Ghoussoub e Gui nel 1998, in dimensione $n = 3$ da Ambrosio e Cabré nel 2000 e per $4 \leq n \leq 8$ con un'ipotesi aggiuntiva sui limiti della soluzione per $x_n \to \pm\infty$, da Savin nel 2009. Un controesempio in dimensioni $n \geq 9$ è stato recentemente annunciato da Del Pino, Kowalczyk e Wei.

Il mio lavoro di ricerca è legato all'analogo della congettura di De Giorgi per l'equazione frazionaria (1).

In dimensione $n = 2$ e per $s = 1/2$, tale risultato sul carattere unidimensionale delle soluzioni monotone è stato provato da Cabré e Solá-Morales nel 2005 [3]. Inoltre, sempre in dimensione $n = 2$, per tutte le potenze frazionarie del Laplaciano $0 < s < 1$ è stato provato recentemente da Cabré e Sire [1, 2] e da Sire e Valdinoci [6]. Rimaneva dunque aperto il problema in dimensione $n > 2$.

Il risultato principale di questa tesi è il seguente teorema che stabilisce la simmetria unidimensionale per soluzioni monotone e soluzioni minimizzanti del problema (1) in dimensione $n = 3$.

TEOREMA 1. – *Sia $n = 3$ e $1/2 \leq s < 1$. Sia f una funzione di classe $C^{1,\beta}$ con $0 < \beta < 1$. Sia u una soluzione minimizzante o una soluzione monotona in una direzione (per esempio $u_{x_3} > 0$) per il problema* (1) *in* $\mathbb{R}^3$. *Allora u dipende da una sola variabile Euclidea.*

La prova di tale Teorema usa un metodo sviluppato da Berestycki, Caffarelli e Nirenberg, in uno dei loro lavori sulle proprietà qualitative di soluzioni di equazioni ellittiche semilineari. Gli ingredienti principali della dimostrazione sono la stabilità delle soluzioni e una stima dell'energia. Ricordiamo che soluzioni monotone e minimizzanti sono stabili; le difficoltà principali risiedono nella prova della stima dell'energia.

Il seguente Teorema stabilisce una stima ottima dell'energia per soluzioni minimizzanti e gioca un ruolo cruciale nella prova della simmetria 1-D.

TEOREMA 2. – *Sia f una funzione di classe $C^{1,\beta}$ con $0 < \beta < 1$. Sia u una soluzione minimizzante per il problema* (1). *Sia v l'estensione di u soluzione del problema* (2) *in* $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Allora, per ogni $R > 2$

$$\int_{C_R} \frac{1}{2} \lambda^{1-2s} |\nabla v|^2 dx d\lambda + \int_{B_R} G(v) dx \leq C R^{n-2s}, \quad \textit{per} \ \ 0 < s < 1/2,$$

$$\int_{C_R} \frac{1}{2} |\nabla v|^2 dx d\lambda + \int_{B_R} G(v) dx \leq C R^{n-1} \log R, \quad \textit{per} \ \ s = 1/2,$$

$$\int_{C_R} \frac{1}{2} \lambda^{1-2s} |\nabla v|^2 dx d\lambda + \int_{B_R} G(v) dx \leq C R^{n-1}, \quad \textit{per} \ \ 1/2 < s < 1,$$

dove B_R è la palla di raggio R centrata in 0 in $\mathbb{R}^n$, $C_R = B_R \times (0,R)$ e C è una costante positiva che dipende solo da n, s, $\|f\|_{C^1}$, e $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Per dedurre la simmetria unidimenisonale delle soluzioni, necessitiamo la stima dell'energia $R^2 \log R$. Questa è la ragione per la quale si riesce a dimostrare l'analogo della congettura di De Giorgi in dimensione $n = 3$ solo per le potenze $1/2 \leq s < 1$; quando s è più piccola di $1/2$, l'energia è troppo grande per poter applicare il metodo di Berestycki, Caffarelli e Nirenberg.

Nella seconda parte della tesi, si considera invece un problema legato alla possibilità di trovare un controesempio all'analogo della congettura di De Giorgi per l'equzione (1) con $s = 1/2$, in dimensioni $n \geq 8$. In particolare si studiano l'esistenza e alcune proprietà qualitative di un tipo particolare di soluzioni, chiamate *soluzioni sella*. Tali soluzioni hanno la caratteristica di essere pari rispetto agli assi coordinati e dispari rispetto al cono di Simon, che è definito come segue:

per $n = 2m$ il cono di Simon $\mathcal{C}$ è dato da

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^{2m} : x_1^2 + \ldots + x_m^2 = x_{m+1}^2 + \ldots + x_{2m}^2\}.$$

Tale cono ha curvatura media nulla in ogni punto diverso dall'origine in ogni dimensione $2m \geq 2$ ed è un minimizzante del funzionale area in dimensione $2m \geq 8$. Lo studio di tali soluzioni tipo sella per il problema locale $-\Delta u = f(u)$, si trova in un lavoro di Cabré e Terra [4].

Piu precisamente i risultati ottenuti in questa tesi riguardano il comportamento asintotico di tali soluzioni, l'esistenza di una soluzione massimale e sue proprietà di monotonia. Il risultato principale è il seguente teorema, che stabilisce l'instabilità delle soluzioni tipo sella in dimensioni $2m = 4$ e $2m = 6$. Poniamo $G(u) := \int_u^1 f$

TEOREMA 3. – *Supponiamo che f soddisfi le tre seguenti ipotesi*

$$
\begin{aligned}
&(H1) \quad f \text{ è dispari};\\
&(H2) \quad G(\pm 1) = 0 \ \text{ in } \mathbb{R},\ \ G > 0 \text{ in } (-1,1);\\
&(H3) \quad f(u)/u \text{ è decrescente in } (0,1).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Allora ogni soluzione tipo sella del problema (1) è instabile in dimensione $2m = 4$ e $2m = 6$.

Siamo interessati in particolare allo studio della stabilità delle soluzioni tipo sella in quanto, se si riuscisse a provare che esse sono soluzioni minimizzanti in dimensione $n \geq 8$, si avrebbe un controesempio alla congettura di De Giorgi per il problema frazionario. Provare che sono minimizzanti è un problema piuttosto difficile e un primo passo in questa direzione risiede nello studio della stabilità.

BIBLIOGRAFIA

[1] X. Cabré e Y. Sire, *Semilinear equations for fractional powers of the Laplacian I: Regularity, Maximum Principles and Modica-type estimates*, forthcoming.

[2] X. Cabré e Y. Sire, *Semilinear equations for fractional powers of the Laplacian II: existence, uniqueness and properties of solutions*, forthcoming.

[3] X. Cabré e J. Solà Morales, *Layer Solutions in a Halph-Space for Boundary reactions*, Comm. Pure and Appl. Math. Vol. LVIII (2005), 1678-1732.

[4] X. Cabré e J. Terra, *Saddle-shaped solutions of bistable diffusion equations in all of* $\mathbb{R}^{2m}$, arXiv:0801.3379.

[5] L. Caffarelli e L. Silvestre *An estension related to the fractional Laplacian*, Comm. Part. Diff. Eq. **32** (2007), 1245-1260.

[6] Y. Sire e Enrico Valdinoci, *Fractional Laplacian phase transitions and boundary reactions: A geometric inequality and a symmetry result*, Jour. Functional Analysis, **256**, no. 6 (2009), 1842-1864.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: ecinti@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica in Co-Tutela con sedi:
Università di Bologna – Ciclo XXII
Universitat Politecnica de Catalunya, Barcellona
Direttori della ricerca: Professor Bruno Franchi, Professor Xavier Cabré.