

---

# *La Matematica nella Società e nella Cultura*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

CHIARA GUARDASONI

## **Analisi della propagazione di onde con il metodo degli elementi al contorno**

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 4 (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 55–58.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI\\_2011\\_1\\_4\\_1\\_55\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_55_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

## **Analisi della propagazione di onde con il metodo degli elementi al contorno**

CHIARA GUARDASONI

I problemi dipendenti dal tempo che sono frequentemente modellati da equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico possono essere trattati con il metodo delle equazioni integrali di contorno (*Boundary Integral Equations*). La situazione ideale si ritrova quando si è in presenza di un'equazione alle derivate parziali omogenea con coefficienti costanti, condizioni iniziali nulle e dati assegnati solo sul contorno di un dominio indipendente dal tempo. In questa situazione la trasformazione del problema in un'equazione integrale segue il procedimento già noto per i problemi al contorno di tipo ellittico: la soluzione del problema differenziale si rappresenta in termini di potenziali a singolo e doppio strato usando la soluzione dell'operatore differenziale iperbolico e le relazioni di salto.

Esistono tuttavia specifiche difficoltà associate all'aggiunta della dimensione temporale: tralasciando le difficoltà pratiche relative ad un incremento della complessità dovuto ad una dimensione in più, possono apparire nuovi problemi di instabilità [4]. Nel caso transiente a causa dell'assenza di ellitticità, risulta complesso fare un'analisi della stabilità per cui, in letteratura, i risultati teorici disponibili sono scarsi.

Per quanto riguarda la discretizzazione delle BIE, il metodo degli elementi al contorno (*Boundary Element Method*) è stato applicato con successo in molti ambiti che spaziano dalla propagazione di onde elettromagnetiche, alla riproduzione di onde acustiche dipendenti dal tempo, alla elastodinamica lineare, alla fluidodinamica, etc. I vantaggi di questo metodo rispetto agli approcci che considerano l'intero dominio del problema sono la riduzione di dimensione, la naturale imposizione delle condizioni di radiazione all'infinito, la considerazione di un dominio esterno illimitato ad un contorno limitato, la notevole accuratezza raggiungibile e il semplice pre- e post-processing dei dati in input e output.

Nel caso di problemi iperbolici con dati iniziali e di contorno, si possono distinguere tre metodologie di applicazione del metodo BIE: metodi che utilizzano la trasformata di Laplace, metodi di tipo time-stepping e metodi che esprimono le equazioni integrali direttamente nel dominio spazio-tempo. Per una più ampia bibliografia sull'argomento si può far riferimento a [6].

L'applicazione della tecnica Galerkin sia in spazio che in tempo è stata attuata da diversi autori ma, in questa direzione, solo la formulazione debole di Bamberger e Ha Duong [3, 5] fornisce risultati autentici. Nei loro articoli si dimostra che le BIE con

potenziale ritardato sono ben definite e che le approssimazioni ottenute attraverso la tecnica BEM sono stabili grazie alla proprietà di coercività di un'appropriata forma quadratica strettamente legata al funzionale energia dell'equazione delle onde. Il loro approccio e l'analisi della stabilità passano attraverso la trasformazione del problema nel dominio delle frequenze con l'utilizzo delle corrispondenti stime per la stabilità dei metodi BIE per i problemi ellittici.

Lo scopo di questa tesi è sviluppare un'efficiente procedura per l'applicazione della tecnica BEM a problemi scalari delle onde dipendenti dal tempo, analizzando la proprietà di coercività del funzionale energia associato ed evitando che l'analisi avvenga nel dominio delle frequenze. Questo risulta essere di grande interesse sia dal punto di vista teorico che dal punto di vista numerico. Infatti, una formulazione basata su un'analisi diretta nel tempo del funzionale energia dovrebbe fornire, anche per problemi multidimensionali, un'alternativa effettiva a quella proposta in [3], in cui il passaggio a frequenze complesse conduce a costanti di stabilità che crescono esponenzialmente in tempo, come osservato in [6].

Nella prima parte della tesi ho richiamato le proprietà analitiche del problema differenziale di partenza costituito dall'equazione scalare delle onde dipendente dal tempo in un dominio  $\Omega$  con condizioni iniziali omogenee e condizioni di Dirichlet  $g_D$  e/o Neumann  $g_N$  sul contorno  $\Gamma$  di  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} u_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T) \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_t(\mathbf{x}, 0) &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}, t) &= g_D(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \Gamma^D \times [0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}, t) &= g_N(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \Gamma^N \times [0, T] \end{aligned}$$

A questo punto sono state raccolte varie possibili riformulazioni, attraverso equazioni integrali di contorno a potenziale ritardato con densità incognite dipendenti dal tempo, da poter utilizzare nella formulazione debole del problema differenziale.

La tecnica utilizzata da Bamberger e Ha Duong per trovare la formulazione debole e dimostrarne la stabilità può essere riassunta nei seguenti punti: trasformata di Fourier-Laplace nella variabile temporale del problema differenziale; stime uniformi del corrispondente problema di Helmholtz rispetto alle frequenze complesse; applicazione del teorema di Paley-Wiener e dell'uguaglianza di Parseval. In particolare quest'ultimo passaggio produce una formulazione debole nel dominio spazio-tempo strettamente legata al funzionale energia dell'equazione delle onde, la cui forma quadratica associata risulta essere coerciva rispetto ad una norma in uno spazio di Sobolev opportunamente pesato.

Il passaggio a frequenze complesse può tuttavia essere evitato sfruttando la relazione del flusso di energia

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) - \nabla \cdot (u_t \nabla u) = 0,$$

che permette di dedurre un'opportuna formulazione debole per i problemi integrali con una naturale forma quadratica.

Per opportune geometrie del contorno e grazie alla velocità finita di propagazione dell'onda, la radice quadrata dell'energia definisce una norma attraverso cui studiare le proprietà di continuità e coercività del funzionale energetico per verificare la stabilità della successiva approssimazione alla Galerkin.

Per il semplice caso di problemi in domini monodimensionali, precise stime di continuità e coercività in  $L^2$  sono state presentate per ogni tipo di condizioni al contorno imposte e si può concludere che sono stati trovati schemi incondizionatamente stabili.

Considerando l'estensione a problemi in domini bidimensionali, non ci sono difficoltà riguardanti la continuità ma, relativamente alla coercività, sono stati ottenuti solo risultati parziali, attraverso la trasformata di Fourier, con riferimento ad un contorno rappresentato da un ostacolo piatto. D'altra parte l'analisi teorica della formulazione debole energetica presentata ha la sua naturale controparte nel contesto di domini tridimensionali: infatti questi risultati teorici possono essere estesi senza modifiche ad ogni dimensione spaziale  $\geq 3$ .

Inoltre con la formulazione energetica, sono state effettuate diverse simulazioni numeriche (in domini sia monodimensionali sia bidimensionali) che sono risultate piuttosto interessanti nel confronto con le altre ritrovate in letteratura: nel procedimento energetico non si presentano mai i tipici fenomeni di instabilità.

Questi risultati numerici sono stati ottenuti utilizzando una discretizzazione alla Galerkin del problema in forma debole energetica.

Rappresentando la soluzione approssimata del problema integrale con funzioni polinomiali a tratti nel dominio spazio-tempo, la tecnica "element by element" applicata genera un sistema lineare con matrice triangolare inferiore a blocchi di tipo Toeplitz risolvibile con appropriata accuratezza senza elevati costi computazionali.

L'implementazione di questa procedura implica, nel calcolo degli elementi della matrice, un'integrazione analitica doppia in tempo e poi l'integrazione numerica degli integrali singolari nelle variabili spaziali con diverse problematiche concernenti la loro approssimazione. Quindi è stato necessario sviluppare adeguati schemi di quadratura per poter raggiungere una precisione di calcolo soddisfacente. In particolare alcune formule di quadratura illustrate in [1], già testate nei problemi ellittici, sono state accoppiate ad una tecnica di regolarizzazione dopo un'attenta suddivisione del dominio di integrazione dovuta alla presenza delle funzione di Heaviside nei nuclei degli integrali.

Risultati numerici sono presenti in tutta la tesi e, ove possibile, confrontati con quelli presenti in letteratura.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] AIMI A., DILIGENTI M. e MONEGATO G., *New Numerical Integration Schemes for Applications of Galerkin BEM to 2D Problems*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., **40** (1997), 1977-1999.
- [2] AIMI A., DILIGENTI M., GUARDASONI C., MAZZIERI I. e PANIZZI S., *An Energy Approach to Space-Time Galerkin BEM for Wave Propagation Problems*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., **80** (2009), 1196-1240.
- [3] BAMBERGER A. e HA DUONG T., *Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la diffraction d'une onde acoustique*, Math. Methods Appl. Sci., **8** (1986), 405-435
- [4] FRANGI A. e NOVATI G., *On the numerical stability of time-domain elastodynamic analyses by BEM*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **173** (1999), 403-417
- [5] HA DUONG T., *On retarded potential boundary integral equations and their discretization*, Topics in computational wave propagation. Direct and inverse problems, 2003.
- [6] COSTABEL M., *Time-dependent problems with the boundary integral equations method*, Encyclopedia of Computational Mechanics, **John Wiley and Sons**, (2004).

Dipartimento di Matematica, Università di Parma

e-mail: chiara.guardasoni@unipr.it

Scuola di Dottorato in Matematica e Statistica per le Scienze Computazionali  
con sede presso l'Università di Milano – Ciclo XXII

Relatore della tesi: Prof. Mauro Diligenti, Università di Parma