La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Cosimo Senni Guidotti Magnani

Grafici a curvatura media prescritta su domini esterni del piano iperbolico

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 83–86.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_83_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica
Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Aprile 2011, 83-86

Grafici a curvatura media prescritta su domini esterni del piano iperbolico

COSIMO SENNI GUIDOTTI MAGNANI

Questa tesi di dottorato tratta di superfici a curvatura media costante nella varietà Riemanniana tridimensionale $\boldsymbol{H}^2 \times \boldsymbol{R}$, dove $\boldsymbol{H}^2$ è il piano iperbolico reale. La teoria moderna delle superfici a curvatura media costante in varietà tridimensionali comincia nel XX secolo con la soluzione da parte di Radò e Douglas del problema di esistenza ed unicità di superfici di area minima con bordo una curva chiusa e regolare dello spazio Euclideo. La teoria ha poi avuto una forte evoluzione a partire dagli anni sessanta anche grazie a contributi della scuola italiana (ricordiamo tra gli altri il lavoro di Bombieri, De Giorgi e Giusti). Della scuola americana ricordiamo Osserman che ha dimostrato, in particolare,la non esistenza di superfici con curvatura media costante nulla (che si dicono *minime*) di $\boldsymbol{R}^3$ che siano complete e compatte. Negli anni seguenti lo studio del comportamento delle parti non compatte delle superfici minime, dette *end*, diventa di interesse centrale. Negli anni ottanta Schoen [5] dimostra che l'ipotesi di curvatura totale finita permette di classificare completamente il comportamento asintotico di una superficie minima: ogni end minima con curvatura totale finita asintoticamente è un piano o un catenoide. Un risultato di tale rilevanza porta a domandarsi quale curva possa essere il bordo di una end minima. Se con *dominio esterno* ci riferiamo alla chiusura del complementare di un compatto di $\boldsymbol{R}^2$ diffeomorfo a un disco, una maniera naturale di formalizzare questo problema consiste nel cercare soluzioni del problema di Dirichlet in cui si deve risolvere l'equazione di curvatura media costante uguale a zero sul dominio esterno e dato al bordo costituito da una curva regolare scrivibile come grafico sul bordo del dominio esterno. Formalizzando il problema in questo modo si ha a che fare con l'equazione delle superfici minime su un insieme non convesso ed è noto [2] che tale problema in generale non ha soluzione. Verso la fine degli anni novanta Kutev e Tomi [3] risolvono il problema dando condizioni necessarie e sufficienti affinché una curva sia il bordo di una end minima con curvatura totale finita.

Uno dei problemi più interessanti che sono stati proposti nell'ambito delle superfici a curvatura media costante è l'esistenza di coppie (M, h), dove M è una varietà Riemanniana tridimensionale e h è un valore per la curvatura media, che permettano di ottenere una classificazione precisa del comportamento asintotico di end a curvatura media costante analoga a quella Euclidea. In questa tesi abbiamo preso in esame il caso $\boldsymbol{H}^2 \times \boldsymbol{R}$. La teoria delle superfici a curvatura media costante (a cui ci si riferisce con *superfici cmc*) in questa varietà è ben diversa da quella Euclidea. Infatti se si considerano superfici complete, nel caso Euclideo si ha una chiara distinzione tra le superfici minime e le superfici con cmc positiva, mentre per due diversi valori non nulli

della curvatura media non esiste una sostanziale differenza. In $\boldsymbol{H}^2 \times \boldsymbol{R}$ la situazione è diversa e risulta necessario distinguere almeno tre casi in base al valore della curvatura media. Inizialmente sono state prese in esame le superfici minime: nel 2000 in un lavoro di Rosenberg e Nelli vengono dimostrate importanti analogie con il caso Euclideo (esistenza dei catenoidi, teoremi di esistenza tipo Jenkins-Serrin) e, importante differenza, la non validità del teorema di Bernstein.
Lo studio delle superfici con cmc positiva comincia qualche anno dopo con l'introduzione di un differenziale di Hopf generalizzato proposto da Abresch e Rosenberg. In particolare Sa Earp e Toubiana [4] hanno dimostrato l'esistenza di una famiglia ad un parametro $\{H^h_\alpha\}_\alpha$ di superfici con cmc $h \in (0, \frac{1}{2}]$ a simmetria rotazionale aventi caratteristiche analoghe a quelle dei catenoidi Euclidei.
In contrasto con quello che succede nel caso Euclideo è necessario trattare in maniera separata i due casi $h \in (0, \frac{1}{2}]$ e $h \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ perché cambiando il valore della curvatura media cambiano drasticamente le caratteristiche, anche topologiche, delle superfici.

In un lavoro del 2000 Rosenberg e Nelli provano che in $\boldsymbol{H}^2 \times \boldsymbol{R}$ per $h \in (0, \frac{1}{2}]$ non esistono superfici a curvatura media costante h che siano complete e compatte, quindi risulta naturale iniziare a studiare il problema di esistenza delle end partendo da questi valori della curvatura media. Elbert, Nelli e Sa Earp hanno affrontato tale problema per $h = \frac{1}{2}$ in [1] dove, congetturando che il comportamento asintotico standard delle end cmc sia quello delle $\{H^h_\alpha\}_\alpha$, vengono costruite nuove end cmc $h = \frac{1}{2}$ per mezzo del metodo di Perron.

I due risultati più importanti di questa tesi sono un teorema di non esistenza per grafici cmc su corone circolari di $\boldsymbol{H}^2$ e un teorema di esistenza per grafici cmc su domini esterni di $\boldsymbol{H}^2$. Ricordiamo che, se $S \subset \boldsymbol{H}^2 \times \boldsymbol{R}$ è il grafico di una funzione regolare u definita su un aperto di $\boldsymbol{H}^2$, la curvatura media di S si scrive come l'operatore quasi-lineare ellittico $Q(u) = \frac{1}{2}\,\mathrm{div}^{\boldsymbol{H}^2}\left(\frac{\nabla^{\boldsymbol{H}^2} u}{\sqrt{1+|\nabla^{\boldsymbol{H}^2} u|^2_{\boldsymbol{H}^2}}}\right)$, dove la divergenza e il gradiente sono indotti dalla metrica iperbolica.

Il primo risultato è ottenuto con stime a priori in una maniera simile a quella usata da Finn [2] per le superfici minime Euclidee. Dato il diverso comportamento delle H^h_α in relazione al valore di h, abbiamo due diversi risultati. Riportiamo quello relativo al caso $h = \frac{1}{2}$. Se, dati $0 < a < b$ due reali, indichiamo $\Omega(a, b) = \{z \in \boldsymbol{H}^2 : a \leq |z|_{\boldsymbol{H}^2} \leq b\}$, il teorema di non esistenza segue dal

TEOREMA 1. – *Sia* $h = \frac{1}{2}$ *e si consideri* $u \in C^2\big(\mathrm{int}(\Omega(a, b))\big) \cap C\big(\Omega(a, b)\big)$ *tale che*

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{div}^{\boldsymbol{H}^2}\left(\frac{\nabla^{\boldsymbol{H}^2} u}{\sqrt{1+|\nabla^{\boldsymbol{H}^2} u|^2_{\boldsymbol{H}^2}}}\right) = h = \frac{1}{2}$$

Allora esistono $\alpha, \beta > 0$ *e* $c, C > 0$ *tali che per ogni* $z \in \Omega(a, b)$ *abbiamo*

$$H^h_\alpha(z) + c \leq u(z) \leq H^h_\beta(z) + C$$

Inoltre α *e* β *dipendono unicamente da* a *e* b, *mentre* c *e* C *dipendono da* a, b *e dai valori assunti da* u *lungo* $\{|z|_{\boldsymbol{H}^2} = b\}$.

Esplicitiamo che per ottenere un teorema di non esistenza è sufficiente prescrivere dati al bordo che non possono essere assunti, come esempio si può pensare a prescrivere un valore costante lungo $\{|z|_{\boldsymbol{H}^2} = a\}$ più piccolo di $H^h_\alpha(a) + c$.

Per dimostrare il teorema di esistenza, diversamente da quanto fatto da Elbert, Nelli e Sa Earp in [1], abbiamo usato tecniche tipiche della teoria di Schauder in modo da trovare soluzioni lisce. Abbiamo diviso il problema in due parti, prima di tutto abbiamo dato un risultato di esistenza su particolari insiemi compatti non convessi, e poi abbiamo descritto il dominio esterno con una successione di insiemi compatti. Prima di enunciare i due risultati di esistenza, introduciamo due concetti legati alle curve di Jordan che compaiono nelle ipotesi dei teoremi. Se $\gamma \subset \boldsymbol{H}^2$ è una curva di Jordan liscia, diciamo che è *convessa per orosfere* se la curvatura geodetica di γ è non inferiore a 1. Da un punto di vista geometrico questo concetto esprime la possibilità di avere, per ogni punto p di γ, un orociclo di $\boldsymbol{H}^2$ tangente a γ in p con γ contenuta nel disco Euclideo dato dalla chiusura dell'orociclo considerato. Il secondo concetto, la $r-$ammissibilità, è stato introdotto nella tesi e formalizza la possibilità di utilizzare un particolare elemento della famiglia $\{H^h_\alpha\}_\alpha$ come sotto-barriera per grafici su domini esterni di cui γ è il bordo. Per maggiori dettagli su questo concetto rimandiamo al capitolo 3 della tesi. Prima di enunciare i teoremi di esistenza ricordiamo che con *annulus* si intende un sottinsieme di $\boldsymbol{R}^2$ diffeomorfo a una corona circolare.

TEOREMA 2. – *Sia* $h \in (0, \frac{1}{2})$ *e* $r > 0$ *e sia* $\Omega \subset \boldsymbol{H}^2$ *un annulus compatto con bordi* γ_1 *e* γ_2.

Si assuma che γ_1 *sia* $r-$*ammissibile, convessa per orosfere e che* γ_1 *possa essere deformata in maniera liscia ad una circonferenza, con* $r-$*ammissibilità e convessità per orosfere preservate lungo la deformazione. Se* γ_2 *è una circonferenza bordo di un disco che contiene* γ_1, *allora esistono* $0 < \delta < 1$ *e* $\alpha(r) > 0$ *per cui il problema di Dirichlet:*

$$\begin{cases} \operatorname{div}^{\boldsymbol{H}^2}\left(\dfrac{\nabla^{\boldsymbol{H}^2} u}{\sqrt{1+|\nabla^{\boldsymbol{H}^2} u|^2_{\boldsymbol{H}^2}}}\right) = 2h & in\ \Omega \\ u = 0 & in\ \gamma_1 \\ u = H^h_{\alpha(r)} & in\ \gamma_2 \end{cases}$$

ha soluzione in $C^{2,\delta}(\Omega)$.

Esempi di curve che soddisfano le ipotesi del teorema sono delle deformazioni di piccole circonferenze con norme C^0 e C^2 piccole. Per dimostrare questo risultato abbiamo stabilito stime a priori di tipo C^0 e C^1 di u che abbiamo poi usato in una variante del metodo di continuità per ottenere l'esistenza. Le stime a priori sono state date in gran parte per mezzo di opportune superfici H^h_α usate come barriere. Alcuni degli argomenti cruciali usati da Elbert, Nelli e Sa Earp in [1] non possono essere applicati nel nostro caso perché, diversamente da quello che accade per $h = \frac{1}{2}$, per $h \in (0, \frac{1}{2})$ tutte le superfici $\{H^h_\alpha\}_\alpha$ crescono allo stesso modo. Perciò si è reso necessario uno studio approfondito del comportamento asintotico delle $\{H^h_\alpha\}_\alpha$ che ci permette di affermare che, per certi valori del parametro α e per raggi ρ abbastanza grandi, la funzione $H^h_\alpha(\rho)$ è una funzione strettamente decrescente di α. Questo è il contenuto di uno dei risultati più tecnici della tesi, ed è il seguente teorema.

TEOREMA 3. – *Sia $\rho > 0$ grande. Allora esiste $\overline{\beta} > 2h$ tale che per ogni $0 < \widetilde{\alpha} \leq \overline{\beta}$ vale*

$$\frac{H^h_\alpha}{\partial \alpha}(\rho)_{|\alpha = \tilde{\alpha}} < 0.$$

Possiamo ora enunciare il teorema di esistenza su domini esterni.

TEOREMA 4. – *Sia $h \in (0, \frac{1}{2})$ e sia Ω il complementare di un dominio compatto di $\boldsymbol{H}^2$ con bordo una curva di Jordan liscia γ_1. Si assuma che γ_1 soddisfi le stesse ipotesi del teorema 2. Allora esiste $0 < \delta < 1$ per cui il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{div}^{\boldsymbol{H}^2}\left(\dfrac{\nabla^{\boldsymbol{H}^2} u}{\sqrt{1 + |\nabla^{\boldsymbol{H}^2} u|^2_{\boldsymbol{H}^2}}}\right) & = & h & \text{in } \Omega \\ u & = & 0 & \text{in } \gamma_1 \\ \lim\limits_{|z|_{\boldsymbol{H}^2} \to +\infty} u(z) & = & +\infty & \end{cases}$$

ha soluzione in $C^{2,\delta}(\Omega)$.

Per dimostrare questo teorema abbiamo costruito una successione di problemi di Dirichlet su annuli compatti divergenti al dominio esterno e abbiamo verificato che la successione delle soluzioni converge in $C^{2,\delta}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ELBERT M. F., NELLI B. e SA EARP R. *Existence of vertical end of mean curvature 1/2 in $\boldsymbol{H}^2 \times \boldsymbol{R}$* accettato per la pubblicazione da Trans. Amer. Math. Soc.

[2] R. FINN, *Remarks relevant to minimal surfaces, and to surfaces of prescribed mean curvature* J. d'Anal. Math., **14** (1965), 139-160.

[3] N. KUTEV e F. TOMI, *Existence and nonexistence for the exterior dirichlet problem for the minimal surface equation in the plane* Differential Integral Equations, **11** (1998), 917-928.

[4] R. SA EARP e E. TOUBIANA, *Screw motion surfaces in $\boldsymbol{H}^2 \times \boldsymbol{R}$ and $\boldsymbol{S}^2 \times \boldsymbol{R}$* Illinois Jour. of Math., **49** (2005), 1323-1362.

[5] R. SCHOEN, *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces* J. Differential Geom., **18** (1983), 791-809.

Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna
e-mail: senni@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica con sede presso l'Università di Bologna – Ciclo XXII
Direttore di ricerca: Prof.ssa Giovanna Citti, Università di Bologna