
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ITALO TAMANINI

Matematica e bolle di sapone

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 4 (2011), n.2, p. 137–169.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_2_137_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

Matematica e bolle di sapone

ITALO TAMANINI

*... il y a un charme particulier à contempler ces légères figures
presque réduites à des surfaces mathématiques...*

J. Plateau [20] Tome I, Chapitre III, § 115.

1. – Introduzione

Non è difficile “costruirsi in casa” un telaietto a forma di cubo, vale a dire un modellino del reticolo dei suoi dodici spigoli: si possono usare delle cannuce tenute insieme da qualche tipo di incastro o legatura, o meglio ancora del filo metallico opportunamente piegato e sagomato. Anche se il risultato non sarà molto preciso, è comunque sufficiente per consentirci di osservare un fenomeno affascinante: basta immergerlo in una soluzione di acqua e sapone (acqua con l’aggiunta di detersivo liquido concentrato, indicativamente nella proporzione di una parte di detersivo su dieci di acqua), estrarlo con un minimo di cautela... *et voilà!*, ecco formarsi una struttura leggerissima e trasparente, sospesa al telaio in un equilibrio apparentemente fragile, ma in realtà molto più stabile di quanto si potrebbe sospettare!

La composizione è molto elaborata e armoniosa: superfici piane e curve s’incontrano fra loro, generando intersezioni e diramazioni multiple, in un gioco di trasparenze e di colori. Si intuiscono simmetrie che suggeriscono una particolare geometria, non facile tuttavia da decifrare completamente. È necessaria un’attenta osservazione e una certa esperienza per identificare le singole componenti e le relazioni che intercorrono fra di esse. A lievi scuotimenti la struttura risponde con un movimento d’insieme pigro e ondeggiante, quasi frenata dalla sua stessa geometria, per ritornare pochi istanti dopo nella configurazione iniziale. Non passa molto tempo e una lamina si rompe, innescando a catena la distruzione dell’intero sistema che precipita in qualche gocciolina. L’esperimento si può tuttavia ripetere e ogni volta

(*quasi* ogni volta) si ottiene la medesima configurazione o tutt'al più una ad essa equivalente.

Qual è allora la geometria delle lamine di sapone, e perché sono così interessanti dal punto di vista scientifico? Come si è arrivati a comprendere i principi che governano questi fenomeni, e quale ruolo ha la matematica nella loro descrizione e interpretazione?

I fenomeni di tensione superficiale – dei quali capillarità e bolle di sapone sono manifestazioni appariscenti e ben conosciute – costituiscono un capitolo importante della scienza e la *Teoria delle superfici minime*, che consente di inquadrarli nel formalismo matematico, ha avuto un notevole sviluppo nei secoli scorsi ed ha raggiunto risultati di alto livello. Non si può non ricordare che una delle prime Medaglie Fields – uno dei riconoscimenti più prestigiosi nel campo della matematica – fu assegnata, nel 1936, al matematico statunitense Jesse Douglas proprio per i suoi contributi a tale teoria; come non si possono non menzionare i notevoli progressi degli ultimi cinquant'anni ad opera di numerosi ricercatori, in particolare della scuola italiana di Calcolo delle Variazioni che fa capo a Ennio De Giorgi.

Da una decina d'anni, il Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica dell'Università di Trento propone diverse iniziative sul tema, che intendono raccontare gli aspetti salienti della teoria: una mostra, laboratori per le scuole, conferenze, corsi di aggiornamento, e altro. La mostra, dal titolo "*Matematica trasparente: superfici minime e bolle di sapone*" (si veda ad esempio il sito web <http://bolle.science.unitn.it>), è stata allestita in vari istituti scolastici e universitari, in occasione di convegni di matematica e di rilevanti manifestazioni scientifiche nazionali. La modalità scelta è quella di un percorso sperimentale di osservazione e di scoperta, in gran parte interattivo, guidato da animatori la cui opera è fondamentale per la costruzione complessiva della rappresentazione. L'idea di base è che le bolle e le lamine di sapone che si creano "spontaneamente" nei vari telai, esteticamente belle e affascinanti come sono, possono diventare la chiave per coinvolgere i visitatori in un racconto di scienza e di matematica che sia insieme ricco, articolato e non superficiale. L'obiettivo è quello di comunicare la matematica in maniera divertente e informale, appoggiandosi a materiali e strutture concreti e visibili (quasi... toccabili, se non fosse per la fragilità

delle lamine stesse), e cercando nel contempo di mostrarne le potenzialità come linguaggio e strumento per la costruzione di modelli teorici descrittivi e interpretativi dei fenomeni naturali.

Il racconto si sviluppa intorno a quattro nuclei principali – *bolle e problema isoperimetrico, lamine e superfici minime, percorsi minimi e prima legge di Plateau, sistemi laminari e seconda legge di Plateau* – che vengono illustrati nei quattro tavoli interattivi della mostra. In questo articolo cercheremo di seguire il percorso espositivo, soffermandoci un po' più sulla matematica coinvolta. All'inizio del percorso si compiono esperimenti con le bolle di sapone e si introduce un problema di ottimizzazione in ambito geometrico, a cui dedichiamo la prossima sezione.

2. – Problema isoperimetrico e bolle di sapone

Il problema isoperimetrico ha una storia millenaria e, almeno nei suoi aspetti più elementari, può essere un interessante argomento di didattica da sviluppare nella scuola.

Due sono le grandezze che, fin dai primi anni dell'insegnamento, vengono associate ad una figura geometrica piana: l'area ed il perimetro. Ma raramente si riflette su come variano queste grandezze al variare della figura: sono completamente indipendenti l'una dall'altra? Tutti saprebbero indicare un quadrato di area $100 \text{ (cm}^2\text{)}$, tanto per fissare le idee) e perimetro 40 (cm) , come pure un rettangolo di area 36 e perimetro 26 (o anche 25); ma un rettangolo di area 36 e perimetro 23 ... semplicemente non esiste! Infatti, è immediato verificare che per ogni rettangolo vale

$$(1) \quad 16A \leq P^2 \quad \text{o equivalentemente} \quad 4\sqrt{A} \leq P$$

dove A e P indicano rispettivamente area e perimetro del rettangolo in questione. Non solo: l'uguaglianza in (1) vale per i quadrati e solo per essi – se l è il lato del quadrato, area e perimetro valgono, rispettivamente, l^2 e $4l$. La (1) segue ad esempio dalla ben nota “disuguaglianza fra media aritmetica e media geometrica”

$$(2) \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \forall a, b \geq 0$$

che a sua volta è equivalente a $(a - b)^2 \geq 0$: basta semplicemente interpretare a e b come base e altezza di un generico rettangolo. Va detto però che le dimostrazioni elementari e diverse della (1) si contano a decine! Dalla (1) segue inoltre che fra tutti i rettangoli di area assegnata, quello di perimetro minimo è il quadrato e – *dualmente* – che fra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, quello di area massima è ancora il quadrato. In questo preciso senso, il quadrato è il “rettangolo migliore”:⁽¹⁾ un castello o un accampamento recintato di forma rettangolare o quadrangolare racchiude uno spazio maggiore ed ha una minore esposizione verso l'esterno (ed è quindi meglio difendibile) proprio quando è un quadrato! Questo fatto doveva essere noto ai Romani, ai quali si deve l'invenzione di una formazione militare molto efficace proprio di questo tipo.

Anche fra i triangoli il migliore, nel medesimo senso, è quello regolare – il triangolo equilatero. La dimostrazione può essere condotta sulla stessa linea di argomenti, combinando la nota formula di Erone per l'area di un triangolo di lati a, b, c

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dove $p = P/2$ è il semiperimetro, con l'estensione a tre elementi della disuguaglianza (2). Ricordiamo a questo proposito che per ogni n intero positivo vale

$$(3) \quad (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$$

con segno di uguale se e solo se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Basta allora sostituire $a_1 = p - a, a_2 = p - b, a_3 = p - c$ nella (3) scritta per $n = 3$ per ricavare agevolmente

$$(4) \quad 12\sqrt{3}A \leq P^2$$

che vale dunque per ogni triangolo di area A e perimetro P , con uguaglianza se e solo se $a = b = c$.

⁽¹⁾ Non è difficile vedere che in realtà il quadrato è il “quadrilatero migliore”.

Dalla (4), esattamente come dalla (1) nel caso dei rettangoli, segue che fra tutti i triangoli di area assegnata, quello di perimetro minimo è il triangolo equilatero (di area $A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$ e perimetro $3l$, se l è il suo lato) e, dualmente, che fra tutti i triangoli di perimetro assegnato, quello di area massima è ancora il triangolo equilatero.

A questo punto è facile intuire che il *miglior poligono* di n lati – quello che a parità di perimetro ha area massima o equivalentemente che a parità di area ha perimetro minimo – è il poligono regolare, qualunque sia $n \geq 3$. Ancora una volta, questo risultato si può dedurre dalla *disuguaglianza isoperimetrica* ⁽²⁾

$$(5) \quad 4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)A \leq P^2$$

che lega il perimetro e l'area di ogni poligono di n lati, comprendendo in particolare la (1) e la (4) precedenti, per $n = 4$ e $n = 3$ rispettivamente.

È utile osservare la corretta dimensionalità della (5) (area espressa ad esempio in cm^2 e perimetro in cm) e la sua invarianza di scala, rispetto a dilatazioni o contrazioni della figura. Si nota inoltre che la *costante isoperimetrica* che vi compare

$$c_n = 4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

decrece al crescere di n : ciò significa che, a parità di perimetro, il poligono regolare di n lati ha area maggiore di quello di m lati, quando $n > m$. Si vede inoltre che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 4\pi$$

il che suggerisce (come si può effettivamente dimostrare) che per ogni figura piana F , di area A e perimetro P , vale

$$(6) \quad 4\pi A \leq P^2$$

con uguaglianza se e solo se F è un cerchio (come si può immaginare,

⁽²⁾ In realtà è equivalente ad essa: questo perché l'area del poligono regolare di n lati e perimetro P vale esattamente $P^2 / (4n \tan(\pi/n))$.

per essere di portata così generale una tale affermazione ha bisogno di qualche precisazione tecnica, su cui sorvoliamo).

Il cerchio è, in conclusione, la figura piana che a parità di perimetro ha area massima o, equivalentemente, che a parità di area ha perimetro minimo. Nello spazio, al posto della (6) si ha

$$(7) \quad 36\pi V^2 \leq S^3$$

dove V e S indicano rispettivamente il volume e l'area superficiale di un arbitrario solido F , e il ruolo del cerchio nel piano è ora giocato dalla sfera (piena).

Questo fatto, spesso chiamato *proprietà isoperimetrica* del cerchio e della sfera, è verosimilmente noto fin dall'antichità, almeno nel caso delle figure piane, come si evince dall'opera di Zenodoro (citata da Pappo e Teone) e come testimonia la forma circolare o rotonda delle mura di cinta di molte antiche città e di tanti altri manufatti dell'uomo. Dimostrazioni rigorose di tali risultati, in ipotesi via via più generali, furono ottenute in tempi moderni da matematici come Adolf Hurwitz, Hermann Schwarz e altri.

Il teorema isoperimetrico vale in realtà in ogni dimensione $n \geq 2$: nello spazio euclideo a n dimensioni la disuguaglianza isoperimetrica assume la forma

$$(8) \quad n^n \omega_n V_n^{n-1} \leq P_{n-1}^n$$

dove V_n indica il volume n -dimensionale (finito) della regione F di \mathbb{R}^n (più precisamente, la misura di Lebesgue di F) e P_{n-1} il suo *perimetro* (ossia, in un senso opportuno, la misura $(n-1)$ -dimensionale della frontiera ∂F di F), e dove ω_n è il volume della palla unitaria di \mathbb{R}^n . La (6) e la (7) precedenti sono quindi ⁽³⁾ casi particolari della (8), per $n = 2$ e $n = 3$. Inoltre, l'uguaglianza in (8) si ha se e solo se F è (equivalente a) una palla n -dimensionale. Ne segue come prima che le palle n -di-

⁽³⁾ Si ha infatti $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = 4\pi/3$. In generale, esprimendo la misura della palla unitaria di \mathbb{R}^{n+1} come integrale delle misure n -dimensionali delle sue "sezioni orizzontali", si trova la formula ricorsiva $\omega_{n+1} = 2\omega_n I_{n+1}$, dove $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, con $I_1 = 1$, $I_2 = \pi/4$. Questo permette di ricavare agevolmente il valore di ω_n .

mensionali sono le soluzioni del problema isoperimetrico in \mathbb{R}^n , come pure del suo duale. Reciprocamente, è possibile dedurre la (8) a partire da quest'ultimo fatto geometrico. La (8) è strettamente collegata a molte altre fondamentali disuguaglianze (tipo le cosiddette “disuguaglianze di Sobolev”) che, in opportune ipotesi, legano l'integrale di una funzione a quello delle sue derivate. ⁽⁴⁾

La forma sferica di una bolla di sapone si può spiegare proprio in questi termini: l'aria soffiata all'interno tende ad espanderla mentre – come sarà meglio chiarito nella prossima sezione – le forze di tensione superficiale tendono a contrarla, in modo da rimpicciolirne la superficie. Nell'equilibrio, la bolla assume la forma che, a parità di volume, è delimitata da una superficie di area minima: la sfera, appunto.

3. – Tensione superficiale e lamine di sapone

C'è una chiara evidenza sperimentale che gli strati superficiali di un liquido si comportino diversamente dal *bulk* – l'interno del liquido stesso. Per darne conto, in fisica si introducono delle forze tangenziali, agenti sulla superficie del liquido, che in qualche modo la “stirano”, opponendosi ad ogni variazione che ne aumenti l'area. L'acqua ha una *tensione superficiale* (forza per elemento di lunghezza o, equivalentemente, energia superficiale per elemento d'area) abbastanza elevata, che si può abbassare notevolmente sciogliendovi opportuni tensioattivi. Le molecole di questi ultimi possono essere molto complesse, ma schematicamente hanno una “testa” idrofila e una “coda” idrofoba: mescolate nel liquido, esse tendono a risalire in superficie, sistemandosi con la coda rivolta verso l'esterno. Inserendosi fra le molecole d'acqua e separandole ne abbassano la tensione superficiale.

Vale la pena di compiere un esperimento, tanto semplice quanto istruttivo: leghiamo ad anello una sottile cordicella di 15-20 cm di lunghezza e deponiamola lentamente sul pelo dell'acqua in modo che, galleggiando, racchiuda una porzione irregolare della superficie del

⁽⁴⁾ Nel § 7 si possono trovare ulteriori commenti e indicazioni bibliografiche.

liquido. Con una punta di matita, leggermente bagnata di detersivo liquido, tocchiamo poi la superficie dell'acqua all'interno del filo: in una frazione di secondo la cordicella prende la forma di un anello circolare! Questo fenomeno si spiega con l'espandersi del tensioattivo all'interno della regione contornata dal filo, che vede così ridursi la tensione superficiale, creando un differenziale con la superficie del liquido all'esterno. La forza risultante agisce uniformemente su ogni trattino del filo, lungo la normale esterna, in modo da fargli assumere la forma di una circonferenza.

Un esperimento simile si può fare collocando un filo chiuso ad anello in una lamina di sapone, lamina che possiamo schematicamente descrivere come uno strato sottilissimo di acqua – dello spessore tipico di qualche decina o centinaio di nanometri – confinato fra due strati di molecole di tensioattivo. Basta prendere un contorno piano e chiuso (come ad esempio un anello o una “cornice quadrata” di sottile filo metallico), immergerlo in acqua insaponata ed estrarlo, per ottenere la lamina che ci serve. Il filo, legato a cappio, galleggia nella lamina in forma irregolare: rompendo la parte di lamina interna, la tensione all'esterno – non più equilibrata dalle forze interne – tende il filo, che assume istantaneamente la forma di una circonferenza! (Figura 1). Il foro circolare che si crea ha l'area massima

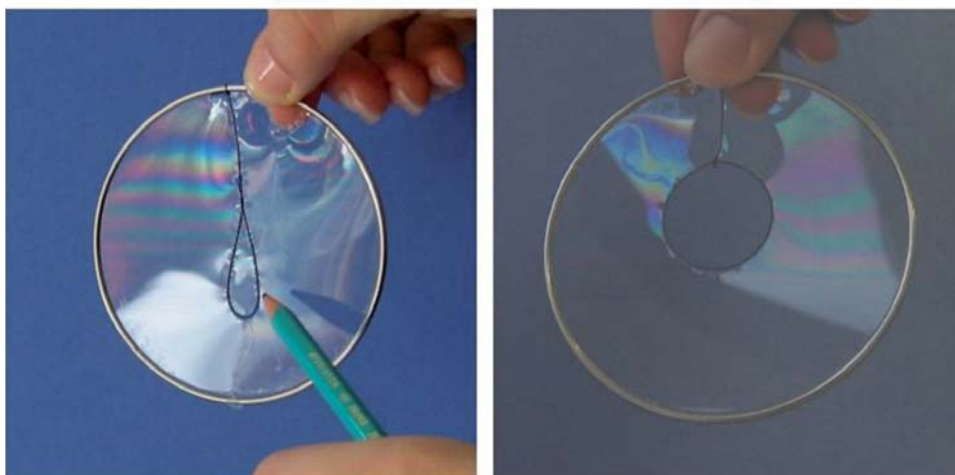


Fig. 1. – Foro nella lamina.

consentita dalla lunghezza del filo (*proprietà isoperimetrica del cerchio*), e di conseguenza l'area della lamina rimasta all'esterno è la minima possibile.

Questo e tanti altri esperimenti suggeriscono un'ipotesi generale che faremo nostra: *le lamine di sapone realizzano superfici di area minima con bordo assegnato*. Una tale proprietà, che riassume il contenuto matematico fondamentale dell'intera questione, viene normalmente dedotta da considerazioni energetiche, in ipotesi di uniformità delle tensioni e trascurando ogni altra sollecitazione (in particolare, la forza di gravità – un'approssimazione generalmente accettata, in quanto la massa di una pellicola di sapone è estremamente ridotta).

Gli *exhibit*, i pannelli illustrativi e le attività svolte all'inizio della mostra sono finalizzati a costruire le basi di un impianto teorico adeguato ad inquadrare i fenomeni osservati. Il processo di astrazione – tipico della matematica – viene suggerito dalla descrizione delle lamine di sapone come “rappresentazioni concrete” del concetto di *superficie*, dei telaietti di contorno come *curve semplici chiuse di bordo*, delle bolle come *sfere* e così via. E ogni lamina, sospesa ad un telaio oppure richiusa a forma di bolla, si può interpretare come una configurazione stabile di un particolare sistema fisico: ai nostri fini (matematici!), essa rappresenta un minimo assoluto o relativo del *funzionale dell'area*, definito su uno spazio di configurazioni (superfici o più in generale sistemi di superfici) soddisfacenti opportuni vincoli (bordo assegnato, vincoli di volume, eccetera). Stabilito in tal modo un vocabolario e un insieme di regole condivise, il percorso prosegue con nuove attività.

4. – Superfici di curvatura media costante

Nuovi esperimenti ci consentono di ammirare alcuni fra gli esempi più notevoli di superfici di area minima, realizzate con l'aiuto di lamine di sapone distese in contorni metallici di varia foggia.

Come abbiamo detto, nella nostra idealizzazione i telai di contorno delle lamine – costruiti ad esempio ripiegando un sottile filo metallico e saldandone le estremità – vengono assimilati a curve semplici chiuse.

Prendiamo dunque un contorno piano – il più semplice essendo evidentemente un anello circolare, oppure una cornice quadrata, eventualmente deformata da sporgenze e rientranze ma pur sempre piana. Non si stupirà nessuno se, immergendolo nella soluzione saponosa, si vedrà formarsi una lamina piana! Ogni “gobba” o “infossamento” provoca infatti un aumento dell’area: la superficie di area minima delimitata da un bordo piano è evidentemente piana. Ma se il contorno piano non è, nemmeno la lamina che vi si forma può essere piana! Sarà invece incurvata, ma in un modo molto speciale e in qualche misura riconoscibile: è un fatto notevole che le superfici di area minima – anche solo “di minimo relativo”, quelle cioè che hanno area minore (o tutt’al più uguale) di ogni altra superficie “vicina” – hanno *curvatura media nulla* in ogni punto.

Vediamo di chiarire questo importante risultato. In una situazione semplificata, una lamina di sapone (o perlomeno una sua piccola porzione) può essere descritta da un *grafico di area minima*, precisamente dal grafico S_u di una funzione regolare u , definita sulla chiusura \bar{A} di un dominio piano A (un cerchio, o più in generale un aperto limitato e convesso di \mathbb{R}^2) e verificante

$$(9) \quad \int_A \sqrt{1 + |Du(x, y)|^2} \, dx dy \leq \int_A \sqrt{1 + |Dv(x, y)|^2} \, dx dy$$

per ogni v regolare, coincidente con u sulla frontiera ∂A di A .

I grafici $S_v = \{(x, y, v(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A\}$ di tali funzioni rappresentano un’ampia classe di superfici lisce aventi come bordo la curva semplice e chiusa $C = \{(x, y, u(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial A\}$ – in altre parole, possibili configurazioni di lamine che “si attaccano al contorno C ” – e l’integrale a destra della (9) ne misura l’area. Ecco come viene formalizzata – nell’ambito dei grafici regolari – la proprietà di area minima delle lamine di sapone!

I matematici studiano anche formulazioni n -dimensionali di questo problema di minimo (chiamato usualmente “problema di Plateau cartesiano”, in onore dello scienziato belga che nell’Ottocento raccolse un gran numero di osservazioni sperimentali sui liquidi laminari, stabilendone le basi teoriche), che potremmo enunciare nel

seguinte modo:

$$(10) \quad \begin{cases} \int_A \sqrt{1 + |Dv(x)|^2} \, dx \rightarrow \min \\ v \in C^0(\bar{A}) \cap C^2(A), \, v = \varphi \text{ su } \partial A \end{cases}$$

dove adesso A è un aperto limitato di \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) e φ un “dato al bordo” definito e continuo sulla frontiera ∂A di A .

Con i metodi del Calcolo delle Variazioni si può dimostrare che, in opportune ipotesi sui dati, ⁽⁵⁾ esiste un’unica soluzione u del problema (10).

La “variazione prima” del funzionale dell’area $v \rightarrow \int_A \sqrt{1 + |Dv(x)|^2} \, dx$ calcolata in $v = u$ porta in tal caso all’equazione differenziale

$$(11) \quad \operatorname{div} \frac{Du(x)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} = 0 \quad \forall x \in A$$

il cui significato geometrico è proprio che la curvatura media del grafico $S_u = \{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A\}$ è nulla in ogni punto. Questo è certamente vero quando S_u è piana (ossia quando u è lineare, poiché allora Du è costante). Come abbiamo detto, tutto ciò vale in ogni dimensione $n \geq 2$. Nel nostro caso ($n = 2$) la (11) si può riscrivere nel seguente modo:

$$(12) \quad \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e deve valere in ogni punto $(x, y) \in A$.

Ecco perché le superfici di area minima non piane (e quindi le lamine di sapone che ne realizzano la forma) hanno un tipico “andamento a sella”: in ogni punto, le sezioni normali in direzioni perpendicolari devono avere curvature “uguali e di segno opposto”, perché solo così la loro somma (e quindi la semisomma, ossia la curvatura media) è sempre nulla.

⁽⁵⁾ Fra cui la convessità del dominio A , o almeno una sua “versione indebolita”.

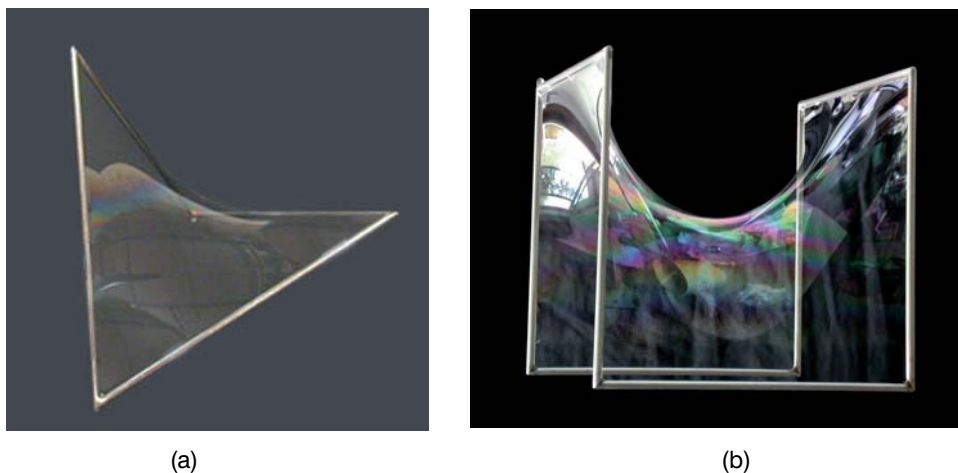


Fig. 2. – Lamine a forma di sella. (a): Sella tetraedrale. (b): Sella cubica.

Una tale caratteristica è piuttosto evidente se il telaio è realizzato sullo schema di un *reticolo tetraedrale* (l'insieme degli spigoli di un tetraedro regolare), del quale si sopprimono due spigoli opposti, conservandone quindi quattro consecutivi: la lamina che si crea è proprio a forma di sella (*sella tetraedrale*, Figura 2(a)). Una struttura analoga (*sella cubica*, Figura 2(b)) si ottiene con un telaio costituito da otto spigoli consecutivi di un cubo. Se immaginiamo di fissare un punto della lamina e di far passare due piani perpendicolari per la normale alla lamina in quel punto, otteniamo due “profili” (*sezioni normali*) ugualmente incurvati ma in senso opposto l'uno rispetto all'altro: la somma delle due curvatures (con segno) dà appunto zero.

Tutte le lamine lisce (corrispondenti a superfici regolari) che è dato osservare in condizioni di equilibrio rivelano, a un'attenta analisi, un simile “andamento a sella”. Un esempio emblematico è rappresentato dall'*elicoide*, la lamina a forma di “rampa a chiocciola” che si crea in un telaio elicoidale – una specie di molla o di cavatappi, con gli estremi collegati lungo l'asse centrale (Figura 3). Se le spire del contorno descrivono un'elica cilindrica, la superficie di area minima con quel bordo (o meglio, una sua porzione che viene poi ripetuta per rototraslazione) risulta essere il grafico di una

funzione del tipo

$$z = u(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

ristretta ad esempio al dominio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x, y > 0\}$. In tal caso, non è difficile verificare la validità della (12). Si tratta di una particolare *superficie rigata* (l'unica, a parte il piano, di curvatura media zero) di una certa importanza storica, la cui scoperta è attribuita a Meusnier, verso la fine del XVIII secolo.

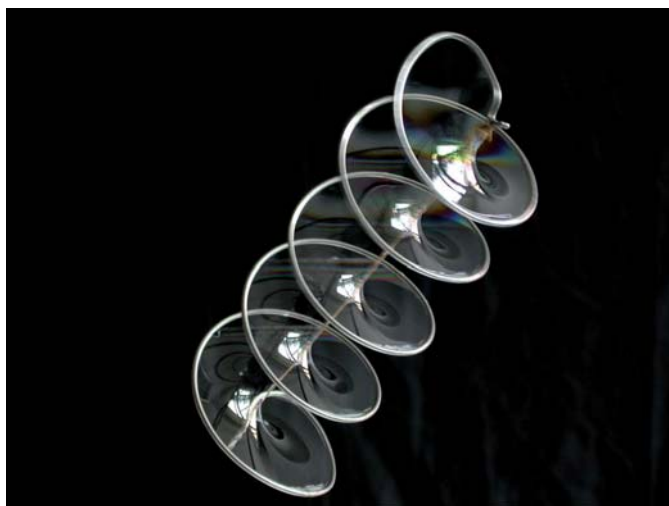


Fig. 3. – Lamina a forma di elicoide.

Prima dell'elicoide venne però scoperta un'altra famosa superficie – la *catenoide*, l'unica *superficie di rivoluzione* di curvatura media zero, ad opera di Eulero (1744). In quel tempo era ben nota la forma della curva (*catenaria*) lungo la quale si dispone una catena “flessibile, inestensibile, pesante ed omogenea” – curva descritta dal grafico della funzione *coseno iperbolico*:

$$u(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

eventualmente sottoposto a traslazioni ed omotetie. Nella celebre opera “*Methodus inveniendi...*” ([8], cap. 5, n. 47) Eulero formulò un

nuovo problema geometrico, che avrebbe richiesto più di un secolo e mezzo per una completa risoluzione:

“Invenire curvam, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis circa axem AZ rotata producat solidum, cuius superficies sit vel maxima vel minima.”⁽⁶⁾

Come è noto, l'area della superficie di rivoluzione generata dalla rotazione attorno all'asse x del grafico $y = v(x)$ (v regolare e positiva in $x_1 \leq x \leq x_2$) è data dall'integrale

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} v(x) \sqrt{1 + v^2(x)} dx$$

La variazione prima di tale funzionale conduce ad un'equazione differenziale ordinaria (*equazione di Eulero-Lagrange*) che si può facilmente integrare e le cui soluzioni sono appunto catenarie di tipo

$$(13) \quad u(x) = b \cosh\left(\frac{x-a}{b}\right) \quad b > 0$$

I parametri a, b devono essere scelti in modo da soddisfare le “condizioni ai limiti”, corrispondenti a richiedere che la catenaria (13) sia “appesa” ai punti $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ con $y_1, y_2 > 0$. In tal modo la relativa superficie di rivoluzione (*catenoide*) ha come bordo due circonferenze “parallele” di raggi y_1, y_2 , centrate sull'asse x nei punti di ascissa x_1, x_2 .

Si può provare che la catenoide ha curvatura media zero in ogni punto, pertanto è candidata ad essere una superficie di area minima. Sperimentando con le lamine di sapone ci si rende conto che in realtà la faccenda è piuttosto complessa! Alla domanda: «*Quale lamina si dovrebbe ottenere immergendo in acqua e sapone due anelli “uguali, coassiali e paralleli”?*» sembra ragionevole rispondere che si possono formare due dischi piani, uno per ogni anello separato, oppure una sorta di “nastro cilindrico” che li unisce. E si può inoltre intuire che, se

⁽⁶⁾ “Fra tutte le curve di lunghezza data, trovare quella che, ruotata attorno all'asse AZ, produca un solido la cui superficie sia o massima o minima.”

gli anelli sono distanti fra loro, allora i due dischi avranno una minore estensione, mentre al contrario, quando sono vicini, sarà il nastro ad avere l'area minore!

Con qualche accorgimento – staccando pian piano gli anelli bagnati accostati l'un l'altro, e rompendo le lamine intruse che si venissero a creare – si riesce realmente ad ottenere una pellicola a forma di nastro, che collega i due anelli leggermente distanziati (Figura 4). La lamina ha un'evidente simmetria radiale (asse di simmetria passante per i centri degli anelli) ed è anche simmetrica rispetto al piano mediano fra di essi; tuttavia, e forse contrariamente alle aspettative, non ha la forma di un cilindro circolare, essendo invece leggermente incurvata verso l'interno. Che così debba essere è chiaro non appena si rifletta sulla curvatura media, che è *costante e diversa da zero* per una superficie cilindrica mentre, come sappiamo, dev'essere *zero* per una lamina in equilibrio. Aumentando progressivamente la distanza fra gli anelli paralleli, la lamina a forma di catenoide tende ad incurvarsi sempre più verso l'asse centrale fino a che, a un certo istante, diventa instabile e si rompe, “saltando” nei due dischi.

Per comprendere questi fenomeni si è reso necessario uno studio approfondito che ha richiesto un lungo lavoro, reso possibile dai



Fig. 4. – Lamina a forma di catenoide.

progressi teorici del Calcolo delle Variazioni e dai metodi sviluppati per la risoluzione numerica di equazioni non lineari. Riassumiamo ora qualche risultato conclusivo, nell'ipotesi che gli anelli siano descritti da due circonferenze uguali situate in piani paralleli a distanza h fra loro, centrate su un comune asse perpendicolare ai piani e di raggio r fissato.

Ovviamente, i cerchi delimitati dalle due circonferenze forniscono un *minimo relativo* dell'area per ogni $h > 0$. Se i piani che le contengono sono sufficientemente vicini (approssimativamente ⁽⁷⁾ per $h < 1.325r$) esistono inoltre *due* catenoidi diverse – corrispondenti a due scelte possibili dei parametri a, b nella (13) – entrambe aventi le circonferenze fissate come bordo e curvatura media zero in ogni punto. Tuttavia, una di esse – quella più incurvata verso l'asse di simmetria – *non* è un minimo nemmeno relativo (e quindi non vedremo mai una lamina in equilibrio stabile di questa forma), mentre l'altra è proprio il *minimo assoluto*, fin quando $h < 1.055r$. Nell'intervallo $1.055r < h < 1.325r$ quest'ultima superficie è ancora un minimo relativo, quello assoluto essendo fornito dai due cerchi. Nel punto di separazione dei due intervalli (all'incirca per $h = 1.055r$) entrambe (catenoide e cerchi) forniscono il minimo assoluto, con la stessa area. Invece, per distanze superiori a $1.325r$ non ci sono più catenoidi di collegamento e l'unico minimo (relativo e assoluto) è costituito dai due cerchi; $h = 1.325r$ è quindi il valore critico (approssimato) sotto il quale si può effettivamente osservare una lamina a forma di catenoide, la quale – allontanando gli anelli – diventa instabile non appena si raggiunga tale valore: la lamina allora si contrae repentinamente e passa, in modo discontinuo, dalla catenoide ai due dischi.

Oltre al piano, alla catenoide e all'elicoide, sono ben poche le superfici di area minima (o anche soltanto di curvatura media zero) che si lasciano rappresentare in forma esplicita, con una formula o un'equazione che coinvolga funzioni note. Spesso solo l'esperienza e l'intuizione geometrica, affinate dall'osservazione attenta delle la-

(7) I valori numerici indicati nel seguito sono appunto le soluzioni approssimate di particolari equazioni trascendenti. Si veda ad esempio [12], appendice 3.

mine di sapone che si creano spontaneamente nei vari telai, consentono di prevedere la forma delle soluzioni e di descriverne le caratteristiche principali.

Ci si può chiedere ad esempio quale lamina si ottenga con un telaio a forma di “cuffie stereo”, costruito saldando in un unico contorno chiuso quattro anelli metallici uguali, aperti per un breve tratto, paralleli a coppie e tali che una coppia sia perpendicolare all'altra. Si può facilmente intuire una prima configurazione, costituita in sostanza da due dischi (in una coppia di anelli paralleli) uniti fra loro da un nastro a forma di catenoide, avente gli altri due anelli per bordo (Figura 5).



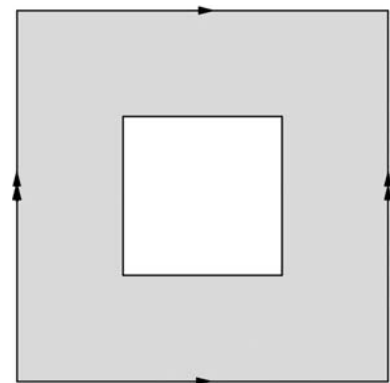
Fig. 5. – Una lamina nel telaio a forma di “cuffie stereo”.

La lamina che normalmente si realizza ha proprio questa forma. Soffiandoci contro o allontanando gli anelli, dischi e nastro si scambiano di posto e la lamina passa con continuità ad una configurazione simmetrica. Topologicamente, si tratta di superfici “del tipo del disco”, ottenibili deformando un cerchio (stirandolo, piegandolo o torcendolo, ma senza mai romperlo o tagliarlo). Tuttavia, quando in ognuna delle coppie gli anelli paralleli sono vicini fra loro, si può anche ottenere (con un po' di pratica e qualche artificio) una lamina diversa, costituita da due nastri – simili a catenoidi – uniti fra loro al centro del telaio (Figura 6(a)): topologicamente, si tratta di una superficie di genere 1, un “toro bucato” (Figura 6(b)).

In generale, una stessa curva semplice e chiusa può essere bordo di superfici topologicamente diverse: può quindi capitare che, nello stesso telaio, si possano osservare configurazioni corrispondenti a minimi relativi in classi di superfici di diverso tipo topologico. Talvolta, l'operatore esperto può “guidare” il risultato dell'esperimento, per esempio estraendo in un certo modo il telaio dalla soluzione saponosa, soffiando sulle lamine o facendone scoppiare qualcuna. È sorprendente scoprire quante configurazioni diverse, esteticamente belle e di notevole interesse matematico, si possano ottenere – come avviene nel secondo gruppo di esperimenti in mostra – utilizzando telai di varia



(a)



(b)

Fig. 6. – Un'altra lamina nel telaio a forma di “cuffie stereo” (a) e una sua rappresentazione topologica (b). Le frecce spiegano come vanno identificati i lati.

foggia: nodi trifogli e nastri di Möbius, superfici di genere zero e positivo... La fotografia che ritrae Richard Courant – uno dei grandi protagonisti della matematica del XX secolo – alle prese con innumerevoli telai sparpagliati sul tavolo di lavoro (riprodotta in [11], cap. 5) testimonia il gusto di una sperimentazione creativa e sempre appagante.

Prima di passare a un nuovo gruppo di attività rimane ancora qualcosa da dire sulle bolle di sapone. È chiaro che il “problema di Plateau” o “dell’area minima” – *trovare, in una certa classe di superfici, quella o quelle di area minima* – può essere ambientato non solo fra le superfici con bordo fissato, ma anche fra quelle che “racchiudono” un dato volume e che soddisfano eventualmente ulteriori richieste. Problemi di questo tipo sono convenientemente studiati nell’ambito della *Teoria delle frontiere orientate di misura minima* di E. De Giorgi, dove il concetto di “superficie” viene ampliato e inteso come “frontiera di un insieme di perimetro finito”. È questa una cornice naturale, utile per indagare i “problemi di partizioni ottimali” collegati alla ricerca del modo migliore di suddividere un dato dominio in un certo numero di componenti, in maniera che l’insieme delle interfacce di separazione abbia – in un senso opportuno – la minima estensione possibile (si veda ad esempio [13]).

In generale, la presenza del vincolo di volume influenza la curvatura media della soluzione, che ora è costante e diversa da zero. Fisicamente, una lamina di sapone che separa regioni diverse (eventualmente a pressione diversa) obbedisce alla *legge di Laplace – Young*

$$\Delta p = \sigma H$$

dove Δp è appunto la differenza di pressione, H la curvatura media e σ un coefficiente di tensione superficiale. La forma delle bolle di sapone, libere di volteggiare nell’aria oppure appoggiate su un piano o anche imprigionate fra due lastre parallele – rispettivamente: sfera, emisfera e cilindro circolare – illustra efficacemente tale principio!

Ma che cosa succede avvicinandone due, fino ad unirle in un’unica “doppia bolla”? Rimane una “parete di separazione” fra le bolle (Figura 7), in modo che adesso ci sono complessivamente *tre* lamine che s’incontrano in una linea comune (*spigolo liquido*). Joseph A. F.



Fig. 7. – Una “doppia bolla” appoggiata su un piano.

Plateau, fisico sperimentale del XIX secolo, osservò con molta cura i risultati degli esperimenti e formulò nuove leggi che governano le possibili configurazioni. Per parlarne conviene però aprire un nuovo capitolo.

5. – Percorsi minimi e prima legge di Plateau

Piuttosto sorprendentemente, le lamine di sapone possono anche essere utilizzate per ottenere indicazioni molto precise sulla geometria delle *reti minime* che collegano un numero finito di punti. Immaginiamo di dover progettare una rete di tubazioni o di fibre ottiche, che colleghi dei nodi assegnati e che sia la più breve possibile. Potrebbe anche trattarsi di una rete stradale fra alcune città: si richiede allora che, partendo da una qualsiasi di esse e percorrendo la rete, si possa raggiungere ogni altra città e inoltre che, complessivamente, la rete sia la più corta possibile in modo da rendere minimo il costo per realizzarla.

Possiamo schematicamente rappresentare i nodi assegnati come punti del piano: aggiungendone eventualmente degli altri (intesi come possibili nuovi incroci) e unendoli con dei segmenti, generiamo una

rete di collegamento – un *grafo connesso*, i cui vertici comprendono i nodi assegnati e la cui lunghezza complessiva va resa minima. È allora evidente che, se fosse possibile partire da un punto della rete e farvi ritorno senza mai ripassare sullo stesso tratto di strada (percorrendo quindi un *circuito chiuso*), converrebbe eliminare un lato del circuito: il grafo rimarrebbe connesso e la lunghezza diminuirebbe! Conviene dunque considerare soltanto grafi connessi privi di circuiti, i cosiddetti *alberi*.

Se i nodi sono posizionati nei vertici di un triangolo equilatero, la rete minima – a forma di *Y* – è costituita dai tre segmenti che li uniscono con il centro: forse non è così facile intuirlo! Nella soluzione, ai nodi assegnati si è dunque aggiunto un nuovo incrocio: il centro del triangolo. Si potrebbe poi pensare che qualcosa del genere capiti anche con quattro nodi, disposti nei vertici di un quadrato, ma non è così. Questa volta la rete minima non è quella “a forma di *X*”, costituita dai quattro segmenti che uniscono i vertici con il centro del quadrato: la soluzione si ottiene invece combinando insieme le reti minime “a forma di *Y*” in due dei triangoli “opposti al vertice” nei quali il quadrato viene suddiviso dalle diagonali!

Per “vedere” effettivamente le soluzioni di questi e di altri problemi simili, conviene costruire dei semplicissimi apparati sperimentali che sfruttano sapientemente la proprietà di area minima delle lamine di sapone. A questo scopo, prendiamo due lastre di materiale trasparente e fissiamole tramite alcuni pioli perpendicolari, in modo che siano ugualmente distanziate fra loro (*lastre parallele*). Immergendole in acqua e sapone, si forma un sistema laminare molto particolare – una sorta di nastro continuo e ramificato che corre fra le lastre, zigzagando fra i pioli di collegamento e formando talvolta “spigoli liquidi” di diramazione, lungo i quali si incontrano componenti diverse del nastro. Dovendo avere area minima, il tratto di lamina compreso fra due spigoli consecutivi – siano essi pioli oppure spigoli liquidi – è di forma rettangolare, perpendicolare alle lastre trasparenti. Su ognuna di esse il nastro disegna una rete di collegamento dei nodi individuati dai pioli – rete che, essendo costante lo spessore fra le lastre, ha di conseguenza lunghezza minima (è sottinteso che, in questo tipo di esperimenti, può trattarsi anche di un minimo relativo).

Le immagini seguenti (Figura 8(a) e 8(b)) mostrano le configurazioni di minimo assoluto, a forma di *Y* e di “doppia *Y*”, che si ottengono con tre e quattro pioli, rispettivamente nei vertici di un triangolo equilatero e di un quadrato: proprio quelle descritte sopra! Si osserva che nei punti di diramazione (*uno* nel centro del triangolo, *due* nel caso del quadrato) si uniscono – lungo uno spigolo liquido – tre lamine ad angoli uguali, di 120° ciascuno.

Un teorema matematico, dimostrabile con strumenti elementari, afferma che in una rete di lunghezza minima non possono esserci angoli minori di 120° : se così fosse, la rete si potrebbe ulteriormente migliorare, sostituendo in sostanza i lati di tale angolo – o parti di essi – con tre nuovi segmenti, uscenti a 120° da un punto interno. In ogni triangolo ABC , avente angoli interni minori di 120° , esiste infatti (ed è unico) un punto F da cui “si vedono i tre lati sotto angoli di 120° ”: si tratta di un punto speciale, talvolta chiamato *punto di Fermat* del triangolo, caratterizzato dal fatto di rendere minima la somma delle distanze dai vertici A, B, C . In tal caso la rete minima – la più breve in assoluto fra quelle che collegano i tre vertici – è costituita proprio dai tre segmenti congiungenti F con A, B, C . Se invece uno degli angoli interni del triangolo considerato (supponiamo, quello di vertice A) misura 120° o più, allora il punto di Fermat cade proprio in A e la rete minima è costituita dai due lati adiacenti ad A .

Le reti di lunghezza minima che collegano n punti assegnati del piano hanno quindi una struttura molto speciale: sono alberi con

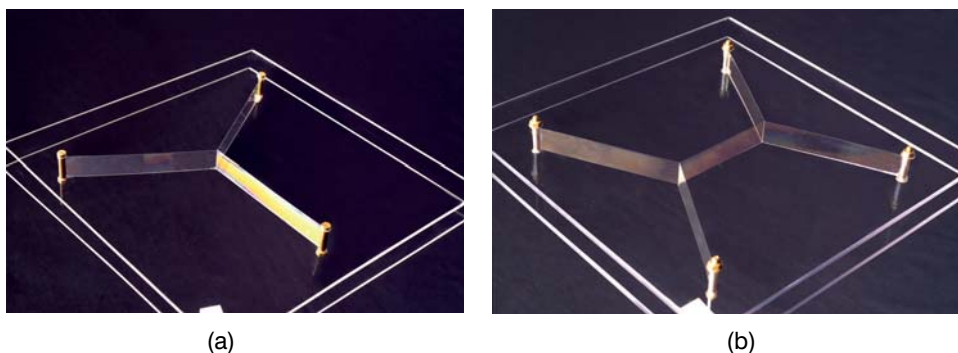


Fig. 8. – Rete minima nel triangolo equilatero (a) e nel quadrato (b).

$n + k$ vertici (gli n punti assegnati e k eventuali nuovi nodi) e $n + k - 1$ archi (segmenti congiungenti coppie opportune di vertici). Si può dimostrare che $0 \leq k \leq n - 2$ e che ogni nuovo nodo è un punto di diramazione di tre segmenti a 120° , mentre da ogni punto assegnato si possono staccare o un solo segmento, oppure due che formano un angolo uguale o maggiore di 120° , oppure tre segmenti esattamente ad angoli di 120° .

Le immagini di questa sezione si riferiscono ad esperimenti compiuti nel terzo tavolo della mostra e illustrano efficacemente i precedenti risultati. In particolare, le Figure 9(a), 9(b) e 9(c) mostrano tre configurazioni diverse ottenibili con lastre fissate da sei pioli, posizionati nei vertici di un esagono regolare: la prima, con la lamina che percorre cinque lati dell'esagono, corrisponde alla rete di lunghezza minima in assoluto, mentre la seconda e la terza, entrambe con quattro punti di diramazione, rappresentano dei minimi relativi (sono cioè più corte di ogni altra rete "vicina", in un senso opportuno che è possibile precisare, ma leggermente più lunghe della prima). Da notare che l'angolo interno dell'esagono regolare misura esattamente 120° !

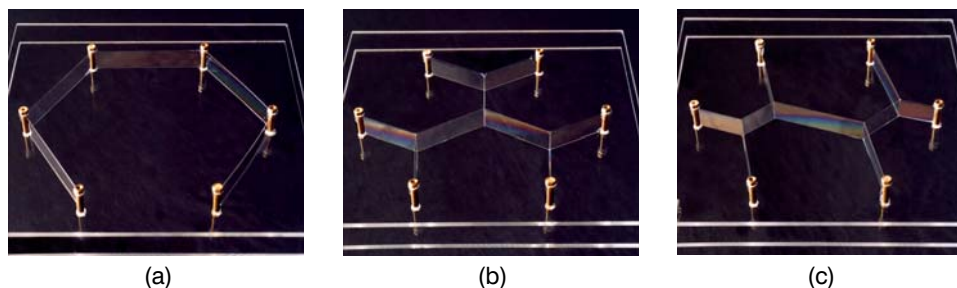


Fig. 9. – Reti minime nell'esagono regolare.

Questa notevole "proprietà dei 120° ", caratteristica delle reti di lunghezza minima e riscontrabile nelle lastre che si creano fra lastre parallele, ha una validità molto generale ed è incorporata nella *Prima legge di Plateau*:

Le lastre di sapone possono incontrarsi solo a gruppi di tre lungo "spigoli liquidi", formando angoli diedri di 120° .

In base a questa legge, ogniqualevolta in un sistema laminare è presente uno spigolo liquido, generato dall'intersezione di lamine diverse, allora esso proviene dall'incontro di tre lamine che formano fra loro angoli uguali, di 120° .

Diamo un'idea di come la matematica spiega un simile fenomeno: supponiamo che alcune superfici (almeno tre, regolari) si incontrino in una curva (anch'essa regolare), in modo che non solo ogni singola superficie, ma l'intero sistema sia di area minima – sostanzialmente, si richiede che ogni “modifica locale” aumenti l'area complessiva del sistema di superfici. Per studiarne la geometria ci si può avvalere della *tecnica del blow-up*: si tratta in sostanza di osservare il sistema di superfici ad ingrandimenti sempre maggiori, nell'intorno di un punto appartenente alla curva d'intersezione. Al limite, quando il fattore d'ingrandimento tende all'infinito, la linea d'intersezione diventa una retta e le superfici si spianano, producendo una *struttura tangente* costituita da un insieme di semipiani con una generatrice comune. La proprietà di area minima “passa al limite” trasferendosi alla struttura tangente, che geometricamente è di tipo cilindrico: se ne deduce che la struttura di base del cilindro (insieme di semirette uscenti da un punto) ha lunghezza minima, il che, come sappiamo, è possibile solo se le semirette escono a 120° dal vertice comune! La struttura tangente è quindi composta da tre semipiani formanti angoli diedri uguali, e di conseguenza il sistema iniziale è composto da tre superfici che si incontrano ad angoli uguali lungo la curva d'intersezione.

Gli spigoli liquidi compaiono molto frequentemente nei sistemi laminari, dalle bolle doppie o multiple alle lamine rettangolari fra lastrine parallele. Non solo, anche i telaietti per i nastri di Möbius possono dar luogo a incroci di lamine diverse: solo rompendone qualcuna si ottiene la lamina liscia che ci si aspetta. Perfino con i due anelli paralleli si può ottenere una *soluzione singolare*, costituita da un disco centrale, a metà strada fra gli anelli e di diametro minore, collegato ad essi da due lamine incurvate aventi simmetria radiale (Figura 10). Le tre lamine s'incontrano a 120° nella circonferenza di bordo del disco centrale: basta però far scoppiare quest'ultima lamina per ottenere la catenoide, di cui abbiamo precedentemente parlato.



Fig. 10. – Tre lamine a 120° .

Sistemi laminari ancora più complessi vengono esplorati nel quarto tavolo in mostra.

6. – La seconda legge di Plateau

Nell'ultimo gruppo di esperimenti si abbandonano le lastrine delle esperienze precedenti, per ritrovare nuovi telaietti metallici di foggia particolare. Fra questi, alcuni raffigurano (in tutto o in parte) il reticolo degli spigoli di certi poliedri (prismi, piramidi, poliedri regolari, eccetera). Siccome da ogni vertice di un poliedro escono tre o più spigoli e siccome da ogni spigolo del telaio si stacca almeno una lamina, è facile intuire che, immergendo un telaio poliedrale in acqua e sapone, si formerà un'architettura di lamine e spigoli liquidi particolarmente elaborata.

Descriviamo per cominciare il sistema laminare che si crea nell'armatura di un tetraedro regolare – il solido platonico a forma di piramide con base triangolare equilatera e facce oblique dello stesso tipo. Complessivamente, il telaio ha sei spigoli uguali, riuniti a terne in quattro vertici: sperimentando, si ottengono esattamente sei lamine (una per ogni spigolo metallico), raggruppate a terne attorno a quattro spigoli liquidi (uno per ogni vertice del telaio). Gli spigoli liquidi cor-

rispondono ai segmenti che congiungono i vertici del tetraedro con il suo centro, le lamine sono a forma di triangolo isoscele con base negli spigoli del telaio tetraedrale, vertice opposto nel centro e lati obliqui negli spigoli liquidi (Figura 11).



Fig. 11. – Sistema laminare nel telaio tetraedrale.

L'architettura della soluzione è per molti aspetti analoga alla rete minima nel triangolo equilatero (vedi Figura 8(a)): in un certo senso, potremmo dire che si tratta della stessa struttura in una dimensione in più! E come la lunghezza della rete minima a forma di *Y*, che si dirama dal centro del triangolo equilatero (Figura 12(a)), è minore di quella delle linee di separazione di ogni altra suddivisione del triangolo in tre parti, ognuna delle quali “attaccata” ad un suo lato (Figura 12(b)), così si può dimostrare che l'area della struttura geometrica corrispondente al sistema di lamine nel telaio tetraedrale è minore di quella delle superfici di separazione di ogni altra suddivisione del tetraedro in quattro parti, ognuna delle quali “attaccata” ad una faccia triangolare.

In questa particolare configurazione di area minima, molto simmetrica, troviamo quindi quattro spigoli liquidi, in ognuno dei quali

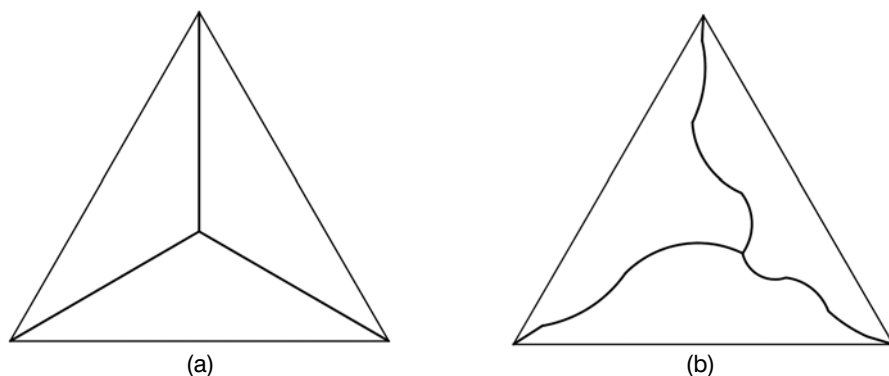


Fig. 12. – La rete minima nel triangolo equilatero (a) e un'altra suddivisione del triangolo (b).

s'incontrano tre lamine a 120° , rispettando la prima legge di Plateau. Gli spigoli liquidi si riuniscono a loro volta nel centro del tetraedro, formando a coppie angoli uguali; non è difficile dimostrare che tale angolo è il supplementare dell'angolo diedro del tetraedro e che il suo coseno vale esattamente $-1/3$: la sua misura approssimata è di $109^\circ 28' 16''$.

Questa nuova proprietà, che le particolari caratteristiche geometriche del sistema laminare nel telaio tetraedrale permettono di scoprire, si osserva in realtà in ogni configurazione che presenti spigoli liquidi con intersezioni comuni. Data la sua validità generale, viene incorporata nella *Seconda legge di Plateau*:

In ogni sistema di lamine di sapone gli spigoli liquidi possono incontrarsi fra loro soltanto a gruppi di quattro, formando a coppie angoli uguali (di circa $109^\circ 28' 16''$).

Ancora una volta, la matematica ci spiega come dedurre questa regola da un ragionamento basato sulla tecnica del blow-up. Immaginiamo dunque di osservare un sistema di lamine di sapone ad ingrandimenti sempre maggiori, nell'intorno del punto d'intersezione di alcuni spigoli liquidi: all'aumentare del fattore d'ingrandimento, l'insieme di superfici e linee d'intersezione corrispondenti al sistema laminare in questione tende ad una "struttura tangente", costituita da alcune semirette di origine comune – una per ogni spigolo liquido – in

ognuna delle quali (in base alla prima legge di Plateau) si riuniscono a 120° tre superfici piane – una per ogni lamina del sistema considerato.

Intersecando con una sferetta centrata nel punto comune si ottiene una “rete sferica” molto speciale, costituita da archi di circonferenza massima – uno per ogni piano della struttura tangente – che si riuniscono a terne in punti di diramazione – uno per ogni semiretta – formando angoli di 120° .

Queste particolari reti sferiche sono state approfonditamente studiate e sono classificate in maniera molto precisa – sostanzialmente, includendo anche la “rete banale” (priva di diramazioni) costituita da un’unica circonferenza massima, ce ne sono di dieci tipologie diverse. Ad esempio, le due tassellazioni della sfera ottenute “gonfiando” un cubo e, rispettivamente, un dodecaedro regolare inscritti in essa, danno luogo a tipi distinti di reti siffatte.

Reciprocamente, ogni rete con tali proprietà genera, facendo passare per ogni suo punto una semiretta uscente dal centro della sfera, una configurazione di superfici piane e linee d’intersezione – geometricamente, un *cono* con vertice nel centro della sfera – la quale, se fosse la struttura tangente di un sistema laminare come visto sopra, dovrebbe avere area minima (infatti, come sappiamo, la proprietà di area minima del sistema di partenza “passa al limite”, trasferendosi alla struttura tangente).

Si può tuttavia dimostrare che per sette dei dieci tipi di reti questo non succede: in altre parole, per ognuno di questi sette tipi di reti si riesce a modificare il cono da esse generato in modo da diminuirne l’area complessiva! ⁽⁸⁾

I tre casi rimanenti si comportano diversamente: la “rete banale” (un’unica circonferenza massima) genera evidentemente un piano, che potrebbe proprio essere il piano tangente ad una lamina liscia; i “tre meridiani a 120° ” (tre semicirconferenze massime riunite a 120° in una

⁽⁸⁾ Per compiere le opportune deformazioni ci si può ispirare proprio al sistema laminare che si otterrebbe in un telaio di quella forma! Ad esempio, come vedremo meglio fra poco, la configurazione generata dalla rete sferica ottenuta gonfiando il cubo inscritto (*cono sul cubo*) può essere vantaggiosamente modificata inserendo un quadratino al centro e collegandone i vertici con quelli del cubo.

coppia di punti antipodali) generano tre semipiani disposti ad angoli diedri uguali attorno ad una generatrice comune, come la struttura tangente ad un sistema laminare con un unico spigolo liquido; rimane infine la rete individuata dalla *tassellazione tetraedrale* della sfera, ottenuta gonfiando il tetraedro regolare inscritto in essa. Quest'ultima – la più interessante per i nostri scopi attuali – genera proprio la struttura simmetrica (*cono sul tetraedro*) corrispondente al sistema laminare che si forma nel telaio tetraedrale (vedi Figura 11): un qualunque altro sistema di lamine di sapone, nel quale più spigoli liquidi confluiscono in un punto comune, non può avere che questa come struttura tangente! Di conseguenza, gli spigoli liquidi che confluiscono in quel punto sono esattamente quattro e formano a coppie angoli uguali, come prescritto dalla seconda legge di Plateau.

La generalità di queste leggi si può già apprezzare in una semplice “trippla bolla” o in un *cluster* di bolle, facilmente realizzabile soffiando una contro l'altra tre o più semibolle appoggiate su un tavolo, in modo che si riuniscano in un unico agglomerato. Ma forse l'illustrazione migliore e più completa della geometria delle lamine di sapone è fornita dal sistema che si crea in un telaio cubico (Figura 13): un complesso di 13 pellicole, 5 piane e 8 curve, riunite a gruppi di tre attorno a 12 spigoli liquidi, riuniti a loro volta a gruppi di quattro in 4 punti d'intersezione.



Fig. 13. – Sistema laminare nel telaio cubico.

La struttura – a cui si ispira la deformazione del cono sul cubo descritta nella nota 8 – ricorda da vicino la forma a doppia Y della rete minima nel quadrato (vedi Figura 8(b)). Si nota al centro una piccola lamina piana, parallela a due facce opposte del cubo, di forma “quadrangolare regolare”: si tratta di una sorta di “quadrato arrotondato”, delimitato da 4 spigoli liquidi uguali che, incontrandosi ad angoli di $109^{\circ}28'16''$, ne individuano i vertici. Altri 8 spigoli liquidi uguali, anch’essi leggermente curvi, congiungono i vertici del cubo con quelli della lamina “quadrata” centrale, in modo che in ogni suo vertice ne arrivano complessivamente quattro, formando a coppie angoli uguali. In ogni spigolo liquido s’incontrano tre lamine a 120° : una piana – quella “quadrata” centrale, oppure una delle quattro lamine a forma di triangolo isoscele con lati obliqui arrotondati che si uniscono ad essa nei vertici – e altre due uguali di forma trapezoidale, non più piane ma di curvatura media zero. Una configurazione di rara, intrinseca bellezza!

7. – Conclusioni

La mostra, oltre ai quattro tavoli dedicati alle attività principali di cui ci siamo fin qui occupati, comprende anche una piccola area espositiva con “richiami artistici” alle forme delle superfici minime, un video con immagini, filmati e animazioni al computer, una decina di pannelli illustrativi e alcune postazioni che invitano a compiere qualche “esperienza personale” e a cimentarsi nella risoluzione di semplici problemi. L’apparente facilità con cui “la natura segue la via più economica” si scontra spesso con le reali difficoltà nel prevederne i risultati, anche in contesti tutto sommato semplici e dopo aver costruito un certo bagaglio di conoscenze. Per sottolineare questi aspetti vengono proposti alcuni divertenti quesiti, come ad esempio il seguente: *Qual è la rete minima che collega quattro punti, tre dei quali sono i vertici di un triangolo equilatero e il quarto è il punto medio di uno dei lati?* Nella ricerca della risposta – che è possibile trovare o meglio controllare sperimentalmente, usando un’apposita *lastrina a T* – si avrà modo di apprezzare il valore delle leggi di Plateau e di approfondire il ruolo giocato dalla simmetria.

Come già detto, si possono trovare informazioni sulla mostra e sulle modalità per richiederla ed allestirla nel sito web <http://bolle.science.unitn.it>. Non è forse superfluo ricordare che gli esperimenti con le bolle e le lamine di sapone sono utilizzati in tutto il mondo per mostrare le meraviglie della natura e per collegarle a quelle dell'arte e della scienza. Da sempre fonte di divertimento e di intense emozioni, sono spesso motivo d'ispirazione per l'opera di architetti, scrittori, artisti, pubblicitari. Dal classico libro di Boys di più di un secolo fa (alla prima pubblicazione del 1890 sono seguite varie riedizioni ampliate, come la [4]) al recentissimo saggio di Emmer [7], è un continuo fiorire di letteratura sull'argomento, di taglio sia divulgativo sia scientifico.

L'opera originale di Plateau [20], in due volumi, è del 1873, mentre trattazioni più recenti sono Isenberg [12] e Lovett [14]. Si veda anche il piacevolissimo Perkowski [19] e i sempre attuali Courant-Robbins ([5], Cap. 7) e Hildebrandt-Tromba ([11], Cap. 5). Notizie e approfondimenti sulla figura e sull'opera scientifica di Plateau e di altri personaggi citati nell'articolo sono reperibili su [9].

Per studi sugli aspetti fisico-chimici delle pellicole di sapone rimandiamo al classico Adamson [1], mentre sugli aspetti matematici delle superfici minime (in senso lato) consigliamo la lettura della bellissima introduzione di Frank Morgan [17]. L'opera originale di De Giorgi sugli insiemi di perimetro finito e sulle frontiere minime risale agli anni 1950-60 ed è esposta in varie pubblicazioni successive, come ad esempio [10] e [16], dove si possono anche trovare approfondimenti sul problema di Plateau e sulla tecnica del blow-up.

La dimostrazione della proprietà isoperimetrica dell'ipersfera in \mathbb{R}^n , data da De Giorgi nel 1958 [6], in un certo senso completa ed estende una tecnica di simmetrizzazione ideata molto tempo prima da Jakob Steiner. Sulla disuguaglianza isoperimetrica e i rapporti con le disuguaglianze di Sobolev si possono consultare ad esempio [18] e [22]. Un "laboratorio per le scuole" sulla proprietà isoperimetrica e sulle reti minime è presentato in [15].

Lo studio della catenoide è egregiamente sviluppato in [3], cap. 4 e riassunto nella sezione 4.4 e nell'appendice 3 di [12]. La classificazione delle reti sferiche a 120° , inizialmente intrapresa da Ernest Lamarle (uno dei colleghi di Plateau all'Università belga di Gand) nel XIX se-

colo, è stata successivamente completata da Aládar Heppes nel 1964 ed ha fornito le basi per un fondamentale lavoro di Jean Taylor ([21]) sulla struttura delle singolarità nei sistemi laminari. L'articolo [2] contiene una *review* di questi risultati (si veda anche il capitolo 13 di [17]).

Nelle bibliografie dei testi, citati nell'elenco che segue, si potranno trovare molti altri riferimenti, utili per approfondire le tematiche qui esposte.

La mia riconoscenza va ai tanti colleghi e amici con i quali ho a lungo discusso questi argomenti, agli studenti che li hanno in parte sviluppati nel loro lavoro di tesi, ai collaboratori che hanno contribuito a costruire, allestire e presentare la mostra in questi anni. Un grazie particolare a Roberto Bernardinatti, autore delle fotografie 8 e 9, e a Simonetta Falsiroli, Gian Paolo Leonardi e Mimmo Luminati per avermi accompagnato con entusiasmo in questa avventura. Le restanti fotografie sono opera del Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] ADAMSON A. W., *Physical chemistry of surfaces*, Wiley, New York, 1990 (fifth edition)
- [2] ALMGREN F. J. Jr., Taylor J. E., *The geometry of soap films and soap bubbles*, Sci. Am. 235 (1976), 82-93 (edizione italiana: *La geometria delle bolle di sapone*, Le Scienze 99 (1976), 48-60).
- [3] BLISS G. A., *Calculus of variations*, Open Court, Chicago, 1925.
- [4] BOYS C. V., *Soap bubbles. Their colours and the forces which mold them*, Dover, New York, 1959 (edizione italiana: *Le bolle di sapone e le forze che le modellano*, Zanichelli, Bologna, 1974).
- [5] COURANT R. - ROBBINS H., *Che cos'è la matematica?*, Bollati Boringhieri, Torino, 2000.
- [6] DE GIORGI E., *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, Mem. Acc. Naz. Lincei serie VIII, 5 (1958), 33-44.
- [7] EMMER M., *Bolle di sapone*, Bollati Boringhieri, Torino, 2009.
- [8] EULER L., *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Opera omnia, serie I, vol. 24 (Edidit Constantin Carathéodory). Orell Füssli, Zürich, 1952.
- [9] GILLISPIE C. C. (Editor), *Dictionary of scientific biography*, Charles Scribner's Sons, New York, 1970-1980.
- [10] GIUSTI E., *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhäuser, Boston, 1984.
- [11] HILDEBRANDT S. - TROMBA A., *The parsimonius universe. Shape and form in the natural world*, Springer-Verlag, New York, 1996 (edizione italiana: *Principi di minimo. Forme ottimali in natura*, Edizioni della Normale, Pisa, 2007).

- [12] ISENBERG C., *The science of soap films and soap bubbles*, Tieto, Clevedon, 1978.
- [13] LEONARDI G. P., TAMANINI I., *Metric spaces of partitions, and Caccioppoli partitions*, Adv. Math. Sci. Appl., 12 (2) (2002), 725-753.
- [14] LOVETT D., *Demonstrating science with soap films*, Institute of Physics Publishing, Bristol, 1994.
- [15] LUMINATI D. - TAMANINI I., *Problemi di massimo e di minimo*, Mimesis, Milano, 2009.
- [16] MASSARI U., MIRANDA M., *Minimal surfaces of codimension one*, North Holland, Amsterdam, 1984.
- [17] MORGAN F., *Geometric measure theory. A beginner's guide*, Academic Press, Boston, 2000 (third edition).
- [18] OSSERMAN R., *The isoperimetric inequality*, Bull. Am. Math. Soc., 84 (1978), 1182-1238
- [19] PERKOWITZ S., *La teoria del cappuccino. La scienza della schiuma dalle cellule al cosmo*, Garzanti, Milano, 2001.
- [20] PLATEAU J., *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1873.
- [21] TAYLOR J. E., *The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces*, Ann. Math. 103 (1976), 489-539.
- [22] ZIEMER W. P., *Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation*, Springer-Verlag, New York, 1989.

Italo Tamanini

Dipartimento di Matematica, Università di Trento

e-mail: italo.tamanini@unitn.it

