
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MICHÈLE ARTIGUE

Le sfide dell'insegnamento della matematica nell'educazione di base

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 4 (2011), n.2, p. 211-259.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_2_211_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_2_211_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

Le sfide dell'insegnamento della matematica nell'educazione di base

MICHÈLE ARTIGUE

PRESENTAZIONE

(MARIA G. BARTOLINI BUSSI)

L'UNESCO ha nominato nel 2009 un gruppo di esperti che rappresentavano varie competenze collegate all'insegnamento della matematica, delle scienze e della tecnologia, alla formazione degli insegnanti, alla psicologia cognitiva. Tra questi figurava Michèle Artigue, allora Presidente dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), commissione dell'International Mathematical Union (IMU). Pubblichiamo nel seguito la traduzione del documento preparato da Michèle Artigue per la matematica e approvato dall'UNESCO. Si tratta di un documento di notevole valore politico, che traduce i risultati di molti decenni di ricerca sul tema in una serie di raccomandazioni per la politica educativa dei diversi paesi.

Il testo originale francese, completo delle appendici (che qui non sono state tradotte) è scaricabile dal sito: <http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776f.pdf>

(traduzione italiana a cura di Rossana Falcade, SUPSI, Scuola universitaria professionale della Svizzera Italiana).

PREMESSA

Il nostro mondo è profondamente contrassegnato dalla scienza e dalla tecnologia. La conservazione dell'ambiente, la riduzione della povertà, il miglioramento delle condizioni di salute: ciascuna di queste sfide e molte altre ancora, richiedono degli scienziati capaci di sviluppare soluzioni efficaci e realistiche - così come dei cittadini in grado di assumere un ruolo attivo nella dibattito su questi temi.

In questa prospettiva, la Dichiarazione di Budapest (1999) ha sottolineato l'importanza di un insegnamento scientifico per tutti. Infatti, un insegnamento delle scienze e della matematica pertinente e di qualità permette di sviluppare il pensiero critico e la creatività, aiuta gli studenti a comprendere il dibattito pubblico sulle questioni politiche e a prendervi parte, incoraggia i cambiamenti necessari ad impegnare il mondo su un percorso più sostenibile e stimola lo sviluppo socio-economico. L'insegnamento delle scienze e della matematica può così dare un contributo decisivo al raggiungimento degli Obiettivi di Sviluppo del Millennio, posti dai leader mondiali nel 2000.

L'UNESCO ne ha la consapevolezza e ha dunque costituito un gruppo internazionale di esperti sulle politiche dell'insegnamento delle scienze e della matematica che si è riunito per la prima volta dal 30 marzo al 1 aprile 2009, e le cui conclusioni, sulle quali poggia la presente pubblicazione, riflettono un notevole consenso sulle sfide alle quali l'insegnamento scientifico e matematico è confrontato oggi, così come sul modo di raccogliere. Tutti gli esperti si sono accordati nell'affermare che il decennio appena concluso ha conosciuto lo sviluppo di un vasto corpus di conoscenze sull'insegnamento delle scienze e della matematica, e la produzione di preziosi strumenti e risorse, molti dei quali ormai accessibili ad un numero sempre più vasto di persone, grazie all'avanzata della tecnologia. Si tratta là di una base solida su cui appoggiarsi, che apre a nuove prospettive per politiche fondate su dati fattuali nel campo dell'insegnamento scientifico e matematico.

La presente pubblicazione definisce le sfide incontrate per assicurare un insegnamento delle scienze e della matematica di qualità a livello dell'educazione di base e descrive, a partire da studi di caso, dei

mezzi per migliorarlo. Sarà utile non solo ai decisori desiderosi di integrare un insegnamento scientifico e matematico di qualità nei loro sistemi educativi, ma anche ai differenti attori intendono prendere parte al processo di cambiamento.

L'UNESCO spera che questa pubblicazione contribuisca a suscitare, nei bambini, gli insegnanti ed i genitori, l'energia e l'entusiasmo necessari per migliorare l'insegnamento delle scienze e della matematica. È indispensabile operare insieme all'elaborazione duratura e coordinata di un insegnamento scientifico e matematico di qualità nella scolarità di base, al fine di assicurare a tutti un avvenire più vivibile e più equo.

M. QIAN TANG
Sotto-direttore generale per l'educazione
UNESCO

Ringraziamenti

Questo documento è stato elaborato nel quadro del Programma di educazione scientifica della sezione dell'insegnamento secondario della divisione per la promozione dell'educazione di base dell'UNESCO.

L'UNESCO vuole in primo luogo ringraziare vivamente Michèle Artigue per l'elaborazione e la redazione di questo documento.

L'UNESCO inoltre vuole ringraziare sinceramente il gruppo di esperti, gli autori delle diverse appendici e Jill Adler e Mariolina Bartolini Bussi, membri del Comitato Esecutivo di ICMI, che hanno rivisto una prima versione del testo.

Inoltre, l'UNESCO desidera ringraziare Bill Barton, Presidente di ICMI, e Bernard Hodgson, segretario generale di ICMI, per la loro collaborazione.

INDICE DEI CONTENUTI

1. Introduzione
 2. Educazione matematica e littéracie
 - 2.1. La sfida della littéracie matematica
 - 2.2. Al di là dello sviluppo di una littéracie matematica
 - 2.3. Apprendimento di contenuti / Sviluppo di competenze
 - 2.4. Educazione matematica per tutti / Educazione matematica di qualità
 3. La sfida dell'evoluzione delle pratiche di insegnamento
 4. La sfida della valutazione
 5. La sfida insegnante: condizione, formazione iniziale e continua
 - 5.1. La sfida quantitativa
 - 5.2. La sfida qualitativa
 6. La creazione di sinergie tra i diversi attori
 - 6.1. Un coinvolgimento più ampio e meglio riconosciuto dei matematici
 - 6.2. Una migliore collaborazione tra comunità
 7. Organizzare le complementarità tra educazione formale e non formale
 8. L'orientamento e la regolazione delle evoluzioni
 9. La sfida tecnologica
 10. le collaborazioni
 11. La sfida della diversità
 - 11.1. Le questioni linguistiche
 - 11.2. Le questioni di genere
 12. La sfida della ricerca
- In sintesi
- Bibliografia

APPENDICI ⁽¹⁾

Annexe 1. Liens entre enseignement mathématique et enseignement scientifique dans les programmes allemands SINUS

Annexe 2. Quarante années de recherches sur l'enseignement des mathématiques et les mathématiques comme activité humaine pour tous – L'institut Freudenthal

Annexe 3. Problèmes et défis de l'enseignement des mathématiques: le cas des Philippines

Annexe 4. La formation continue des enseignants au Japon – Le concept de «Lesson Study»

Annexe 5. Le perfectionnement professionnel des enseignants en mathématiques au Brésil: problèmes structureaux, initiatives et espoirs

Annexe 6. Systématiser les connaissances sur la formation des enseignants en mathématiques – Étude de l'IEA sur la formation des enseignants en mathématiques TEDS

Annexe 7. Recherches sur la formation des enseignants en mathématiques en Afrique du Sud et en Afrique australe

Annexe 8. Promouvoir l'excellence de l'enseignement des mathématiques – Le National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics (NCETM)

Annexe 9. Pourquoi les mathématiques? Une exposition internationale itinérante

Annexe 10. «Objectif Mathématiques» – Les Maisons des mathématiques en Iran

Annexe 11. Collaboration entre mathématiciens, enseignants et didacticiens – L'exemple du réseau des IREM 103

Annexe 12. L'émergence de communautés d'enseignants – l'exemple de Sesamath

Annexe 13. Encourager l'interaction et la collaboration «Teacher Education Around the World: Bridging Policy and Practice», un volet du IAS/Park City Mathematics Institute – Institute for Advanced Study, Einstein Drive, Princeton, New Jersey

Annexe 14. La reconstruction d'une communauté mathématique au Cambodge

Annexe 15. Liste des participants à la réunion d'experts

⁽¹⁾ Le appendici al testo originale francese non sono state tradotte. Si riportano qui i titoli per il lettore interessato.

1. – Introduzione

L'insegnamento delle scienze e l'insegnamento della matematica condividono un gran numero di valori e devono affrontare problemi e sfide in grande parte comuni. Esistono tuttavia delle differenze tra questi insegnamenti che spiegano l'esistenza, dopo un'introduzione comune, di due testi distinti. In particolare, la necessità di un insegnamento della matematica per tutti gli alunni a partire dall'inizio della scolarità obbligatoria non è messa in discussione, contrariamente a ciò che accade per l'insegnamento delle scienze. Questo insegnamento non è necessariamente assicurato in modo soddisfacente ma è accessibile a tutti gli alunni normalmente scolarizzati.

Se la necessità di un insegnamento della matematica nella scolarità di base è oggetto di consenso, questo non significa che l'insegnamento in sé non sia oggetto di dibattito. Le valutazioni sia nazionali che internazionali mostrano che alla fine della scolarità di base, le conoscenze e competenze matematiche di molti allievi non sono quelle attese⁽²⁾. In più, le disparità osservate tra paesi così come in seno ad un stesso paese sono preoccupanti. E anche tra gli alunni che ottengono dei risultati soddisfacenti nelle valutazioni, numerosi sono quelli che comunque non apprezzano la matematica e non vedono l'interesse di consacrarvi un tale spazio scolastico⁽³⁾. Queste constatazioni mostrano che le ambizioni espresse nell'introduzione di questo testo sono lontane dall'essere realizzate, e che non è il numero pur importante di bambini e di giovani non scolarizzati, il solo ostacolo alla loro realizzazione anche se questo ostacolo è reale.

In questo contesto, ciò che ci si deve attendere da un insegnamento della matematica di qualità per tutti non va da sé ed è oggetto di dibattiti ricorrenti. Consideriamo dunque importante precisare la nostra posi-

⁽²⁾ Sul piano internazionale, ci si potrà riferire ai risultati degli inchieste TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) dell'ISC (International Study Center), PISA (Programme for International Student Assessment), dell'OCDE, così come all'inchiesta SERCE (Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo) condotta dal LLECE (Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación) in America Latina.

⁽³⁾ Questo fenomeno è stato messo in evidenza particolarmente per gli studenti dei paesi asiatici nelle inchieste TIMSS e PISA.

zione su questo punto, prendendo particolarmente in considerazione ciò che, nelle visioni della matematica e del loro insegnamento così come nelle pratiche educative, rende spesso problematica un'educazione matematica di qualità per tutti.

È per esempio unanimemente riconosciuto che la matematica è onnipresente nel mondo d'oggi, in particolare negli oggetti tecnologici che ci circondano o nei processi di scambio e di comunicazione, ma lo è generalmente in maniera invisibile. Questa invisibilità rende problematica la percezione dell'interesse a sviluppare una cultura matematica, al di là degli apprendimenti più elementari, quelli che concernono numeri, misure e calcolo. È importante che la scolarità di base contribuisca a togliere questa invisibilità, e questo tanto più che i bisogni attuali di ciò che si chiama "littéracie matematica" ⁽⁴⁾ vanno ben al di là dei bisogni tradizionalmente associati al "saper contare". Ritorneremo su questo punto nel seguito di questo documento.

Inoltre numerose incomprensioni condizionano la visione dell'attività matematica, risultanti dall'immagine che ci si è fatti del matematico. Questa attività è spesso ancora percepita come condotta quasi esclusivamente in maniera solitaria, staccata dai problemi del mondo reale ed indipendente dai mezzi tecnologici. Inoltre essa è anche spesso percepita come un'attività puramente deduttiva che si traduce nella produzione successiva di teoremi per mezzo di prove formali dal rigore perfetto. Infine si considera spesso la matematica non come una scienza accessibile a tutti ma in cui le ragazze, in particolare, incontrerebbero più difficoltà dei ragazzi nel loro apprendimento ⁽⁵⁾. Queste numerose incomprensioni condizionano l'insegnamento e fanno ostacolo ad un'educazione matematica di qualità per tutti.

⁽⁴⁾ NdT: Si è scelto di tradurre l'espressione «littéracie mathématique» con «littéracie matematica», mantenendo il termine «littéracie» francese presente nel documento originale. Tale neologismo è stato coniato a partire dall'analogo inglese "litteracy", utilizzato nel progetto OCSE PISA. Nelle traduzioni italiane del progetto OCSE PISA è presente il termine "competenza". Tuttavia tradurre il termine «littéracie» con «competenza» oppure «alfabetizzazione» avrebbe reso difficile la comprensione di taluni passaggi di questo documento. Il lettore interessato farà riferimento alla vasta letteratura relativa a questo progetto.

⁽⁵⁾ Per la questione di genere, ci si potrà riferire all'importante bibliografia accessibile sul sito dell'organizzazione internazionale IOWME (International Organisation of Women and Mathematics Education -<http://extra.shu.ac.uk/iowme/>).

Un'educazione matematica di qualità deve permettere di forgiarsi un'immagine positiva ed appropriata della matematica. Perciò, deve essere fedele alla matematica, sia per quanto riguarda i contenuti che le pratiche. Essa deve permettere agli allievi di comprendere a quali bisogni risponde la matematica che è insegnata loro, ed anche che la matematica che è insegnata loro si inserisce in una lunga storia che si coniuga con quella dell'umanità⁽⁶⁾. Apprendere la matematica, è anche darsi i mezzi per accedere a questo patrimonio culturale. Deve permettere agli allievi di comprendere che la matematica non è un corpus di conoscenze fossilizzate ma al contrario una scienza viva in piena espansione, la cui evoluzione si nutre ed è nutrita da quella di altri campi scientifici. Deve inoltre permettere agli allievi di vedere la matematica come una scienza che può e deve contribuire alla risoluzione dei maggiori problemi a cui il mondo d'oggi è confrontato come è stato ricordato nell'introduzione. Un'educazione matematica di qualità deve perciò essere sostenuta da una visione della matematica come una scienza viva, connessa col mondo reale, aperta alle relazioni con le altre discipline, apertura non limitata del resto alle sole discipline scientifiche. Essa dunque, in particolare, deve permettere agli allievi di cogliere il potere della matematica come strumento di modellizzazione per comprendere ed agire sul mondo⁽⁷⁾.

Un'educazione matematica di qualità deve dare anche una visione non snaturata delle pratiche di coloro che producono o utilizzano la matematica. L'attività matematica è in effetti un'attività umana dalle molteplici sfaccettature molto lontana dagli stereotipi che le sono attribuiti nel pensiero comune. Un'educazione matematica di qualità, dunque, ha il dovere di riflettere questa diversità, attraverso differenti contenuti matematici che essa fa incontrare progressivamente agli allievi: porre

⁽⁶⁾ Per la dimensione storica, ci si potrà riferire ai lavori del gruppo internazionale HPM (History and Pedagogy of Mathematics - <http://www.elab.edc.uoc.gr/HPM/>) ed allo studio della Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (ICMI) dedicato a questo tema (Fauvel & van Maanen, 2000)

⁽⁷⁾ Per la modellizzazione, ci si potrà riferire ai lavori del gruppo internazionale CTMA (the International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications - <http://www.ictma.net>) ed allo studio ICMI dedicato a questo tema (Blum & al., 2007)

dei problemi o riformularli per renderli accessibili ad un lavoro matematico, modellizzare, esplorare, congetturare, sperimentare, rappresentare e formulare, sviluppando in tal modo dei linguaggi specifici, argomentare e dimostrare, sviluppare dei metodi, elaborare dei concetti e collegarli in seno a spazi strutturati, scambiare e comunicare... Una tale educazione deve permettere di vivere l'esperienza matematica come un'esperienza al tempo stesso individuale e collettiva, e fare sentire ciò che apporta lo scambio, il dibattito con altri. Deve sapere stimolare attraverso delle sfide e contemporaneamente coltivare dei valori di solidarietà. Essa deve mostrare anche una scuola aperta sul mondo e per ciò essere in fase con le pratiche matematiche, scientifiche e sociali fuori dalla scuola, e, in particolare, sapersi appoggiare in modo pertinente sui mezzi tecnologici che danno forma⁽⁸⁾ a queste pratiche.

Mettere l'educazione matematica in fase con questi valori, e farlo nel quadro di un insegnamento per tutti, rappresenta una sfida che i sistemi educativi devono raccogliere se vogliono che l'insegnamento matematico, in coerenza e complementarietà con l'insegnamento delle scienze, contribuisca, così come deve, tanto allo sviluppo scientifico, economico e sociale, e alla cittadinanza, quanto alla realizzazione personale degli individui. Raccogliere una tale sfida presuppone delle evoluzioni sostanziali rispetto allo stato attuale dell'educazione matematica. Nel seguito di questo documento, insistiamo sulle evoluzioni che ci sembrano più decisive ed indichiamo un certo numero di condizioni necessarie a queste evoluzioni. Noi proviamo anche a mostrare la loro fattibilità appoggiandoci su esperienze didattiche⁽⁹⁾ condotte in contesti diversi dal punto di vista economico, sociale e

⁽⁸⁾ NdT: Non esiste un verbo italiano che permetta di tradurre opportunamente il verbo francese "instrumenter" anche per le connotazioni che tale verbo ha assunto negli ultimi anni in seguito ad alcune teorie di psicologia cognitiva come quella elaborata tra altri da Rabardel. Per brevità, in questo documento, scegliamo dunque di tradurlo con il verbo "dare forma" nel senso di "dare forma e struttura dunque caratterizzare e supportare".

⁽⁹⁾ NdT : Nel testo francese, le "esperienze didattiche" sono chiamate "réalisations". In italiano, una traduzione letterale, avrebbe rischiato di non essere comprensibile. Si sarebbe potuto tradurre il termine anche con "implementazioni" o "realizzazioni sperimentali", ma questo avrebbe costituito un appesantimento inutile.

culturale. Questi esempi ci servono anche per insistere sul fatto che, se dei principi comuni possono guidare l'azione, non vi è un'unica via per le evoluzioni positive e non vi sono nemmeno soluzioni che si possano trasporre direttamente da un contesto educativo ad un altro. Infine essi mostrano che l'ottenimento di miglioramenti positivi e duraturi necessita della continuità dell'azione politica, che si appoggi sulla collaborazione organizzata di tutti gli attori implicati e su forme di azione che, rompendo con le pratiche usuali, assicurino una condivisione adeguata delle iniziative e delle responsabilità.

2. – Educazione matematica e littéracie

Assicurare la littéracie matematica di tutti i giovani non è la sola ambizione dell'educazione matematica nella scolarità di base, ma è l'ambizione fondamentale e prioritaria. Assicurare questa competenza è permettere lo sviluppo di quelle conoscenze e competenze matematiche necessarie all'integrazione ed alla partecipazione attiva in una data società così come l'adattamento alle sue prevedibili evoluzioni. È anche rendere possibile l'accesso ad un mondo più ampio di quello in cui si è stati educati, è formare degli individui capaci di trovare il loro posto nel mondo attuale, di realizzarsi e di aiutare ad accorgersi delle grandi sfide che l'umanità deve affrontare oggi e che sono state ricordate nell'introduzione di questo testo: salute, ambiente, energia, sviluppo. Questa ambizione, lontano dall'essere realizzata oggi, costituisce una prima sfida per l'educazione matematica di base.

2.1 – *La sfida della littéracie matematica*

La sfida da raccogliere è anzitutto quella dell'accessibilità alla scolarità di base. Le ambizioni espresse nel Millennium Goal che prevede l'accesso alla scolarità di base di tutti i giovani nel 2015, sono lontane dall'essere soddisfatte poiché oggi ancora 75 milioni di bambini non sono iscritti nelle scuole primarie. La sfida quantitativa di questa accessibilità generalizzata, in particolare, pone, quella dell'esistenza di un numero sufficiente di insegnanti qualificati per tali allievi, su cui

ritorneremo in seguito. L'impatto di tale sfida non potrà essere minimizzato. In questo paragrafo, vorremmo concentrarci tuttavia su un'altra sfida, quella dell'adattamento della scolarità di base alle attese attuali in termini di *littéracie* matematica. Come abbiamo menzionato più sopra, in effetti queste attese si sono evolute considerevolmente a causa dell'evoluzione tecnologica, economica e sociale, e continueranno ad evolversi nell'avvenire.

Oggi non basta più dominare i saperi di base che concernono i numeri e le grandezze che hanno costituito per molto tempo la condizione matematica dell'integrazione sociale. La cultura numerica nella quale sono immerse sempre più le società attuali, le nuove responsabilità che devono assumersi gli individui, tanto a titolo personale che in qualità di cittadini. L'incertezza crescente che segna il mondo in cui viviamo, necessitano di una revisione dell'idea di *littéracie* matematica. La conoscenza del numero, del sistema decimale di numerazione e delle operazioni aritmetiche, la capacità di risolvere i problemi che riguardano il campo dell'aritmetica elementare, come lo sono, ad esempio, i problemi di proporzionalità, la conoscenza dei sistemi di grandezze e delle forme geometriche usuali nel piano e nello spazio, hanno costituito per molto tempo il contenuto dell'insegnamento della matematica per tutti. Essi restano le basi inevitabili della *littéracie* matematica. Così come ieri, il bambino deve imparare ad acquisire il senso dei numeri e delle formule, imparare a stimare, misurare, giocare con gli ordini di grandezza. Tuttavia, da una parte, queste basi non bastano più per rispondere ai bisogni attuali che sono fortemente aumentati, dall'altra, non si può pensare al loro stesso apprendimento, senza prendere in considerazione le condizioni sociali attuali di utilizzo di queste conoscenze, né i nuovi mezzi che le tecnologie offrono per tale apprendimento.

Oggi, la *littéracie* matematica deve, in particolare, permettere agli individui di comprendere, analizzare, criticare molteplici dati, la cui presentazione coinvolge sistemi di rappresentazione diversi e complessi, numerici, simbolici e grafici, spesso in interazione. Essa deve permettere loro di fare delle scelte ragionevoli, basandosi sulla comprensione, la modellizzazione, la predizione, e di controllare i loro effetti, in situazioni inattese e spesso caratterizzate di incertezza. È

dunque particolarmente essenziale che ogni individuo, durante la sua scolarità di base in matematica, sia progressivamente messo a contatto con la complessità del mondo numerico attuale, apprenda ad orientarsi e ad agire, familiarizzi con la diversità dei modi di rappresentazione che sono utilizzati. È importante che si acquisti progressivamente familiarità con i modi di ragionamento probabilistico e statistico che sono necessari per mettere il pensiero matematico al servizio della comprensione dei numerosi fenomeni che, nelle scienze come nella vita sociale, fanno intervenire l'incerto ed il rischio.

Bisogna anche prendere in considerazione, come abbiamo sottolineato più sopra, gli utilizzi reali e le potenzialità offerte dalle attuali tecnologie, all'apprendimento. Gli utilizzi reali ci mostrano, in particolare, un'evoluzione innegabile delle pratiche sociali del calcolo. Il calcolo è sempre una componente chiave della littéracie matematica, ma è sempre più supportato e realizzato da una varietà di strumenti. La sua organizzazione ed il suo controllo necessitano, in queste condizioni, di accresciute capacità di stima, di ragionamento basato sulle proprietà dei numeri e delle operazioni, di nuovi equilibri tra calcolo esatto e calcolo approssimato, tra calcolo scritto e calcolo mentale. Preparare adeguatamente gli allievi a queste forme attuali del calcolo attraverso la scolarità di base richiede di riconsiderare la visione del suo apprendimento, e particolarmente di riconsiderare gli obiettivi che si danno all'apprendimento delle tecniche operatorie. Certamente non c'è, a questa domanda, sorgente di dibattiti inesauribili, una risposta uniforme indipendente della realtà dei contesti e dei mezzi che sono socialmente disponibili per l'attività matematica.

Ci sembra ugualmente importante sottolineare che l'insegnamento della matematica non è il solo a contribuire allo sviluppo delle conoscenze necessarie alla littéracie matematica. Deve farlo in stretta interazione con gli altri insegnamenti, in particolare scientifici, arrivando a superare le chiusure esistenti tra le discipline, come sottolineato nell'introduzione. Nondimeno l'insegnamento della matematica gioca in questo campo un ruolo chiave, perché è il solo a considerare gli oggetti e le tecniche come oggetti di studio in sé ed ad organizzare sistematicamente la progressione delle conoscenze che li riguardano. Questo punto di vista è sviluppato, per esempio, nel lavoro *Mathema-*

tics and Democracy. The case for Quantitative Literacy pubblicato nel 2001 dal National Council on Education and the Disciplines negli USA (Steen, 2001) anche se si riconosce che l'insegnamento della matematica negli USA non adempie appunto a questa missione. Si sottolinea anche che la nozione di littéracie non deve essere concepita come qualcosa di fisso, indipendente del tempo e dello spazio. I bisogni che sono espressi in termini di *quantitative literacy* sono, molto chiaramente, quelli della società americana attuale o di società comparabili a quest'ultima, sia in termini di sviluppo che in termini di scelte sociali. Ma, senza minimizzare le differenze culturali, ci sembra importante sottolineare che, dovunque nel mondo, si osserva un'evoluzione ed un incremento dei bisogni in termini di littéracie matematica che devono essere presi in considerazione nella concezione di un'educazione matematica di qualità per tutti. Peraltro, non si dovrebbe dimenticare che l'educazione matematica di base, nella sua componente di littéracie matematica, deve permettere di anticipare le evoluzioni future delle società ed aprire a tutti l'accesso ad altri mondi.

2.2 – *Al di là dello sviluppo di una littéracie matematica*

Anche per quanto riguarda la scolarità matematica di base, la sola ambizione di un'educazione matematica di qualità per tutti non può essere ridotta allo sviluppo di una littéracie matematica, nel senso definito più sopra. L'educazione matematica, compresa quella nella scolarità obbligatoria, deve rispondere anche ad altri bisogni. Essa deve permettere a tutti di percepire l'incredibile avventura umana che costituisce lo sviluppo della matematica attraverso i secoli ed i continenti, un'avventura inseparabile della storia dell'umanità. Deve permettere a tutti di interrogarsi sul ruolo che ha giocato, e che gioca oggi, la matematica nello sviluppo scientifico, tecnologico, economico e sociale. Essa deve permettere agli allievi di esercitare al loro livello i mezzi del pensiero matematico che sono l'astrazione, la generalizzazione, il ragionamento logico e la dimostrazione, la simbolizzazione matematica, e di comprenderne la potenza. Deve anche preparare la formazione successiva di tutti coloro che necessiteranno della mate-

matica avanzata nella vita professionale, e suscitare l'interesse dei giovani per queste professioni, che, si sa, costituisce oggi in numerosi paesi una reale sfida.

Per questo, è importante dare della matematica un'immagine di scienza viva, ancorata al mondo e in interazione con gli altri campi scientifici. Questo impone di tener conto di un certo numero di caratteristiche della matematica attuale ricordate da László Lovász, il presidente dell'Unione Matematica Internazionale, all'epoca della conferenza organizzata a Lisbona nel 2007 sul futuro dell'educazione matematica in Europa: la crescita esponenziale della comunità matematica e delle attività di ricerca in questo campo, le nuove aree di applicazione della matematica e la loro influenza crescente, i nuovi strumenti dell'attività matematica che sono i computer e le tecnologie dell'informazione e della comunicazione, così come le nuove forme di attività matematica (Lovász, 2007). Questo impone, in particolare, di considerare le interfacce della matematica, al di là della sua interazione storica con la fisica: interfacce, in particolare, con le scienze informatiche, l'economia, la biologia; le evoluzioni interne alla matematica stessa, con l'importanza crescente assunta da campi come la matematica discreta e le probabilità, e l'evoluzione delle interazioni tra domini matematici diversi. Questo impone anche di prendere in considerazione l'evoluzione delle pratiche matematiche strettamente legate all'evoluzione tecnologica: l'importanza e la visibilità crescente della parte sperimentale della matematica; il contributo della tecnologia al calcolo, alla visualizzazione ed alla simulazione, il rafforzamento ed una visione rinnovata della dimensione algoritmica della matematica; senza dimenticare la gestione ragionata ed efficace della attuale pluralità delle sorgenti di informazione e delle forme possibili di lavoro collaborativo.

Come tenere conto di queste evoluzioni nella scolarità di base? Di fronte alla diversità della matematica attuale si impongono necessariamente delle scelte. Come sottolineava László Lovász nella conferenza già citata che riguardava l'educazione matematica in senso globale, esse non sono evidenti e sono rese ancor più difficili da un contesto ove la tendenza generale è alla riduzione delle ore dedicate agli insegnamenti di matematica. Aggiungeremo che esse sono ancora più delicate allorquan-

do si tratta della scolarità di base dove gli allievi, per affrontare questa matematica attuale, dispongono solamente di conoscenze limitate e spesso ancora fragili. Ma, salvo perpetuare l'idea troppo largamente diffusa presso gli allievi che la matematica è una scienza morta, bisogna imperativamente raccogliere questa sfida, trovare degli equilibri soddisfacenti tra gli sviluppi delle competenze matematiche attese da tutti e l'apertura alle delle domande attuali ben scelte. Questi cambiamenti devono effettuarsi senza opporre la matematica tradizionale a quella attuale, e riconsiderando l'insegnamento degli ambiti tradizionali affinché rifletta meglio la realtà delle visioni e delle pratiche matematiche attuali, ed organizzando una migliore interazione tra insegnamento della matematica ed insegnamento delle scienze. Non c'è un'unica risposta a questa sfida, ma ciò che importa è fare delle scelte coerenti e realistiche, tenuto conto dei contesti e delle culture ⁽¹⁰⁾. Queste scelte devono essere improntate ad una visione dell'evoluzione recente della scienza matematica pensata prendendo in considerazione le sue possibili implicazioni sull'insegnamento. Questa visione deve essere resa accessibile, attraverso forme adatte, agli insegnanti. Del resto è l'ambizione del progetto "Félix Klein" il quale è stato recentemente lanciato congiuntamente dall'IMU (International Mathematical Union) e dall'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) ⁽¹¹⁾.

2.3 – *Apprendimento di contenuti / Sviluppo di competenze*

Le considerazioni che precedono impongono che ci si interroghi al tempo stesso sui contenuti dell'insegnamento e sulle attese precise che si hanno in termini di apprendimento nei confronti di questi contenuti.

⁽¹⁰⁾ Il lavoro (Kahane, 2001) risultante dei lavori della Commission de Réflexion sur l'Enseignement Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques en France così come i diversi documenti elaborati da questa commissione ed accessibili sul sito della Société Mathématique de France (smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/) costituiscono l'esempio di una tale riflessione condotta nel contesto francese.

⁽¹¹⁾ <http://www.mathunion.org/icmi/other-activities/klein-project/introduction/>. Questo progetto si indirizza in un primo tempo agli insegnanti della scuola secondaria, ma si prevede di estenderlo all'insieme degli insegnanti di matematica.

Da questo punto di vista, oggi giorno c'è consenso nel ritenere che ciò che ci si attende, sono anzitutto delle conoscenze operative che si esprimono nella capacità di mobilitare strumenti matematici per fare fronte a situazioni nuove e potenzialmente problematiche, e non solo la capacità di riprodurre delle procedure apprese in contesti molto vicini di quelli del contesto di apprendimento e relativamente stabili. C'è anche consenso nel ritenere che si tratta di conoscenze sufficientemente solide e strutturate tali da servire da base ad ulteriori apprendimenti, visto il carattere cumulativo della conoscenze matematiche. La riflessione in questo campo è stata accompagnata da sforzi sistematici per esplicitare ciò che si intende per *littéracie* matematica, in particolare provando a determinare delle categorie che trascendono questo o quel contenuto preciso, per aiutare a comprendere più globalmente il pensiero matematico e la sua possibile progressione. Per esempio, Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) definiscono ciò che chiamano “mathematical proficiency” come il risultato dell'intreccio di cinque dimensioni: “conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning and productive disposition”. Nel modello KOM sviluppato in Danimarca (Niss, 2002) che è servito da base alla riforma dell'educazione secondaria attuata nel 2005 in questo paese ed ha ispirato anche il concetto di “mathematical literacy” del programma PISA dell'OECD⁽¹²⁾ (OECD, 1999, 2006) le competenze matematiche sono definite come la capacità di agire con intelligenza e in modo adeguato nelle situazioni che comportano una certa forma di sfida matematica. Sono identificate otto principali competenze, distinte ma non indipendenti⁽¹³⁾. Il grado di sviluppo di ciascuna è,

⁽¹²⁾ NdT: Nel testo originale e in bibliografia si fa riferimento alle pubblicazioni e indagini OCSE utilizzando l'acronimo OECD. Per rispetto a tale scelta si è deciso di mantenere tale acronimo anche nella traduzione italiana.

⁽¹³⁾ Tali competenze trasversali sono le seguenti: 1. padroneggiare le modalità caratteristiche di porre e risolvere delle questioni matematiche; 2. poter riconoscere, formulare e risolvere dei problemi matematici; 3. poter comprendere, valutare e costruire dei modelli matematici; 4. poter seguire, analizzare, valutare e costruire dei ragionamenti matematici; 5. poter gestire diverse rappresentazioni di fenomeni matematici; 6. poter padroneggiare i formalismi matematici; 7. poter comunicare in ed a proposito di matematica; 8. potere utilizzare gli strumenti adeguati all'attività matematica.

per un dato individuo, valutato secondo tre dimensioni: la padronanza che ha dei suoi aspetti caratteristici, l'ampiezza del campo dei contesti e delle situazioni in cui può applicarli, ed il livello tecnico di queste applicazioni.

Questa attenzione portata fino all'esplicitazione delle competenze trasversali si è tradotta nei diversi paesi in una presa di distanza delle descrizioni curriculari tradizionali in termini di contenuti in favore delle descrizioni strutturate intorno all'acquisizione di tali competenze trasversali. Ci sembra oggi importante trovare un equilibrio ed un'articolazione ragionevole nella definizione della scolarità di base in matematica all'interno di due tipi di descrizione. Le definizioni usuali in termini di meri contenuti lasciano generalmente implicito ciò che è esattamente atteso come competenza in uscita dell'insegnamento, e falliscono nel mostrare chiaramente come gli apprendimenti specifici in questo o quel campo si inseriscano in un obiettivo più generale di sviluppo di competenze matematiche. In tal senso, esse non favoriscono le evoluzioni ed gli adattamenti necessari menzionati più sopra. Ma le definizioni in termini di competenze generali, anch'esse non bastano, da sole, a costruire un'organizzazione curriculare coerente e rispettosa dell'epistemologia dei campi considerati, che renda visibili le ragioni di essere delle nozioni e delle tecniche insegnate e che prenda in considerazione il carattere cumulativo della conoscenze matematiche. Come sottolineato in (Winslow, 2005) la matematica è il risultato di una storia umana nei confronti della quale una visione in termini di sviluppo di competenze trasversali ha poco senso. La costruzione di un curriculum per la scolarità di base ha il dovere di coniugare, in modo equilibrato, i due approcci complementari che sono l'approccio in termini di contenuti e l'approccio in termini di competenze trasversali, ed è lì una sfida reale, avendo mostrato l'esperienza, la difficoltà di trovare degli equilibri soddisfacenti. In particolare, è importante far apparire chiaramente il modo con cui l'insegnamento dei diversi campi matematici contribuisca allo sviluppo di competenze trasversali, senza cancellare la specificità di questi contributi. Le forme di ragionamento e di dimostrazione in matematica sono, per esempio, al di là delle comuni basi della logica, strettamente dipendenti dai

campi nei quali esse si sviluppano. Nella teoria dei numeri, in geometria, in calcolo delle probabilità e in statistica, l'efficacia del ragionamento non si fonda sugli stessi schemi.

2.4 – *Educazione matematica per tutti / Educazione matematica di qualità*

La scolarità di base deve assicurare, l'abbiamo sottolineato, un'educazione matematica di qualità per tutti gli allievi. Queste due ambizioni — assicurare un'educazione matematica di qualità ed assicurare un'educazione matematica per tutti gli allievi — sono percepite spesso come due ambizioni inconciliabili. Lo sono, obiettivamente, se non si dispone di un numero sufficiente di insegnanti qualificati per assicurare, in condizioni soddisfacenti, la generalità dell'accesso alla scolarità di base, che è purtroppo il caso di numerosi paesi in via di sviluppo. Ma c'è anche spesso, dietro questa visione, l'idea che un'educazione matematica di qualità sia, necessariamente, un'educazione selettiva e che la scelta di rivolgersi a tutti gli allievi non può che realizzarsi a detrimento di questa qualità. Superare questa visione, spesso saldamente ancorata nella cultura, è una reale sfida per l'insegnamento della matematica. Essa è lungi dall'essere superata. Tuttavia i risultati delle valutazioni internazionali (OECD, 2004, 2007) tendono a mostrare che, tra i sistemi educativi che riescono meglio, figurano sistemi che hanno fatto la scommessa di un'educazione inclusiva nella scolarità di base. La diversità delle scelte educative dei paesi considerati mostra, ancora una volta, che la soluzione a questo problema non è unica. Tale diversità mostra anche ciò che offrono, alla comprensione delle diverse possibilità date, gli studi comparativi che si sono moltiplicati in questi ultimi anni e che sono stati largamente motivati da queste valutazioni (cfr. per esempio (Kaiser, Luna & Huntley, 1999), (Leung, Graf & Lopez-Real, 2006)). Sottolineiamo infine che una concezione inclusiva della scolarità di base non esclude di mettere in campo, per rafforzare l'interesse degli allievi per la matematica e permetter loro di impegnarsi più intensamente se lo desiderano, delle attività parascolastiche, come ne esistono in molti paesi.

3. – La sfida dell'evoluzione delle pratiche di insegnamento

Superare le sfide menzionate nella parte precedente presuppone un'evoluzione delle pratiche di insegnamento che permetta il loro adeguamento alle ambizioni espresse. Gli studi delle pratiche degli insegnanti condotte nel quadro di ricerche didattiche e di formazioni, così come le inchieste condotte dalle istituzioni internazionali, (Commissione Europea, 2007), mostrano tuttavia che ciò per il momento non è quanto accade. L'insegnamento della matematica nella scolarità di base è troppo spesso ancora un insegnamento poco stimolante:

- concepito come un insegnamento formale, incentrato sull'apprendimento di tecniche e sulla memorizzazione di regole la cui la ragion d'essere non s'impone agli allievi;
- nel quale gli oggetti matematici sono introdotti senza che si sappia a quali bisogni rispondano, né come si articolino con quelli preesistenti;
- in cui i legami col mondo reale sono deboli, generalmente troppo artificiali per essere convincenti e le applicazioni stereotipate;
- in cui le pratiche sperimentali, le attività di modellizzazione sono rare;
- in cui un utilizzo pertinente della tecnologia resta ancora relativamente raro;
- dove gli allievi hanno poca autonomia nel loro lavoro matematico e sono molto spesso relegati a compiti di riproduzione.

Ricerche e sperimentazioni che mostrano che altre alternative sono possibili, produttive in termini di apprendimento e che danno agli allievi un'altra visione della matematica e della loro capacità di afferrare il significato di questa scienza, si sono tuttavia accumulate col passare degli anni (cfr. per esempio (Bishop & al., 1996, 2003), (Lester, 2007) per delle visioni sintetiche). Esse poggiano, generalmente, su delle prospettive socio-costruttiviste dell'apprendimento (Ernest, 1998). Esse pongono l'accento sullo spazio da accordare alla risoluzione di problemi nell'insegnamento della matematica, sia nel caso in cui tali problemi siano utilizzati per motivare e preparare l'introduzione di nuove nozioni, sia nel caso in cui essi permettano di manipolare e sfruttare tali nozioni dopo che esse sono state introdotte. L'apprendimento è ivi percepito

come un'operazione progressiva di presa di significato, attraverso l'incontro di situazioni problematiche accuratamente scelte ed organizzate, grazie alla mediazione di sistemi di rappresentazione e di artefatti diversi, non essendo gli oggetti matematici direttamente accessibili ai nostri sensi. La dimensione sociale di questo apprendimento, attraverso le interazioni tra gli allievi e le interazioni tra insegnante ed allievi, è fortemente sottolineata, così come l'importanza da attribuire all'esperienza acquisita dagli allievi fuori dalla scuola.

Tuttavia, numerosi studi mostrano anche che, quando gli insegnanti provano a modificare le loro pratiche per accordarle con questo discorso socio-costruttivista dominante, proponendo agli allievi, per esempio, dei problemi più aperti, che si suppongono possano indurre in essi un atteggiamento di ricerca, i risultati non sono necessariamente soddisfacenti. In tali studi, ciò che spesso si osserva, è un'attività degli allievi che, anche quando sia correttamente orientata e ragionevolmente produttiva sul piano matematico — il che non è non sempre il caso —, essa è difficilmente sfruttata dall'insegnante, se quest'ultimo non è stato specificamente formato a ciò. La condivisione delle responsabilità matematiche tra insegnante ed allievi, che sottende a questa visione dell'apprendimento, è in effetti lontana dall'essere scontata. Essa richiede dei compiti ed una guida adeguata degli allievi, così come un contratto didattico appropriato (Brousseau, 1997). Richiede degli insegnanti capaci di far fronte all'imprevisto e di identificare il potenziale matematico di idee e produzioni degli allievi non necessariamente previste. Richiede, infine, degli insegnanti capaci di aiutare gli allievi a collegare i risultati che hanno ottenuto in un contesto particolare con le conoscenze attese dall'istituzione, al tempo stesso nel loro contenuto e nella loro forma di espressione. La perizia⁽¹⁴⁾ richiesta agli insegnanti va, in tal modo, ben oltre ciò che è in gioco nelle pratiche di insegnamento tradizionali.

(14) NdT : Nella versione italiana si è esitato se tradurre il termine "expertise" con "perizia" oppure con "competenze professionali". Alla fine si è optato per la prima possibilità perché si è deciso di mantenere in un qualche modo la generalità dell'espressione francese, a fronte del rischio di una caratterizzazione, non presente nel testo originale, del termine "competenze" che in italiano rimanda ad una precisa e vasta letteratura in merito.

Tutto ciò rinvia all'inevitabile questione della formazione degli insegnanti e a quella delle risorse che sono messe a disposizione di questi ultimi per permetter loro di fare evolvere le loro pratiche. Vi ritorneremo più avanti in questo testo ma vorremmo ora sottolineare alcuni punti. Una formazione adeguata dovrebbe, in particolare, aiutare più efficacemente gli insegnanti ad elaborare delle consegne capaci di permettere delle attività di ricerca matematicamente produttive, entro i vincoli che sono quelli della classe, aiutarli più efficacemente a sostenere il loro ruolo di guida e di mediatore per gestire queste attività in modo matematicamente efficace. Peraltro, occorre pensare le evoluzioni delle pratiche in termini di dinamiche, badando a mantenere una distanza ragionevole tra il vecchio e il nuovo, inoltre esse devono essere sostenute da risorse idonee che permettano di mettere in moto e sostenere le evoluzioni richieste. Troppo spesso ancora, ciò che è proposto agli insegnanti durante la loro formazione o attraverso le risorse che sono messe a loro disposizione, sono dei modelli di pratiche troppo lontane dalle loro pratiche reali per potere essere assimilati senza essere snaturati. Peraltro, l'incremento dei bisogni di perizia tanto matematica quanto didattica che le nuove pratiche richiedono è largamente sottovalutato. Tutto questo contesto rende difficile, agli insegnanti, la percezione dei benefici che possono ricavare dai cambiamenti raccomandati e non li incita ad intraprendere le evoluzioni auspiccate.

Attraverso queste constatazioni è posta la questione dell'adeguamento dei modelli di formazione e di diffusione delle innovazioni e ricerche sulla quale ritorneremo ulteriormente.

Prima di passare al punto seguente, vorremmo tuttavia insistere sul fatto che, anche se il modello socio-costruttivista brevemente descritto più sopra ispira oggi, più o meno esplicitamente, molte innovazioni e azioni educative, può, a seconda dei contesti sociali e culturali, incarnarsi in forme sensibilmente differenti. Peraltro, non è il solo modello possibile (Sierpinska & Lerman, 1996). È ciò che mostrano degli studi come lo Studio ICMI concernente il confronto tra le culture di insegnamento nei paesi dell'Asia di tradizione confuciana e quelle dei paesi occidentali (Leung, Graf & Lopez-Real, 2006) o The Learner's Perspective Study (Clarke, Keitel & Shimizu, 2006), (Clarke,

Emanuelsson, Jablonka & Chee Mok, 2006), che confrontano le pratiche di insegnanti riconosciuti come esperti in dodici paesi.

4. – La sfida della valutazione

La valutazione è necessaria all'insegnamento della matematica, tanto nella sua dimensione formativa, per orientare gli apprendimenti nel corso della loro realizzazione, quanto nella sua dimensione sommativa, per situare i risultati ottenuti rispetto alle attese e valutare lo scarto tra il curriculum atteso ed il curriculum raggiunto. Essa deve perciò sapere coniugare dimensioni interne ed esterne, qualitative e quantitative, ed appoggiarsi su metodologie e strumenti appropriati. Su questo punto c'è un consenso tale che ci sembra inutile insistere troppo.

Una questione essenziale in questo campo è quella di rendere coerenti i mezzi di valutazione con gli obiettivi attesi dall'insegnamento, nel rispetto dei valori che sottendono quest'ultimo. Questo rendere coerente è fondamentale, vista l'influenza che la valutazione esercita sugli insegnamenti, e rappresenta una reale sfida per l'insegnamento della matematica. Non è facile perché, come l'abbiamo sottolineato, un'educazione matematica di qualità mira ad ottenere obiettivi diversi, in termini di conoscenze, di competenze specifiche e trasversali, di atteggiamenti nei confronti della disciplina. Essa mette in gioco delle capacità individuali ma anche delle capacità di natura più collettiva. Essa deve mettere in conto il fatto che la risoluzione di problemi, che costituisce una parte essenziale dell'attività matematica, è un'attività che, per essere valutata correttamente, necessita di una durata opportuna. Deve essere in accordo con le pratiche in ciò che riguarda gli strumenti tecnologici autorizzati. E, nella prospettiva, che è quella dell'UNESCO, di una scolarità di base di qualità accessibile a tutti e foriera di realizzazione e sviluppo personale, deve essere concepita per permettere a ciascuno di esprimere al meglio le sue conoscenze e competenze, stando attenta alla diversità delle forme che queste conoscenze e competenze possono prendere.

Tutto questo presuppone una valutazione multiforme, non potendo, alcuna forma di valutazione, pretendere di soddisfare l'insieme di

queste condizioni. In particolare, è importante riconoscere che le attività di ricerca, le attività sperimentali, le realizzazioni di progetti matematici, le attività di sintesi, di esposizione, i lavori di natura storica, le realizzazioni pratiche, che devono avere il loro posto in un'educazione matematica di qualità per tutti e che dunque devono anche essere valutate per vedere riconosciuta istituzionalmente la loro importanza, necessitano di forme di valutazione adeguate.

Esiste oggi una forte tendenza a moltiplicare le valutazioni e, per assicurare la loro "scientificità", a permettere dei passaggi su larga scala minimizzando i costi, basandoli su delle serie di domande a scelta multipla o con risposta breve, possibilmente trattabili in modo automatico⁽¹⁵⁾. Tali valutazioni possono essere concepite molto bene e da esse si possono trarre delle informazioni molto interessanti, come mostrano numerose esperienze realizzate. Esse tuttavia limitano l'apprezzamento di ciò che possa essere una formazione matematica di qualità, riducendo tale apprezzamento a ciò che gli strumenti utilizzati, sottomessi a numerosi vincoli, permettono di valutare. Ci sembra perciò pericoloso limitare a questo solo tipo i modi di valutazione degli allievi e, a maggior ragione, farne degli strumenti privilegiati di orientamento di un sistema educativo. La storia recente ci fornisce esempi di effetti perversi prodotti da tali dispositivi (Schoenfeld, 2007), (Keitel, 2008). In particolare ci mostra che, nei contesti più fragili, l'insegnamento può deviare verso un insegnamento centrato sulla preparazione dei test che, qualunque sia la qualità di questi ultimi, è inconciliabile con un'educazione matematica di qualità come noi la preconizziamo.

La valutazione ha un ruolo cruciale da svolgere nella messa in atto e nella riuscita generalizzazione di un'educazione matematica di qualità per tutti. È importante che essa sia posta al servizio di questa causa, che il suo adeguamento ai valori dell'educazione matematica, la sua qualità, i suoi effetti diretti ed indiretti siano controllati accuratamente.

⁽¹⁵⁾ Precisiamo che non tutte le valutazioni su grande scala sono di questo tipo.

5. – La sfida insegnante: condizione, formazione iniziale e continua

Gli insegnanti sono l'elemento cardine di ogni evoluzione positiva e duratura dei sistemi educativi. Essi costituiscono oggi la principale sfida di un'educazione matematica di qualità per tutti. I problemi posti su questo piano sono molteplici, al tempo stesso quantitativi e qualitativi.

5.1 – *La sfida quantitativa*

La sfida quantitativa è una sfida che non tocca allo stesso modo tutte le parti del mondo. In certi paesi, la professione degli insegnanti nella scolarità di base è una professione che beneficia di una buona immagine sociale, gli stipendi sono accettabili se non attraenti, le condizioni di esercizio del mestiere sono buone, tutto ciò contribuisce a fare di questa una professione attraente. Questa situazione è lontano dall'essere generale in seno agli stessi paesi evoluti, come mostrano i seri problemi di assunzione e di permanenza in servizio osservati in un certo numero di essi (OECD, 2005). La disaffezione per gli studi matematici all'università ne accresce la gravità, generando dei veri circoli viziosi (Holton, 2009). I problemi maggiori si pongono tuttavia nei paesi in via di sviluppo dove molto spesso si sommano debole attrattiva del mestiere, numero insufficiente di studenti uscenti dall'insegnamento secondario capaci di orientarsi verso questa professione e numero insufficiente di formatori per assicurare la preparazione di questi ultimi. A questo s'aggiunge, in un certo numero di questi paesi, un esodo importante di studenti o anche di insegnanti già formati a vantaggio di paesi che offrono migliori prospettive professionali. Questo fenomeno riguarda particolarmente un buon numero di paesi africani, come mostra lo studio sullo stato della formazione degli insegnanti in dodici paesi voluto dal simposio AFRICME1 (Adler & al., 2007). Gli autori di questo studio aggiungono alle difficoltà sopra menzionate quelle dovute alla mortalità conseguente all'AIDS e sottolineano che i problemi incontrati, anche se riguardano la professione di insegnante in generale, toccano specialmente gli insegnanti di matematica poiché numerose altre prospettive d'impiego si offrono loro, negli stessi paesi o all'estero.

Il problema quantitativo dell'assunzione e della permanenza in servizio degli insegnanti è dunque importante e, per risolverlo, bisogna considerare i problemi dell'insegnamento della matematica al di là della semplice scolarità di base. Come sottolineato nel recente rapporto: *Mathematics in Africa: Challenges and Opportunities*, realizzato dal Developing Countries Strategic Group dell'International Mathematical Union per il John Templeton Foundation (DCSG, 2009): "To concentrate on primary education alone will be futile if there are no qualified teachers; there can be no qualified teachers without skilled mentors to teach the teachers.⁽¹⁶⁾". Una tale constatazione presuppone dei flussi sufficienti nell'insegnamento secondario superiore ed a livello degli studi universitari. Superare questa sfida necessita un riconoscimento sociale della professione all'altezza della sua importanza reale ed un miglioramento delle condizioni di lavoro degli insegnanti. Tali miglioramenti passano necessariamente attraverso degli sforzi sistematici fatti per permettere a tutti gli insegnanti di accedere a delle reti, delle risorse, delle formazioni e di scambiare e collaborare con altri.

5.2 – *La sfida qualitativa*

La seconda sfida è quella della qualità, perché è chiaro che, in molti paesi, la qualità della formazione è lontano dall'essere soddisfacente anche laddove il problema quantitativo non si pone affatto. Come abbiamo sottolineato, le attese nei confronti della scolarità di base si sono sostanzialmente accresciute. Rispondere a queste domande accresciute richiede degli insegnanti solidamente formati tanto sul piano matematico quanto su quello didattico e pedagogico. La scolarità

⁽¹⁶⁾ "Concentrarsi sulla sola educazione primaria sarà futile se non ci saranno insegnanti qualificati; non ci saranno insegnanti qualificati senza abili formatori per gli insegnanti". L'importanza da accordare alla formazione al di là della semplice scolarità di base era anche al centro della conferenza "Higher education and research in developing countries", organizzata congiuntamente per il Niels Henrik Abele Memorial Fund e dall'Oslo Center for Peace and Human Rights, ad Oslo, nel febbraio 2008: <http://www.dnva.no/c26889/artikkel/vis.html?tid=27509>

di base, particolarmente nei suoi primi anni ma, in un certo numero di paesi, anche nella sua integralità, è assicurato da insegnanti che, in grande maggioranza, hanno loro stessi conosciuto delle difficoltà nei loro apprendimenti matematici ed hanno un'immagine negativa della disciplina. In più, si tratta allora spesso di insegnanti polyvalenti e le ore dedicate alla formazione scientifica, e a fortiori alla formazione matematica, costituiscono solamente una frazione limitata della loro formazione. Tutto questo contesto rende il problema della loro formazione ancor più delicato.

Queste caratteristiche della scolarità di base impongono una riflessione approfondita sulle conoscenze necessarie all'esercizio di questa professione e sul modo con cui queste conoscenze possono essere sviluppate. Nessuno potrebbe negare che l'esercizio della professione richiede una conoscenza approfondita della matematica mirata all'insegnamento. Un primo punto importante è che la matematica della scuola dell'obbligo non si limita più, come abbiamo sottolineato, alla matematica insegnata a quello stesso livello anche pochi decenni fa. Troppo spesso, la formazione matematica dei futuri insegnanti è una formazione che trascura queste evoluzioni e dunque non li prepara a dare nel loro insegnamento una visione della matematica come scienza viva che interagisce con numerosi campi. Questo è particolarmente dannoso se si mira, come è stato sottolineato a più riprese in questo documento, a un insegnamento della matematica capace di costruire delle interazioni produttive con l'insegnamento delle scienze. Un secondo punto, ancora più importante, è quello della specificità della matematica per l'insegnamento. Lo studio delle formazioni e delle pratiche degli insegnanti ha portato ad interrogarsi sull'efficacia di formazioni matematiche che non tengono sufficientemente conto dei bisogni matematici specifici della professione (Even & Ball, 2009). Difatti oggi c'è un largo consenso nel considerare che queste conoscenze non si limitano alla conoscenze matematiche accademiche, da una parte, e a delle conoscenze pedagogiche, dall'altra, conoscenze il cui l'apprendimento potrebbe realizzarsi in modo consecutivo o giustapposto. Diverse categorizzazioni sono state proposte per descrivere i differenti tipi di conoscenze in gioco, più o meno tutte derivate del modello iniziale di Shulman (1986) distinguendo

“content knowledge” (conoscenze disciplinari), “pedagogical content knowledge” (conoscenze didattiche) e “pedagogical knowledge” (conoscenze pedagogiche). È il caso, per esempio, della categorizzazione sviluppata da (Ball & al., 2005) a partire da studi di caso molto numerosi. Essa distingue quattro categorie di conoscenza: “common content knowledge” (le conoscenze matematiche che essenzialmente puntano al curriculum), “specialized content knowledge” (quelle utilizzate dall’insegnante e che superano quelle del curriculum stesso), “knowledge of students and contents” (conoscenze riguardanti gli allievi) e “knowledge of teaching and content” (conoscenze riguardanti l’insegnamento e la sua organizzazione). Ciò su cui questi autori insistono è che bisogna vedere la matematica per l’insegnamento come una specifica forma di matematica applicata la cui conoscenza non deriva automaticamente di una formazione matematica universitaria, pur approfondita. Essi lo dimostrano proponendo a dei matematici universitari e a degli insegnanti esperti del primario, alcuni compiti professionali propri di un insegnante che riguardano numeri decimali e frazioni. La formazione matematica degli insegnanti deve tener conto di questa specificità.

Un secondo punto di consenso è il fatto che una formazione degli insegnanti di qualità deve esplicitamente farsi carico di mettere in relazione questi differenti tipi di conoscenze, con l’aiuto di dispositivi idonei, e di attualizzarli nella pratica. Certo, tutte le messe in relazioni non possono essere pienamente comprese fin dalla formazione iniziale, come mostrano lavori come quelli di Ma (1999) e Stevenson & Steigler (2000), ma il processo deve essere abbozzato proprio a partire da essa. Esso presuppone la collaborazione organizzata di differenti competenze: matematica, didattica, pedagogica. In questo intreccio di conoscenze che contribuiscono alla perizia professionale dell’insegnante, le conoscenze didattiche devono giocare un ruolo particolare, in virtù della loro posizione di interfaccia tra il disciplinare e il professionale.

È altrettanto chiaro oggi che la professione di insegnante è una professione per la quale una formazione iniziale, qualunque sia la sua qualità, deve essere completata da una regolare formazione continua. Questo dato di fatto è dovuto a parecchi fattori. Da una parte, come

sottolineato sopra, un certo numero di relazioni tra le differenti forme di conoscenze, di rapporti tra conoscenze e pratiche, non possono acquisire un senso durante una formazione iniziale, a causa della mancanza di un'esperienza sufficiente di insegnamento; d'altra parte, l'insegnamento della matematica deve adattarsi senza sosta all'evoluzione della scienza matematica e del suo rapporto con il mondo, all'evoluzione delle domande sociali, all'evoluzione delle condizioni e dei mezzi di insegnamento, e in particolare dei mezzi tecnologici, così come all'evoluzione delle conoscenze che emergono dai differenti campi di ricerca che si interessano all'insegnamento ed all'apprendimento. In troppi paesi, oggi, la formazione continua degli insegnanti è, nel migliore dei casi, una formazione arrangiata, senza visione a lungo termine, senza coerenza, senza legame di continuità con la formazione iniziale. E questa situazione ipotoca molto seriamente la possibilità di miglioramenti duraturi della qualità dell'insegnamento. Tuttavia, l'evoluzione delle conoscenze sulle pratiche degli insegnanti e sulle modalità delle loro possibili evoluzioni (Krainer & Wood, 2008), (Vandebrouck, 2008) permette oggi di comprendere meglio come la formazione può servire l'evoluzione delle pratiche di cui abbiamo sottolineato il bisogno in precedenza, permettendo agli insegnanti di fare vivere nelle loro classi un'attività matematica di qualità.

Abbiamo messo in evidenza in questa parte del testo delle grandi linee consensuali e dei punti su cui è particolarmente importante concentrare gli sforzi. Come nel caso delle pratiche, non c'è un'unica via di sviluppo e l'attenzione maggiore deve essere posta alle caratteristiche contestuali e culturali. Certi paesi hanno una tradizione di formazione degli insegnanti che integra per tutto il cursus di formazione i differenti tipi di apprendimenti richiesti, mentre altri vivono in una tradizione dove la precedenza è anzitutto data alla formazione disciplinare; certi paesi hanno insegnanti polivalenti per tutta la scuola dell'obbligo mentre in altri, questo vale unicamente dei primi anni della scolarità, ed in altri ancora gli allievi hanno diversi insegnanti fin dai primi anni di scolarità. Non si possono pensare in modo identico le dinamiche evolutive in questi differenti sistemi ma, ancora una volta, una tale situazione rende particolarmente interessanti i paragoni che aiutano a comprendere meglio i punti forti e punti deboli di questo o

quel sistema, ed ad immaginare delle evoluzioni che, dall'interno del sistema, non si saprebbero considerare. Da questo punto di vista lo studio ICMI pubblicato recentemente e riguardante *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics* (Even & Ball, 2009)⁽¹⁷⁾ è istruttivo per la diversità degli esempi ed delle analisi che esso fornisce.

Una questione che vorremmo in fine affrontare in questa parte è quella della valutazione della qualità delle formazioni e dell'impatto delle formazioni sull'apprendimento degli allievi. Si tratta qui di questioni complesse e mentre si dispone di moltissimi lavori concernenti la valutazione degli alunni in matematica, la ricerca è, in questo campo, ancora emergente. Si tratta di una ricerca difficile perché, come per tutte le valutazioni, gli strumenti elaborati non sono neutri. Essi costituiscono il filtro attraverso cui le formazioni sono valutate. Presuppongono delle ipotesi sulle conoscenze e sulle competenze attese da una tale formazione, così come delle metodologie per "misurare" se queste siano o meno disponibili al termine della formazione. Se si mira ad ottenere dei campioni coerenti, la raccolta di dati non si può effettuare nel contesto stesso dell'esercizio della professione ma si può, al più, simularlo. È in questo spirito che si è sviluppata la prima indagine dell'IEA sulla formazione degli insegnanti (Tatto & al., 2008)⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾. La ricerca dei collegamenti tra le conoscenze e competenze degli insegnanti e gli apprendimenti dei loro allievi pone più avanti la questione della discriminazione tra fattori e della comprensione, al di là dell'identificazione di correlazioni o implicazioni statistiche, dei meccanismi capaci di spiegare i legami eventualmente ottenuti. Ecco di nuovo, ci troviamo di fronte ad una

⁽¹⁷⁾ Presentiamo in appendice il caso del Lesson Study, un dispositivo di formazione continua degli insegnanti che esiste in Giappone e su cui è stata posta l'attenzione quando i risultati nelle valutazioni internazionali TIMSS hanno attirato l'attenzione sulle pratiche di insegnamento e di formazione in questo paese. NdT: Le appendici al documento non sono state tradotte e possono essere reperite al sito <http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776f.pdf>.

⁽¹⁸⁾ Presentato nell'appendice del testo originale.

⁽¹⁹⁾ NdT: Le appendici al documento non sono state tradotte e possono essere reperite al sito <http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776f.pdf>.

forma di ricerca relativamente nuova e difficile (Hill & al., 2007). Se oggi si può sperare che essa produca dei risultati interessanti, è anche perché, come abbiamo sottolineato più sopra, la ricerca, qualitativa, sulle pratiche degli insegnanti insegnate ed i loro determinanti ha sostanzialmente progredito durante l'ultimo decennio.

6. – La creazione di sinergie tra i diversi attori

Quanto precede mostra chiaramente che la sfida di un'educazione matematica di qualità per tutti necessita della creazione di sinergie tra una molteplicità di competenze, quelle dei matematici, degli insegnanti, dei formatori di insegnanti e, in particolare, dei didattici. Questo creazione di sinergie non è evidente. Eppure l'investimento dei matematici nelle questioni di educazione ha una lunga tradizione, almeno in certi paesi, come testimonia, per esempio, la storia dell'ICMI, che ha celebrato nel 2008 il suo primo centenario ⁽²⁰⁾. La commissione stessa è stata creata al quarto congresso internazionale dei matematici a Roma nel 1908 ed il suo primo presidente è stato il grande matematico Félix Klein. Egli era l'autore delle celebri opere "Mathématiques élémentaires d'un point de vue avancé", destinate agli insegnanti e aventi come obiettivo il superamento delle discontinuità, esistenti già all'epoca, tra matematica universitaria e matematica del ciclo secondario. Durante un secolo, l'ICMI si è posto come interfaccia tra matematica ed educazione matematica, cercando di rafforzarne le sinergie, ottenendo vari successi (Artigue, 2009). Oggi resta ancora molto da fare. Due sfide ci sembrano, in particolare, da raccogliere: da un lato, quella di un impegno più ampio da parte dei matematici e del relativo riconoscimento, dall'altro, quella di una migliore collaborazione tra matematici, didattici, insegnanti e formatori. Queste sfide sono particolarmente delicate da raccogliere in molti paesi in via di sviluppo dove si accumulano molteplici difficoltà: un numero molto limitato di matematici che già devono fronteggiare un gran numero di altre responsabilità e istanze, un numero molto importante di allievi ed

⁽²⁰⁾ Vedi le informazioni sul sito storico dell'ICMI <http://www.icmihistory.unito.it/>

insegnanti coinvolti a priori, e, al contempo, l'assenza di una tradizione comparabile a quella che è stata qui evocata.

6.1 – *Un coinvolgimento più ampio e meglio riconosciuto dei matematici*

Esiste, come abbiamo sottolineato, in numerosi paesi una tradizione di impegno dei matematici nelle questioni relative all'educazione primaria e secondaria, ed alla formazione degli insegnanti, ma l'energia di questi ultimi si è spesso concentrata sull'individuazione e l'accompagnamento dei futuri talenti matematici. Ne è testimonianza il loro impegno nell'organizzazione di varie competizioni matematiche e, in particolare, delle Olimpiadi di matematica. Questa scelta è comprensibile, ma la riuscita di un'educazione matematica di qualità per tutti necessita un impegno più ampio dei matematici, che si rivolga ad un pubblico meno selezionato e che assuma forme diverse dall'organizzazione di competizioni. Esistono oggi numerosi esempi di tali iniziative ed è ciò che ha condotto l'ICMI a lanciare un studio intitolato *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom* (Barbeau & Taylor, 2009). In appendice noi presentiamo alcuni esempi, ma essi non rendono giustizia della ricchezza e della varietà delle azioni esistenti alle quali i matematici contribuiscono o possono contribuire in favore di un'educazione matematica di qualità per tutti. Ciò detto, resta il fatto che questo impegno dei matematici si realizza il più delle volte a titolo personale, è poco incoraggiato istituzionalmente e poco valorizzato. Affinché sia altrimenti, occorrerebbe rompere con un sistema in cui si valorizza professionalmente solo la produttività in quanto ricercatore, mentre questo è ciò che purtroppo generalmente avviene oggi. Questa situazione è particolarmente problematica per i giovani matematici che, d'altro canto sono particolarmente efficaci nel testimoniare, agli allievi, che la matematica è una scienza viva.

6.2 – *Una migliore collaborazione tra comunità*

La seconda sfida è quella di una migliore collaborazione tra le differenti comunità incaricate di occuparsi di questioni di educazione,

particolarmente quelle dei matematici, degli insegnanti e dei didattici. Da questo punto di vista, durante gli ultimi decenni, lo sviluppo e l'istituzionalizzazione della didattica come campo di ricerca accademica, sulla base tra l'altro, delle disillusioni generate dal periodo delle matematiche moderne, hanno modificato gli equilibri tradizionali. Durante l'ultimo decennio, in un certo numero di paesi, l'insoddisfazione relativamente alla qualità dell'insegnamento della matematica si è tradotta in una sfiducia o addirittura in un rifiuto riguardo ad una ricerca le cui idee, pur non essendo veramente messe in opera nelle pratiche scolastiche, si trovavano riflesse in un certo numero di documenti curriculari. Questo dato di fatto è particolarmente vero nei paesi in cui matematici e ricercatori in educazione matematica vivono in istituzioni separate e collaborano poco, ivi compreso nella formazione degli insegnanti. Questa situazione ci sembra profondamente dannosa per l'insegnamento della matematica. Tuttavia, essa, non è ineluttabile e dunque è importante far meglio conoscere i successi in questo campo per trarne ispirazione⁽²¹⁾.

7. – Organizzare le complementarità tra educazione formale e non formale

Abbiamo insistito in precedenza sulla necessità, per l'insegnamento della matematica nella scolarità di base, di essere un insegnamento stimolante, di matematica viva, in relazione con il mondo in cui vivono gli allievi e con le domande che l'umanità si pone attualmente. Abbiamo fatto anche riferimento alle esperienze realizzate che sembrano mostrare che questo sia possibile, sotto differenti forme, in funzione delle scelte effettuate e dei contesti sociali e culturali. Ma nel quadro vincolante dell'organizzazione scolastica usuale al quale si aggiunge molto spesso una forte separazione disciplinare, non tutto è possibile. Ecco perchè è importante anche creare, nell'istituzione scolastica, degli spazi di libertà, per attività più aperte che rispondano ad un'altra

⁽²¹⁾ In appendice, presentiamo alcuni esempi: il caso degli IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) in Francia, il caso del Park City Mathematics Institute negli USA (vedi nota 17).

temporalità ed un'altra gestione didattica. Ecco perchè è altresì importante appoggiarsi sulle numerose possibilità di apprendimento che sono oggi offerte ai giovani, al di là della scuola. Questo costituisce una sfida ulteriore perché, se delle esperienze realizzate esistono, queste riguardano per ora una porzione molto limitata di allievi della scolarità di base. Il quindicesimo Studio ICMI già citato dà un'idea della molteplicità di esperienze esistenti, organizzandole in sedici differenti categorie e presentando ciascuna categoria mediante esempi precisi. Trattandosi questo di un testo prodotto per l'UNESCO, ci sembra peraltro importante menzionare, in maniera speciale, la mostra itinerante UNESCO "Perché la matematica?", di cui tre copie percorrono il mondo dal 2005. Essa è ora raddoppiata mediante una mostra virtuale e le sue presentazioni sono generalmente accompagnate da manifestazioni matematiche diverse che attirano non solo classi ma anche un pubblico molto vasto ⁽²²⁾.

8. – L'orientamento e la regolazione delle evoluzioni

Realizzare l'ambizione di un'educazione di qualità per tutti presuppone dunque delle evoluzioni innegabili, e, per pensare queste evoluzioni, si hanno a disposizione numerose implementazioni sperimentali. Resta il fatto che i processi di trasformazioni su larga scala, anche se basati su sperimentazioni preliminari, sono spesso deludenti. L'orientamento e la regolazione delle evoluzioni dei sistemi educativi sono un'impresa particolarmente delicata. Pur non fornendo orientamenti certi per l'avvenire, l'analisi delle esperienze passate ci mostra almeno gli errori che sarebbe bene evitare di ripetere. Ne citiamo alcuni qui di seguito, attribuendo un'importanza particolare al caso dei paesi in via di sviluppo.

Una critica severa ma utile del modo in cui sono stato condotte spesso le evoluzioni curriculari in matematica nei paesi in via di sviluppo, per iniziativa o col sostegno di agenzie internazionali, è, per

⁽²²⁾ Il sito dell'esposizione <http://www.mathex.org/MathExpo/> fornisce notizie dettagliate su questa esposizione ed offre anche la possibilità di scaricare l'esposizione virtuale interattiva disponibile in quattro lingue: francese, inglese, spagnolo e portoghese.

esempio, quella condotta da Bienvenido F. Nebres (Nebres, 2009)⁽²³⁾, basata sull'esempio del suo paese, le Filippine. Egli le descrive come costituite di quattro fasi: apporto di un nuovo approccio all'insegnamento generato da una teoria elaborata in occidente (matematiche moderne, "back to basis", risoluzione di problemi, costruttivismo...); sviluppo di manuali e risorse basati su questi approcci; studi pilota in piccola scala e in contesti particolari, con risultati sempre positivi; implementazione su scala nazionale. L'implementazione è corredata da una formazione degli insegnanti che ubbidiscono al modello detto "a cascata", con una formazione sostanziale ai massimi livelli, ma generalmente ridotta a due o tre settimane quando si arriva al livello degli insegnanti incaricati di attuare la riforma nelle loro classi. Il nuovo curriculum spazza via quello vecchio, gli insegnanti devono adattarsi brutalmente con una formazione minimale, i risultati sono cattivi e qualche anno più tardi un nuovo progetto curricolare è lanciato di nuovo per rimediare alla situazione. Egli oppone a questa situazione caricaturale il ciclo delle riforme curriculari in Giappone, un ciclo che, secondo la descrizione che egli ne fa, è spalmato su un periodo di 10-12 anni, e concede ampio spazio alla regolazione a partire dalla raccolta sistematica delle reazioni degli insegnanti, della loro analisi, sintesi e discussioni a tutti i livelli del sistema educativo, per pensare e decidere le evoluzioni necessarie. Per rompere con questa situazione, nelle Filippine, sono state elaborate alcune strategie in una serie di importanti riforme lanciate da una decina di anni nel quadro del *Third Elementary Education Project* condotto negli anni 1998-2006 e del *Synergeia Foundation*⁽²⁴⁾. Queste analisi e questi sforzi, come quelle

⁽²³⁾ Il lettore potrà consultare (Atweh, Clarkson & Nebres, 2003) per un'analisi più globale.

⁽²⁴⁾ Queste strategie ed i loro effetti positivi sono presentati in modo dettagliati in (Nebres, 2009). Completiamo questa informazione mediante quella fornita in appendice (vedi nota 17) da Merle C. Tan, Direttrice del National Institute for Science and Mathematics Education Development, University of the Philippines. Le azioni che sono descritte mirano oggi ad andare più lontano nello sviluppo di un'educazione matematica di qualità per tutti rispondendo ai bisogni descritti in questo documento. Questi sforzi sono sostenuti dalle collaborazioni internazionali, come la partecipazione al *Learner' Perspective Study*.

di molti altri, mettono in luce un certo numero di principi importanti per orientare tali azioni. Purtroppo essi sono raramente considerati, sia che si tratti di riforme apportate nei paesi in via di sviluppo come di quelle nei paesi sviluppati:

- l'importanza da attribuire al contesto politico, economico, sociale e culturale; malgrado l'accumularsi di contro-esempi, troppo spesso persiste ancora l'illusione che si possa "prendere in prestito" un dispositivo, un'organizzazione curriculare che "funziona" in un altro contesto per migliorare il proprio, e che riproducendo l'organizzazione, si possa riprodurre ciò che ne assicura la riuscita. Un adattamento riuscito, quando è possibile, presuppone un lavoro di trasposizione improntata alla comprensione delle caratteristiche e dei processi che assicurano la riuscita dell'organizzazione data;

- l'importanza della durata: in materia di educazione, l'esperienza mostra che i progetti che hanno un impatto sostanziale e duraturo sono necessariamente progetti che richiedono un'azione coerente nello spazio di almeno un decennio;

- l'importanza di pensare i cambiamenti, sia che si tratti di cambiamenti curriculari o di cambiamenti di pratiche, in termini di evoluzione a partire dall'esistente e non di rivoluzione; in particolare, le evoluzioni delle pratiche devono essere pensate in termini di dinamiche di evoluzione e bisogna prevedere l'accompagnamento di queste dinamiche seguendo dei modelli diversi da quello detto "a cascata", su una durata sufficiente. Il lavoro con gli insegnanti sul campo e la formazione di persone-risorse a livello locale sono cruciali affinché queste dinamiche si sviluppino e i cambiamenti ottenuti perdurino al di là della durata del loro accompagnamento istituzionale;

- l'importanza di rompere coi cambiamenti imposti dall'alto e di prevedere un giusto equilibrio tra gli impulsi istituzionali e gli apporti degli attori sul campo, in altri termini di equilibrare nella concezione ed nell'orientamento delle evoluzioni i processi "top-down" e "bottom-up"; l'importanza in questo quadro di implicare nel cambiamento il più possibile le comunità, al di là della scuola;

- l'importanza di installare dei processi di valutazione e di regolazione; gli effetti di un'azione su un sistema di insegnamento raramente sono quelli previsti;

- l'importanza di preparare accuratamente i cambiamenti di scala e di controllarne gli effetti. Le realizzazioni sperimentali pilota sono utili, ma, da sole, costituiscono solo raramente le chiavi di un cambiamento di scala riuscito.

Rispettare tali principi dovrebbe permettere di ottenere dei cambiamenti sostanziali e duraturi e di evitare i fenomeni altalenanti ai quali i sistemi educativi sono purtroppo troppo spesso sottomessi.

9. – La sfida tecnologica

L'abbiamo sottolineato fin dall'inizio di questo testo: non si può pensare un'educazione di qualità per tutti, oggi, senza tener conto della dimensione tecnologica. Ma abbiamo insistito principalmente sul fatto che la nozione di littéracie matematica doveva tener conto dei mezzi tecnologici che informano le pratiche sociali oggi e, particolarmente, trattandosi della scolarità di base, le pratiche di calcolo. Abbiamo anche accennato all'arricchimento degli spazi di dati e di mezzi di rappresentazione, di interazione tra rappresentazioni prodotte dalle tecnologie numeriche, così come il modo di cui l'evoluzione tecnologica influenza lo sviluppo della matematica stessa, in particolare a causa delle interazioni tra scienze matematiche e scienze informatiche.

Ciò rappresenta solo molto parzialmente ciò che costituisce oggi la sfida tecnologica, e noi desidereremmo completare questa visione, mettendo più in particolare l'accento sui cambiamenti aperti ad opera dell'evoluzione tecnologica in materia di formazione, di collaborazione e di scambio, di accesso e di produzione di risorse educative. Infatti, all'inizio, la discussione intorno alle potenzialità della tecnologia per l'insegnamento della matematica si è incentrata sull'uso di calcolatrici o di software, sia concepiti per fini educativi, sia concepiti per fini professionali e poi convertiti in strumenti pedagogici, come i software di calcolo formale o i fogli elettronici. Questo fenomeno è visibile, per esempio, nel primo Studio ICMI su questo tema – di cui una seconda edizione è stata pubblicata dall'UNESCO nel 1992 (Cornu & Ralston, 1992). Nella scolarità di base, si tratta principalmente delle calcolatrici, fogli elettronici e software di geometria dinamica, così come di micro-

mondi come Logo. Come mostra chiaramente il secondo Studio ICMI sull'argomento (Hoyles & Lagrange, 2009), le tecnologie hanno arricchito in modo innegabile le possibilità di sperimentazione, di visualizzazione, di simulazione; hanno modificato il rapporto con il calcolo e con le figure geometriche. Esse hanno permesso di avvicinare la matematica scolastica al mondo esterno permettendo di trattare dati più complessi e problemi più realistici, ma, malgrado le potenzialità innegabili che esse offrono all'insegnamento ed all'apprendimento della matematica, l'effetto delle numerose sperimentazioni positive esistenti è rimasto, fino qui, limitato, anche negli stessi sistemi educativi che ne hanno fortemente promosso l'utilizzazione. I lavori recenti che riguardano le pratiche degli insegnanti in ambienti informatici iniziano a fornire degli elementi per comprendere questo stato di fatto e per prendere in considerazione delle formazioni realmente adatte ai bisogni, ma la questione di un utilizzo efficace generalizzato di queste tecnologie, nella scolarità di base, in matematica, resta per ora insoluta.

Dalle recenti evoluzioni, legate allo sviluppo di strumenti d'apprendimento collaborativi, ad internet ed alle tecnologie mobili, emergono delle possibilità e degli effetti di natura del tutto nuova: la possibilità di sostenere con la tecnologia delle forme collaborative di apprendimento matematico per gli allievi, l'accesso on line e gratuito ad una varietà di risorse, di nuove possibili organizzazioni per la formazione a distanza, il supporto alla produzione in collaborazione e la mutualizzazione delle risorse, il supporto all'emergere di comunità di insegnanti e di ricercatori, il supporto ad attività in rete, a scambi a distanza tra allievi e insegnanti. Come ha ben mostrato il secondo studio ICMI già citato (Hoyles & Lagrange, 2009), nuove possibilità si aprono così per l'apprendimento, per facilitare l'accesso alle risorse ed alla formazione, lottare contro l'isolamento, favorire la diffusione delle idee e delle innovazioni, fare vivere i valori di solidarietà che sono quelli dell'UNESCO. Vi è qui un'apertura che sembra particolarmente promettente per tutti, ed in particolare per i paesi in via di sviluppo. È decisamente importante trarre vantaggio da queste possibilità per l'insegnamento della matematica, tanto più che sembra che la loro integrazione non ponga le stesse difficoltà di quella delle tecnologie menzionate più sopra, perché non condizionano le pratiche allo stesso modo.

Desidereremmo collegare questa questione della tecnologia a quella delle risorse per l'insegnamento. Un'educazione matematica di qualità per tutti non può realizzarsi senza la produzione di risorse di qualità: risorse per gli allievi e risorse per gli insegnanti. Le difficoltà ricorrenti incontrate nella diffusione delle conoscenze acquisite sull'insegnamento e sull'apprendimento, nella diffusione delle innovazioni, portano ad interrogare sia la concezione delle risorse che quella dei processi di diffusione. Abbiamo sottolineato nella terza parte i problemi posti dalle risorse considerate necessarie a sostenere l'evoluzione delle prassi, ma troppo distanti dalle prassi abituali per collocarsi nella zona prossimale di sviluppo degli utenti potenziali. Un altro problema risiede nel fatto che le risorse esistenti sono spesso delle risorse che non sono pensate in funzione del lavoro necessario all'adattamento dell'insegnante al suo particolare contesto di insegnamento, o che gli insegnanti non sono efficacemente preparati ad effettuare tale lavoro. In effetti, si ha oggi una conoscenza alquanto insufficiente delle pratiche di documentazione degli insegnanti che non permette di guidare in modo soddisfacente la formazione. Le ricerche che emergono in questo campo (Gueudet & Trouche, 2009)⁽²⁵⁾ mostrano tuttavia cambiamenti rapidi suscitati dagli sviluppi tecnologici, in particolare la moltiplicazione delle risorse accessibili on line, il supporto e l'incoraggiamento al lavoro collaborativo. Innegabilmente, ci sono in questo ambito, delle nuove possibilità per la concezione e la diffusione delle risorse e, senza dubbio, ci sono contemporaneamente, anche, differenti necessità di formazione per gli insegnanti.

10. – Le collaborazioni

La sfida di un'educazione matematica di qualità per tutti non si vincerà senza il potenziamento delle collaborazioni. Quando si pensa alla collaborazione, si pensa tradizionalmente a quella Nord-sud. Queste

⁽²⁵⁾ Presentiamo in appendice il caso dell'associazione Sesamath che ben rappresenta le evoluzioni in corso da questo punto di vista (vedi nota 17).

collaborazioni effettivamente sono essenziali e, per quanto riguarda la matematica ed il suo insegnamento, sono numerose. Qui vorremmo tuttavia sottolineare anche l'importanza da accordare più largamente in materia di educazione matematica alle collaborazioni regionali. Come già sottolineato, l'insegnamento della matematica è ancorato ai contesti e alle culture. I miglioramenti di questo insegnamento devono necessariamente venire a patti con questi contesti e queste culture. Ecco perché l'ambito delle collaborazioni regionali gioca un ruolo essenziale. Così l'ICMI, per esempio, si è dotata progressivamente di strutture regionali. Il primo, il CIAEM⁽²⁶⁾, è stata creata in America latina fin dal 1962; SEACME⁽²⁷⁾ l'ha seguito nel Sud-Est asiatico a partire dal 1976, si è poi allargato nel 1998 per diventare EARCOME; le due ultime strutture create sono AFRICME⁽²⁸⁾ nell'Africa anglofona ed EMF, l'Espace Mathématique Francophone, un altro modo, linguistico in questo ultimo caso, di beneficiare delle affinità culturali e di fare agire la solidarietà tra centri e periferie. La riflessione sui modi migliori per attivare le solidarietà regionali ed internazionali è analizzata in modo dettagliato nel documento (DCSG, 2009) per quanto riguarda l'Africa⁽²⁹⁾. L'accento è messo sulla complementarietà tra i differenti tipi di collaborazione, l'importanza di costituire delle reti e di fornire a studenti e ricercatori africani i mezzi per trovare risorse sufficienti a livello regionale se si vuole limitare la fuga dei cervelli. Come espresso più sopra, questo documento insiste sulle nuove possibilità che l'evoluzione tecnologica offre oggi per realizzare tali obiettivi.

⁽²⁶⁾ CIAEM : Comité Interamericano de Educación Matemática.

⁽²⁷⁾ SEACME : South East Asia Conference on Mathematics Education; EARCOME: East Asia Regional Conference in Mathematics Education.

⁽²⁸⁾ AFRICME : Africa Regional Congress of ICMI on Mathematical Education

⁽²⁹⁾ Rinviamo anche al rapporto di sintesi della conferenza di Oslo già menzionato, (<http://www.dnva.no/e26889/binfil/download.php?tid=27685>) che sottolinea anch'esso l'interesse delle collaborazioni regionali citando, in particolare per quanto riguarda la matematica, UMALCA (Unión Matemática de América Latina y el Caribe) ed AMMSI (African Mathematical Millennium Science Initiative) per l'Africa, così come il ruolo giocato dalle strutture sostenute dall'UNESCO come l'ICTP (International Centre for Theoretical Physics) ed il CIMPA (Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées) la cui azione in corso in Cambogia è presentata in allegato (vedi nota 17).

11. – La sfida della diversità

Differenti forme di diversità costituiscono una sfida per un insegnamento matematico di qualità per tutti: in particolare, diversità socio-economica, culturale, linguistica e di genere. Di seguito, senza sottovalutare la molteplicità di queste forme, né gli effetti delle loro interazioni, ci concentriamo sulle questioni linguistiche e le questioni di genere. Abbiamo peraltro sottolineato a più riprese in questo documento l'importanza da attribuire alle differenze di contesto e di cultura. Il campo dell'etno-matematica (D'Ambrosio, 2008) ha contribuito molto a sensibilizzare a queste questioni di diversità culturale ed alle loro implicazioni educative in matematica. Ci sembra importante sottolineare che qui si tratta di questioni che esigono una delicata gestione. L'attenzione alle diversità culturali non deve condurre all'isolamento ed è importante far percepire agli alunni come la matematica, per il suo valore di universalità, può, in seno alle altre scienze, giocare un ruolo particolare per avvicinare gli uomini e le culture, permettere la reciproca comprensione e la collaborazione.

11.1 – *Le questioni linguistiche*

Il problema che intendiamo affrontare in questa parte è quello dell'insegnamento della matematica in una lingua che non è la lingua madre⁽³⁰⁾. È un problema che riguarda un certo numero di paesi in via di sviluppo, in cui la lingua di insegnamento è quella della colonizzazione e in cui coesistono, peraltro spesso, una molteplicità di lingue locali, ma è un problema lontano dall'essere confinato ai paesi in via di sviluppo, a causa dei fenomeni di immigrazione. Questa situazione rende più difficile l'espressione delle idee e delle elaborazioni emergenti così come il lavoro su queste ultime, fintanto che delle forme di espressione matematica più standardizzate non siano rese accessibili e sfruttabili. Per questa ragione, essa ha un impatto particolare nei

⁽³⁰⁾ Ricordiamo che l'UNESCO ha già preso posizione su queste questioni (cfr. UNESCO, 1953) e (UNESCO, 2003).

primi anni della scolarità ed è importante che i sistemi educativi e gli insegnanti ne siano sensibilizzati. È tuttavia una questione la cui gestione è delicata perché, se è importante prendere in considerazione la diversità linguistica, non occorre che questa presa in conto si faccia in modo da ostacolare l'integrazione sociale. Esiste ora un insieme consistente di lavori per alimentare la riflessione e la decisione in questo campo (cfr. per esempio (Secada, 1992), (Adler, 2001), (Setati, 2005), (Moschkovich, 2007, 2009)). È la ragione per cui l'ICMI ha lanciato molto di recente uno studio su questo tema⁽³¹⁾. Ci sembra importante aggiungere che la diversità linguistica non deve essere vista solamente come una difficoltà, ma può anche costituire per l'insegnamento e l'apprendimento una sorgente di arricchimento.

11.2 – *Le questioni di genere*

Le questioni di genere si pongono in matematica fin dalla scolarità obbligatoria, a causa dell'accessibilità differenziata delle ragazze e dei ragazzi alla scolarità di base in un certo numero di paesi. Quando c'è uguaglianza a livello dell'accesso alla scolarizzazione, si potrebbe pensare che esse siano risolte, e questo tanto più che le ragazze oggi riescono globalmente meglio dei ragazzi dal punto di vista scolastico, e che gli scarti tra le prestazioni in matematica tendono a ridursi almeno in un certo numero di paesi. Ma si tratta tuttavia anche in questo caso di una visione erronea perché, da una parte, permangono delle differenze nella riuscita, anzi, addirittura, riappaiono in quei paesi dove erano diminuite, e, d'altra parte, non si può pensare alle questioni di genere unicamente in termini di accessibilità e di riuscita nella scolarità obbligatoria. Anche il modo con cui la matematica è vissuta nella scolarità di base è cruciale per l'avvenire degli allievi. Numerosi studi mostrano il trattamento differenziato delle ragazze e dei ragazzi nelle classi. Essi mostrano che le attività proposte agli allievi, il modo di cui sono gestite, i ruoli assegnati agli uni e alle altre, il modo con cui il

⁽³¹⁾ Vedi <http://www.mathunion.org/icmi/conferences/icmi-studies/ongoing-studies/> e, in particolare, http://www.icmi-21.co.za/index.php?page_id=140

loro lavoro è valutato, contribuiscono a questa differenziazione. A ciò si aggiunge il peso degli stereotipi culturali e sociali che hanno come conseguenza che le ragazze, a pari risultati, hanno meno fiducia dei ragazzi nelle loro capacità a proseguire gli studi in matematica, e tendono maggiormente ad escludere la matematica dalle loro prospettive professionali.

Le difficoltà esistenti sono ben documentate dalla ricerca e dalle diverse sintesi disponibili. Queste risorse fanno anche il punto su numerose interventi di cui è stata dimostrata l'efficacia (cfr. per esempio, (Hanna, 1996), (Leder, Forgasz & Solar, C, 1997), Corbett, Hill, & St. Rose, 2008), (Leder, & Forgasz, 2008)). È importante che gli insegnanti siano sensibilizzati a queste questioni attraverso la formazione iniziale e quella continua⁽³²⁾. È inoltre importante che le azioni condotte siano sostenute istituzionalmente e valorizzate.

12. – La sfida della ricerca

Non si possono raccogliere le sfide di un'educazione matematica di qualità per tutti senza lo sviluppo di conoscenze nuove attraverso la ricerca. Nel corso degli ultimi decenni, la ricerca nell'educazione matematica si è fortemente sviluppata. Essa ha permesso in un primo tempo di comprendere meglio i processi di apprendimento degli allievi, le difficoltà e gli ostacoli, il superamento dei quali segna l'apprendimento tanto di nozioni fondamentali della scolarità di base quanto di modalità di ragionamento e di dimostrazione, di rappresentazioni e di linguaggi attraverso i quali accediamo agli oggetti matematici. Essa ha inoltre permesso di comprendere meglio il funzionamento dei sistemi didattici, le trasposizioni che in essi si operano dei saperi matematici, le interazioni che vi si intrecciano tra i differenti attori ed i loro effetti. Essa si è interessata alle potenzialità che le tecnologie offrono all'apprendimento ed al modo con cui queste potenzialità si attualizzano o

⁽³²⁾ Rimandiamo, per esempio, al sito dell'associazione "Femmes & Mathématiques" che propone molte iniziative rivolte agli allievi ma anche agli insegnanti (<http://www.femmes-et-maths.fr/>)

meno nella pratica reale delle classi. Più recentemente, essa si è interessata all'insegnante, alle sue convinzioni e alle sue credenze circa la matematica ed il suo insegnamento, alle sue conoscenze e competenze, al modo con cui queste si sviluppano. Ha cercato di comprendere la complessità delle pratiche insegnate, ciò che le determina, i meccanismi della loro evoluzione. Ha interrogato le diverse formazioni degli insegnanti ed i loro effetti. Ha cercato di afferrare meglio la dimensione culturale dell'insegnamento e degli apprendimenti. Un insieme corposo di conoscenze si è così costituito e regolari lavori di riorganizzazione e sintesi aiutano a prendere dei provvedimenti (Bishop & al., 1996), (Bishop & al., 2003), (Gutiérrez & Boero, 2006), (Lester, 2007) oltre agli studi ICMI già citati). Ma questa conoscenza ancora oggi offre potenzialità limitate per guidare le evoluzioni necessarie, nei diversi contesti spesso difficili e con mezzi di azione molto limitati, per anticipare gli effetti possibili delle scelte educative effettuate, per affrontare la questione dei cambiamenti di scala. Parallelamente allo sviluppo di una ricerca fondamentale che mira all'identificazione e alla comprensione di fenomeni, si deve sviluppare una ricerca più centrata sull'azione didattica e che affronti la questione dei contesti e dei cambiamenti di scala come una questione centrale. Da questo punto di vista il risveglio dell'interesse per una ricerca centrata sul design è sicuramente da incoraggiare (Design-Based Research Collaborative, 2003).

Vorremmo sottolineare tuttavia che la complessità delle questioni in educazione fa sì che una ricerca come la ricerca didattica ne permetta solo un approccio parziale e che non si può pretendere che essa sia l'unica a guidare le evoluzioni necessarie. È importante favorire le interazioni con gli altri campi di ricerca riguardanti l'insegnamento e l'apprendimento in senso generale, così come è importante potere analizzare il presente e pensare il futuro alla luce di un sguardo storico, sia che si tratti di storia della matematica che di storia dell'educazione.

In sintesi

Raccogliere la sfida di un'educazione matematica di qualità per tutti nella scolarità di base è una sfida ambiziosa, il successo della

quale, al di là della generalizzazione dell'accesso alla scolarità di base, passa per la capacità dei paesi di formare un numero sufficiente di insegnanti qualificati e di trattenerli. Formare degli insegnanti qualificati, significa formare degli insegnanti capaci di mettere in campo un insegnamento della matematica stimolante e in grado di mostrare la matematica come una scienza al tempo stesso ancorata alla storia e viva, una scienza implicata con il mondo e capace di contribuire a risolvere i problemi che esso affronta, così come di avvicinare gli uomini grazie ai suoi valori di universalità. Si tratta anche di far percepire la matematica come una scienza accessibile a tutti e capace di dare a ciascuno dei mezzi di comprensione e di azione sconosciuti a priori. Ciò non significa considerare questo insegnamento come un insegnamento isolato, ma organizzare le sue relazioni con le altre discipline, in particolare scientifiche. Un tale progetto sarà possibile solamente se si riesce ad organizzare la collaborazione di tutti coloro, matematici, insegnanti, formatori, didattici, specialisti ed insegnanti di altre discipline, responsabili politici, che sono chiamati a operare insieme per raccogliere questa sfida, e se si rafforzano le collaborazioni e le solidarietà sul piano internazionale e regionale. Per fare ciò esiste un potenziale reale anche nelle regioni più svantaggiate. Esistono anche numerose iniziative condotte in diversi contesti, tanto dal punto di vista economico o sociale quanto culturale che possono costituire fonti di ispirazione per le politiche da adottare. È necessario analizzarle, valutarne gli effetti e cercare di identificare condizioni e processi che ne hanno determinato le potenzialità e i limiti, essendo coscienti che non si può pensare a delle soluzioni ai problemi di educazione, senza tener conto, con la massima serietà, delle caratteristiche dei contesti. L'evoluzione tecnologica apre oggi nuove possibilità per raccogliere questa sfida e bisogna assolutamente trarne vantaggio. Ma nessuna azione sfocerà in risultati sostanziali e duraturi se l'importanza di un insegnamento della matematica e delle scienze di qualità per tutti non sarà riconosciuta sul piano politico come una priorità, con tutto ciò che questo implica specialmente per la formazione iniziale e quella continua e per lo statuto e le condizioni di lavoro degli insegnanti.

BIBLIOGRAFIA

- ADLER J., *Teaching Mathematics in Multilingual Classrooms*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- ADLER J., KAZIMA M., MWAKAPENDA W., NYABANYABA T. and XOLO S., *Mathematics Teacher Education: Trends Across Twelve African Countries*. Marang Centre for Mathematics and Science Education. Johannesburg, University of the Witwatersrand, 2007, p. 183.
- ARTIGUE M., *ICMI: A century at the interface between mathematics and mathematics education*. In: M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, F. Arzarello (eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*, p. 185-198. Istituto della enciclopedia Italiana. Roma., 2009, p. 328.
- ATWEH B., CLARKSON P. and NEBRES B., *Mathematics education on international and global contexts*. In: Bishop A.J., Clements K., Keitel C., Kilpatrick J. and Leung F.K.S. (eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*, p. 185-232. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003, p. 982.
- BALL D.L., HILL H.C. and BASS H., *Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough for teach third grade, and how can we decide?* American Educator, vol. 29, no. 3. (2005), 14-17, 20-22, 23-46.
- BARBEAU E.J. and TAYLOR P.J. (eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study*. New York: Springer Science, 2009, p. 336.
- BISHOP A.J., CLEMENTS K., KEITEL C., KILPATRICK J. and LABORDE C. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- BISHOP A.J., CLEMENTS K., KEITEL C., KILPATRICK J. and LEUNG, F.K.S. (eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003, p. 982.
- BLUM W., GALBRAITH P.L., HENN H.W. and NISS M. (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer Science, 2007.
- BRONZINA L., CHEMELLO G. and AGRASAR M., *Aportes para la enseñanza de la Matemática*. Office Regional d'Education de l'UNESCO pour l'Amérique Latine & Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de Educación, 2009, p. 129.
- BROUSSEAU G., *Theory of Didactical Situations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1997.
- CLARKE D., KEITEL C. and YOSHINORI S. (eds.), *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider's Perspective*. Rotterdam: Sense Publishers. 2006, p. 402.
- CLARKE D., EMANUELSSON J., JABLONKA E. and CHEE MOK I.A. (eds.), *Making Connections: Comparing Mathematics Classrooms Around The World*. Rotterdam: Sense Publishers. 2006, p. 280.

- Commission Européenne. *L'enseignement scientifique aujourd'hui: une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe*. Luxembourg: Office des publications officielles des communautés européennes, 2007, p. 22.
- CORBETT C., HILL C. and ST. ROSE A., *Where the girls are: The facts about gender equity in education*. Washington, DC: American Association of University Women (AAUW), 2008.
- CORNU B. and RALSTON A (eds.), *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Science and Technology Education. Document Series 44. Paris: UNESCO, 1992.
- D'AMBROSIO U., *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. Mexico: Limusa: Cideecyt, 2008, p. 108.
- Design-Based Research Collaborative. Design-based research: An emerging paradigm for educational enquiry*. Educational Researcher, vol. 32, no. 1 (2003), 5-8.
- Developing Countries Strategies Group Mathematics in Africa: Challenges and Opportunities*. A Report to the John Templeton Foundation. International Mathematical Union. <http://www.mathunion.org/publications/reports-recommendations>, 2009, p. 52.
- ERNEST P., *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany, NY: SUNY Press, 1998.
- EVEN R. and BALL D. (eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. The 15th ICMI Study. New York: Springer Science, 2009, p. 277.
- FAUVEL J. and VAN MAANEN J. (eds.), *History in mathematics education: the ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- FRANKE M., KAZEMI E. and BATTEY D., *Understanding Teaching and Classroom Practices in Mathematics*. In: F. Lester (ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. p. 225-256. Information Age Publishing, Inc., Greenwich, Connecticut, 2007, p. 1324.
- GUEUDET G. and TROUCHE L., *Towards new documentation systems for mathematics teachers*. Educational Studies in Mathematics, vol. 71, no. 3 (2009), 199-218.
- GUTTIÉRREZ A. and BOERO P. (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Rotterdam: Sense Publishers, 2006, p. 544.
- HANNA G. (ed.), *Towards Gender Equity in Mathematics Education*. An ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 304.
- HILL H.C., SLEEP L., LEWIS J. and BALL D., *Assessing Teachers' Mathematics Knowledge: What Knowledge Matters and What Evidence Counts?* In: F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. p. 111-156. Information Age Publishing, Inc., Greenwich, Connecticut, 2007, p. 1324.
- HOLTON D. (ed.), *Recruitment, Entrance and Retention of Students to University Mathematics Studies in Different Countries*. International Journal of Mathe-

- mathematical Education in Science and Technology, vol. 40, no. 1 (2009) (numero speciale).
- HOYLES C. and LAGRANGE J.B. (eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*. New York: Springer Verlag, 2009.
- KAHANE, J.P. (ed.), *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris: Odile Jacob, 2001.
- KAISER G., LUNA E. and HUNTLEY I. (eds.), *International comparison in mathematics education*. London: Falmer Press, 1999.
- KEITEL C., *On behalf of Survey Team 5: The Shaping of mathematics education through testing*. In: Niss, M. (ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*, p. 205-227. Roskilde University, Denmark, 2008, p. 558.
- KILPATRICK J., SWAFFORD, J. and FINDELL B., *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington DC: National Academic Press, 2001.
- KRAINER K. and WOOD T., *Participants in Mathematics Teacher Education*. Rotterdam: Sense Publishers, 2008, p. 382.
- LEDER G.C., FORGASZ H.J. and SOLAR C., *Research and intervention programs in mathematics education: A gendered issue*. In: Bishop A.J., Clements K., Keitel C., Kilpatrick J. and Laborde, C. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, p. 945-986. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- LEDER G. and FORGASZ H., *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, vol. 40, no. 5 (2008) (numero speciale sulle questioni di genere).
- LEUNG F., GRAF K.D. and LOPEZ-REAL F. (eds.), *Mathematics education in different cultural traditions - A comparative study of East Asia and the West*. The 13th ICMI Study. New York: Springer Science, 2006.
- LESTER F. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Information Age Publishing, Inc., Greenwich, Connecticut, 2007, p. 1324.
- LOVÁSZ L., *Trends in Mathematics, and How they could Change Education?* Conférence Européenne «Le Futur de l'Éducation Mathématique en Europe», Lisbonne, Dicembre 2007. <http://www.cs.elte.hu/~lovasz/lisbon.pdf>, 2007, p. 9.
- MA L., *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah: Lawrence Erlbaum, 1999.
- MOSCHKOVICH J.N., *Using two languages while learning mathematics*. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 64, no. 2 (2007), 121-144.
- MOSCHKOVICH J.N., *Using two languages when learning mathematics: How can research help us understand mathematics learners who use two languages?* (Research Brief). National Council of Teachers of Mathematics, 2009. http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_News_and_Advocacy/Research/Clips_and_Brefs/Research_brief_12_Using_2.pdf
- MULLIS I. et al., *TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth*

- and *Eighth Grades*. Boston: TIMSS & PIRLS international study center, 2008.
- NEBRES B.F., *Centres and peripheries in mathematics education*. In: M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, F. Arzarello (eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*, p. 149-162. Istituto della enciclopedia Italiana. Roma., 2009, p. 328.
- NISS M., *Mathematical competences and the learning of mathematics: the Danish KOM project*. http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf, 2003, p. 12.
- OECD, *Measuring student knowledge and skills – a new framework for assessment*. Paris: OECD, Programme for International Student Assessment (PISA), 1999.
- OECD, *Learning for tomorrow's world: first results from PISA 2003*. Paris: OECD, 2004.
- OECD, *Assessing scientific, reading and mathematical literacy. A framework for PISA 2006*. Paris: OECD, 2006.
- OECD, *Attracting, Developing and Retaining Effective Teachers - Final Report: Teachers Matter*. Paris: OECD, 2005, p. 240.
- OECD, *Encouraging Students Interest in Science and Technology Studies*. Paris: OECD, 2008, p. 17.
- SCHOENFELD A.H. (ed.), *Assessing Mathematical Proficiency*. Mathematical Sciences Research Institute Publications, n° 53. Cambridge University Press, 2007, p. 391.
- SECADA W., *Race, ethnicity, social class, language and achievement in mathematics*. In: D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p. 623-660. New York: National Council of Teachers of Mathematics, Macmillan, 1992.
- SETATI M., *Teaching mathematics in primary multilingual classroom*. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 36, no. 5 (2005), 447-446.
- SHULMAN L., *Knowledge and teaching: Foundations of the new reform*. Harvard Educational Review, vol. 57, no. 1 (1987), 1-22.
- SIERPINSKA A. and LERMAN S., *Epistemologies of mathematics and mathematics education*. In: Bishop A.J., Clements K., Keitel C., Kilpatrick J. and Laborde C., (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, p. 827-876. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- STEEN A.L. (ed.), *Mathematics and Democracy. The Case for Quantitative Literacy*. National Council on Education and the Disciplines, 2001, p. 121.
- STEVENSON H. and STIGLER J., *The teaching gap. Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press, 2000.
- TATTO M.T. et al., *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary*

- mathematics*. Conceptual framework. East Lansing: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University, 2008.
- UNESCO, *The use of vernacular languages in education*. Monograph on fundamental education VIII. Paris: UNESCO, 1953.
- UNESCO, *Education in a Multilingual World*. *UNESCO Education Position Paper*. Paris: UNESCO, 2003. <http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001297/129728e.pdf>
- UNESCO, *Science Education Policy-Making. Eleven emerging issues*. Paris: UNESCO, 2008, p. 45.
- VANDEBROUCK F. (ed.), *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse: Editions Octarès, 2008, p. 466.
- WINSLOW C., *Définir les objectifs de l'enseignement mathématique: La dialectique matières - compétences*. *Annales de Sciences Cognitives et Didactique*, vol. 10 (2005), 131-156.

