La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Angelo Cavallucci, Ermanno Lanconelli

Commemorazione di Bruno Pini

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.2, p. 261–274.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_2_261_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Agosto 2011, 261-274

Commemorazione di Bruno Pini

ANGELO CAVALLUCCI - ERMANNO LANCONELLI

Il 24 novembre 2007 moriva a Forlì Bruno Pini. Nato a Poggiorusco, un piccolo paese non lontano da Mantova, il 26 febbraio 1918, aveva dedicato tutta la sua lunga vita alla Matematica, alla formazione e alla guida di giovani studiosi e ricercatori. Compì gli studi universitari a Bologna, ove si laureò in Matematica con Gianfranco Cimmino il I dicembre 1941, divenendone assistente, dopo le vicende belliche, presso l'Istituto Matematico "Salvatore Pincherle", sempre all'Università di Bologna. Nel 1953, vinto un concorso a cattedra, fu nominato Professore Straordinario di Analisi Matematica, Algebrica e Infinitesimale all'Università di Cagliari, ove rimase sino al 1956, quando, conseguito l'ordinariato, si trasferì a Modena.

Nel 1958 fu richiamato a Bologna, ove ricoprì una cattedra di Analisi Matematica prima, e di Analisi Superiore poi, sino al suo pensionamento, avvenuto nel 1993. Fondò il Seminario di Analisi Matematica di Bologna, che diresse ed animò per oltre vent'anni. Alle soglie della pensione, e per più di un quinquennio, coordinò il Dottorato di Ricerca in Matematica di Bologna, tenendovi regolari corsi annuali di lezione. Era socio effettivo dell'Accademia Nazionale dei Lincei, dell'Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti di Modena, socio Benedettino dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Ottenne la Medaglia d'oro dell'Accademia detta dei Quaranta, nel 1978. Dopo il pensionamento, fu nominato Professore Emerito dell'Università degli Studi di Bologna.

Bruno Pini fu uno studioso profondo, un Maestro di straordinario carisma, un ricercatore di grande forza ed intuito. Seppe dare un vigoroso impulso alla scuola bolognese di Analisi Matematica, avviando alla ricerca una folta schiera di allievi, molti dei quali, raggiunta la cattedra universitaria, divennero poi professori nella stessa Università di Bologna ([1]). Uomo estremamente riservato, di costumi sobri e severi, dotato di una vera profonda umanità, suscitava negli allievi sentimenti di devozione ammirata, e di autentico affetto.

Il lavoro scientifico di Pini si è quasi interamente svolto nell'ambito della Teoria delle Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali. Di questa vasta teoria, che insieme con quella delle Equazioni Differenziali Ordinarie interviene nella quasi totalità dei modelli matematici delle scienze applicate, Pini era un eminente cultore, come testimoniano i suoi numerosi, profondi, esaustivi trattati, alla stesura dei quali si dedicò per piú di quarant'anni, dai primi anni '60, sino a pochi mesi dalla morte. Questi trattati riguardano i molteplici aspetti della Teoria e dei Metodi per le Equazioni Differenziali, e contengono una quantità imponente di risultati teorici e di applicazioni a modelli Fisici, Chimici e Biologici. Essi mantengono a tutt'oggi inalterata la loro attualità e la loro forza propulsiva per la ricerca.

Gli scritti matematici di Bruno Pini, per sviluppo di idee e per temi di ricerca, possono suddividersi nel modo seguente.

- Un primo gruppo di lavori riguarda matrici e determinanti infiniti, e sistemi lineari, anche infiniti, di equazioni ai differenziali totali. In [1], il primo dei suoi lavori, Pini tratta il problema della convergenza e dei *fattori di convergenza* per determinanti infiniti, dimostrando condizioni necessarie e condizioni sufficienti, che poi applica alla valutazione dei determinanti di matrici infinite. Nella nota [6] dimostra una condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie doppia $\sum_{hk} a_{hk} x_{hk}$ sia convergente qualunque sia la matrice infinita e limitata (x_{hk}). In [7] estende alle matrici infinite, simmetriche e limitate, un

([1]) Professori dell'Università di Bologna, allievi di Pini: Mauro Pagni, Giulio Cesare Barozzi, Angelo Cavallucci, Ermanno Lanconelli, Cesare Parenti, Angelo Favini, Paolo Muratori, Antonio Bove, Enrico Obrecht, Bruno Franchi, Alberto Venni, Giovanni Dore, Paolo Negrini, Piero Plazzi, Franco Nardini, Davide Guidetti. A questo elenco può aggiungersi Lamberto Cattabriga, laureatosi con Cimmino, ma che lavorò a lungo con Pini dopo che questi da Modena si trasferì a Bologna. Va inoltre ricordato Nicola Garofalo, anch'egli laureatosi con Pini, e inizialmente formatosi alla scuola bolognese di Analisi Matematica, divenuto poi professore a Padova

Bruno Pini (1918-2007).

notevole criterio di *stretta positività*, dimostrando che le forme quadratiche ad esse associate sono positive nello spazio di Hilbert l_2 se e solo se i loro minori principali sono tutti strettamente positivi e i loro vettori colonna costituiscono una base dello stesso l_2.

Sistemi, anche infiniti, di equazioni lineari ai differenziali totali sono stati studiati da Pini nei lavori [2], [4], [9], [16] e [19] trattando problemi di esistenza, periodicità, comportamenti asintotici, e sviluppando, sotto opportune ipotesi, teorie analoghe a quelle di Floquet e Poincaré per le equazioni differenziali ordinarie.

• La prima delle ricerche di Pini sui problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali, e per sistemi, è contenuta nella nota [8]. In essa viene studiato un problema ai limiti generalizzato per l'operatore del calore in due variabili, con l'aggiunta di un termine di grado zero. Pini estende a questo operatore il metodo di Cimmino delle frontiere approssimanti, metodo che consente di considerare dati al bordo in spazi L^p. È in questo lavoro che egli dimostra la *formula di media*, ripresa poi nei lavori successivi sulla *teoria parabolica del potenziale*, che caratterizza le soluzioni dell'equazione del calore. L'estensione dei risultati di [8] alle equazioni paraboliche a coefficienti Hölderiani, in dimensione spaziale arbitraria, è presentata in [12]. Qui, viene dimostrata una formula di media ponderata, sugli insiemi di livello della soluzione fondamentale degli *operatori congelati*, caratterizzante le soluzioni dell'equazione studiata. Le idee e i metodi di questi ultimi due lavori sono utilizzati anche in [10], [13], [14], [15], [21], [22], [26], [34] ove si considerano equazioni, e sistemi di equazioni, del secondo ordine, di tipo ellittico e parabolico (in particolare: sistemi della teoria dell'elasticità, e sistemi ellittici e parabolici nel senso di Vishik). In [15], oltre a sistemi del secondo ordine, ma sempre con metodi risalenti a idee di Cimmino, Pini studia equazioni ellittiche di ordine $2n$ sopra una superficie chiusa.

- Teoremi sulle singolarità eliminabili per l'equazione $\Delta u + c\,u = 0$ sono dimostrati nei lavori [18] e [20], dove Pini riprende e perfeziona sensibilmente precedenti risultati di Picone. Nelle stessa linea di ricerca si inserisce la nota [24], che tratta il problema delle singolarità eliminabili per l'equazione $\Delta u - \partial_t u + c\,u = 0$. Nella stessa nota, e per la medesima equazione, vengono anche provati teoremi di tipo Phragmèn-Lindelöf su domini non limitati, i primi, di questo tipo, per l'equazione del calore.

- L'interesse di Pini per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali lineari di ordine superiore al secondo, inizia a manifestarsi col lavoro [23], poi seguito da [25], [30], [33] e [38]. Nei primi due di questi lavori Pini studia operatori “analoghi al biarmonico classico”, precisamente: operatori prodotto del calore H e del suo aggiunto H^*, e del calore per sè stesso. In [23] adatta al primo di questi operatori, HH^*, una trattazione del classico problema biarmonico proposta da Zaremba nel 1902, poi sviluppata sistematicamente da Fichera nel 1948. Il metodo, basato sulla sviluppabilità di funzioni armoniche (caloriche, nel caso considerato da Pini) in serie di funzioni *armoniche (caloriche) ortogonali*, è particolarmente elegante. Pini costruisce sistemi completi di funzioni caloriche, ortonormalizzando famiglie di polinomi calorici costruiti da Cimmino nel 1928. In [25] Pini considera problemi al contorno per l'operatore HH e li traduce in equazioni integrali. Qui segue una via, completamente diversa dalla precedente, basata su un classico risultato di Boggio del 1902, che consente di scrivere le soluzioni di $HHu = 0$ come combinazioni lineari a coefficienti polinomiali di soluzioni di $Hu = 0$. In [30] introduce le nozioni di funzioni sub e superbiarmoniche, e caratterizza quelle di classe C^2 in termini di operatori di tipo Blaschke. Qui riprende e precisa formule di media asintotiche per le funzioni biarmoniche provate da Nicolesco nel 1936, e da Min-The Cheng nel 1951. In [33] Pini dimostra "l'unicità della soluzione del problema biarmonico fondamentale nel piano, qualora i dati siano funzioni di quadrato sommabile da intendersi raggiunti in media". Sobolev, nel 1937, aveva dimostrato un analogo risultato di unicità nel caso di dati al bordo "traccia di una funzione con derivate seconde di quadrato sommabile sul dominio assegnato". Pini rimuove questa restrizione, assumendo dati al bordo solo di quadrato sommabile rispetto alla misura di bordo. Il lavoro [38] tratta il problema dell'esistenza e unicità della soluzione di un problema al contorno per l'operatore biarmonico con dati al bordo L^1, e migliora sensibilmente precedenti risultati di Friedrichs e di Sobolev. A questo gruppo di lavori può aggiungersi [36], ove Pini studia *il comportamento al bordo delle derivate delle soluzioni dei problemi fondamentali armonico e biarmonico*.

- Nel gruppo di lavori [27], [28], [31], [32] Pini condusse pionieristiche ricerche sull'equazione della diffusione del calore, ricerche che aprirono la via alla cosiddetta *teoria parabolica del potenziale*, confluita poi nell'odierna Teoria degli Spazi Armonici astratti.

Erano ben note, dalla seconda metá dell'ottocento, le seguenti proprietà delle funzioni armoniche, quali sono i potenziali dei campi conservativi centrali, come il campo gravitazionale e il campo elettrico.

I) *Teorema della media*, di Gauss. Il valore di una funzione armonica nel centro di una sfera è uguale alla media dei valori che essa assume sulla stessa sfera.

II) *Disuguaglianza di Harnack*. Se una funzione armonica non negativa è maggiore di 1 nel centro di una regione sferica, allora in tutta la regione sferica di raggio la metà di quella considerata, la funzione stessa è maggiore di un numero, una costante assoluta, indipendente dalla funzione stessa e dalla sfera considerata.

Su questi due risultati si può fondare tutta la teoria delle funzioni armoniche, e quindi lo studio dei campi elettrico e gravitazionale in regioni prive di cariche o di masse gravitazionali. Principi analoghi a questi non si pensava potessero valere per le temperature dei corpi conduttori. La stessa natura della diffusione del calore, così diversa da quella dei campi elettrico e gravitazionale, ha oscurato per più di mezzo secolo le analogie, almeno matematiche, fra questi fenomeni. Nel 1951 e nel 1954 Pini dimostrò invece che anche per le funzioni caloriche (le soluzioni dell'equazione del calore) valgono:

I) Una *formula di media*, non su domini sferici dello spazio, ma su domini dello spazio-tempo insiemi di livello della soluzione fondamentale dell'aggiunta dell'equazione del calore.

II) Una disuguaglianza di tipo Harnack, che può essere descritta nel modo seguente. Si consideri una palla piena di assegnato raggio R contenuta in un corpo conduttore, in assenza di sorgenti di calore. Si supponga che la temperatura del corpo nel centro della palla sia maggiore di 1. Allora: *dopo un tempo* $T = R^2$, *in ogni punto della palla di raggio* $\frac{R}{2}$ *la temperatura risulta maggiore di una costante positiva assoluta, indipendente quindi dalla temperatura stessa e dalla palla.* Questa estensione della disuguaglianza di Harnack alle funzioni caloriche è avvenuta nel 1954, circa 70 anni dopo l'originario risultato di Harnack per le funzioni armoniche. Caso volle che contemporaneamente a Pini, e in modo del tutto indipendente, la stessa estensione fosse ottenuta da Jacques Hadamard.

Come già ricordato, alla formula di media per le funzioni caloriche Pini era giunto nel lavoro [8], nel suo intento di estendere al primo problema di valori al contorno per l'operatore del calore H, il metodo dei domini approssimanti di Gianfranco Cimmino, ideato da quest'ultimo per il problema di Dirichlet relativo all' operatore di Laplace Δ. Nel suo metodo, Cimmino utilizzava la formula di media di Gauss per le funzioni armoniche, allo scopo di dimostrare i cosiddetti *Teoremi di completezza*, od anche, in altre parole, per stabilire la chiusura del grafico dell'operatore Δ negli spazi L^p. Pini scoprì le formule di media caloriche procedendo in un modo che oggi appare molto naturale: egli sostituì le sfere euclidee del classico Teorema di Gauss per le funzioni armoniche, con gli insiemi di livello della soluzione fondamentale dell'operatore aggiunto del calore $H^* := \partial_x^2 + \partial_t$. Ottenne così formule di media ponderate (i.e., con nucleo non costante), caratterizzanti le funzioni, di classe C^2 nella variabile x e di classe C^1 nella t, soluzioni di $Hu = 0$. Queste formule di media, oggi ben note, furono poi estese ad arbitrarie dimensioni spaziali da Montaldo, nel 1955, e successivamente da Fulks e Watson, ripettivamente nel 1961 e nel 1971. Gli insiemi di livello di H^* vengono oggi chiamati *sfere caloriche* e i domini limitati di cui sono frontiera, *dischi calorici*. Nel lavoro [28] Pini utilizzò i suoi operatori di media per caratterizzare le funzioni supercaloriche, da lui stesso introdotte, nello stesso lavoro, in analogia con le classiche funzioni superarmoniche. Egli estese a questa nuova classe di sottosoluzioni i classici teoremi di Blaschke e di Privaloff, e i teoremi di monotonia della medie rispetto al raggio. Da questi risultati egli ottenne, come notevole conseguenza, il seguente teorema, analogo calorico del classico Teorema di Koebe per le funzioni armoniche: *una funzione u, a priori solo continua in un aperto Ω, è in realtà una funzione di classe C^∞ e risolve l' equazione $Hu = 0$, se essa verifica la formula di media calorica su ogni disco calorico ben contenuto in Ω*. Il fascio delle funzioni caloriche è quindi chiuso rispetto alla convergenza uniforme sui compatti. Successivamente, nella nota [27], Pini dimostrò che lo stesso fascio è chiuso rispetto alla convergenza puntuale monotona, come conseguenza della sua ormai celebre *disuguaglianza di Harnack parabolica*, dimostrata anch'essa in [27]. Disponendo di questi risultati, Pini potè costruire una soluzione generalizzata di tipo Wiener per il primo problema di valori al contorno per l'equazione del calore in domini normali, *ricalcando ragionamenti noti nel caso del problema di Dirichlet [...] seguendo l'esposizione di Kellogg* in "Foundations of Potential Theory", Berlin 1929 ([27, pagina 428]). Nella stessa nota, viene poi affrontato il problema della regolarità dei punti di frontiera, i.e., dei punti del bordo del dominio nei quali la soluzione generalizzata assume effettivamente i dati al bordo. Introdotta la nozione di funzione barriera, viene dimostrata una condizione necessaria e sufficiente di regolarità di tipo Bouligand.

Proseguendo nel suo studio sistematico, Pini introdusse poi in [32] la nozione di *capacità parabolica* della quale si servì per dimostrare condizioni geometriche di regolarità di tipo Wiener, alcune necessarie, altre sufficienti. Per questo studio si era resa necessaria una premessa: un Teorema di rappresentazione di tipo Riesz per le funzioni superparaboliche, teorema che Pini dimostrò in [31].

Al ciclo di ricerche appena descritto, appartengono anche i lavori [29], [42] e [35]. Nel primo di questi, servendosi dei risultati di [28], Pini estese alle funzioni superparaboliche un Teorema di Saks per le funzioni superarmoniche, dal quale dedusse poi il seguente teorema: la convoluzione della soluzione fondamentale dell'equazione del calore con una funzione continua f risolve l'equazione $Hu = -f$ in ogni punto, in un opportuno senso generalizzato basato sugli operatori di tipo Blaschke e Privaloff introdotti in [28] (ricordiamo: l'equazione $Hu = f$ non è sempre risolubile in senso classico, se f è soltanto continua). Questi risultati, infine, furono poi utilizzati in [42] per risolvere problemi al contorno per una classe di equazioni paraboliche semilineari, con un procedimento allora appena introdotto da T. Sato per le equazioni di Poisson semilineari.

La nota [35] contiene una estensione dei risultati di [27] ad una equazione parabolica con termini di grado uno e zero con coefficienti Hölderiani. Viene dimostrato che la regolarità dei punti di frontiera per la soluzione di Wiener, è equivalente a quella relativa all'equazione del calore. Degna di nota è l'estensione della disuguaglianza di Harnack alle soluzioni non negative dell'equazione considerata, estensione operata con un metodo che *non richiede la esplicita conoscenza della funzione di Green*.

• Lo studio sistematico di problemi al contorno per operatori alle derivate parziali lineari di ordine superiore al secondo, era stato iniziato da Pini, come già ricordato, nei suoi lavori sugli operatori analoghi "parabolici" del classico operatore biarmonico. Successivamente, fra gli operatori di ordine non superiore a quattro, in due variabili, egli individua quelli che, relativamente ai problemi al contorno di tipo Dirichlet in opportuni domini piani, si possono trattare con tecniche già utilizzate per gli operatori ellittici e parabolici. Di questi tipi di problemi studia unicità ed esistenza sia delle soluzioni ordinarie che generalizzate, nel senso dei valori al contorno assunti come tracce, prevalentemente mediante traduzione in equazioni integrali con metodi di tipo potenziale ([37], [41], [43], [45], [47], [50], [51], [56]); in particolare in [50] viene anche provata la regolarità di Gevrey differenziata rispetto alle due variabili delle soluzioni dei problemi studiati.

Giunge in tal modo a individuare la classe degli *operatori pseudoparabolici regolari*, caratterizzati da una *parte principale quasiomogenea*, prima in due gruppi di variabili e poi in più variabili in generale. Tali operatori saranno denominati *operatori semiellittici* da Hörmander, che ne proverà la ipoellitticità, e *operatori quasiellittici* da Volevich, e oggi continuano ad essere studiati con queste due ultime denominazioni.

Gli operatori quasiomogenei in due gruppi di variabili di ordine qualunque, a coefficienti costanti, sono trattati nei seguenti lavori: in [52], [54], [56] dove si costruisce una soluzione fondamentale mediante la trasformata di Fourier e se ne danno stime molto precise; in [53], [55] dove si studia il problema di Dirichlet in una striscia e anche in un cilindro; in [57], [58], [61] dove si stabilisce una formula di rappresentazione integrale per la soluzione del problema di Dirichlet in un semispazio e si ottengono stime a priori prima di tipo Schauder e poi di tipo Sobolev; in [66], [68] dove vengono introdotti i *domini normali* per tali operatori, relativamente ai dati al contorno di tipo Dirichlet, e viene studiato il comportamento delle tracce (alla Cimmino) sulle parti lisce della frontiera.

Gli operatori quasiomogenei in più variabili in generale sono trattati in quattro lavori: in [59], [62] dove viene provata la regolarità di tipo Gevrey differenziata rispetto alle singole variabili delle soluzioni dell' equazione omogenea all'interno; in [71] dove si prova come la regolarità di tipo Gevrey dei dati del problema di Dirichlet in una striscia si trasmette alla soluzione; in [72] dove si ottiene una formula di rappresentazione integrale per la soluzione del *problema di Dirichlet nell'angolo* e se ne danno maggiorazioni di tipo Sobolev.

In [70] viene data una caratterizzazione, in termini di trasformata di Fourier, delle *tracce nell'angolo* per gli spazi di Sobolev asimmetrici, associati in modo naturale alla parte principale di un operatore quasiellittico.

A problemi di traccia sono anche dedicati i lavori [69] e [67], ove vengono caratterizzate le tracce su rette del piano per uno spazio di tipo Sobolev associato a un certo polinomio ipoellittico ugualmente forte, secondo Hörmander, al prodotto di due opportuni polinomi quasiellittici in due variabili.

In [60] Pini studia problemi al contorno su uno strato di $R \times R^n$ per sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti, già studiati da Dikopolov e Shilov nel semispazio, nei quali si assegnano i dati al bordo mediante la loro trasformata di Fourier assegnata su certi sottoinsiemi di R^n determinati dal comportamento delle radici catteristiche del sistema.

• A problemi ipoellittici sono dedicati i lavori [64] e [65], nei quali Pini considera un polinomio ipoellittico in due variabili $\mathrm{P(s,z)}$. In [64], sotto opportune ipotesi sul comportamento asintotico delle radici $\lambda(\xi)$ delle equazioni $P(\xi,\lambda)=0$, $P(\lambda,\xi)=0$ rispetto a ξ reale, egli caratterizza la classe di Gevrey naturale $G_{p,q}$ delle soluzioni dell'equazione omogenea dell'operatore ipoellittico associato a $\mathrm{P(s,z)}$. In particolare egli ottiene, per ogni coppia di numeri razionali $p \geq 1$, $q \geq 1$, un polinomio $\mathrm{P(s,z)}$ che ha $G_{p,q}$ come sua classe di Gevrey. In [65] viene definita per $\mathrm{P(s,z)}$ una *parte principale*, ugualmente forte a $\mathrm{P(s,z)}$, determinata dal comportamento delle radici $\lambda(\xi)$ precedentemente considerate al variare di ξ nel campo reale.

Note e Memorie

[1] *Convergenza, fattori di convergenza, convergenza generalizzata per determinanti infiniti*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **17** (1948), 160-185.

[2] *Sui sistemi di infinite equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali*, Giorn. Mat. Battaglini (4), **2(78)** (1949), 151-167.

[3] *Autovalori e autosoluzioni per i sistemi auto-aggiunti di equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine*, Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5), 8 (1949), 351-377.

[4] *Sui sistemi di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **5** (1950), 255-264.

[5] *Sulle proprietà di minimo, e relative conseguenze, delle autosoluzioni di un sistema autoaggiunto di equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine*, Rivista Mat. Univ. Parma, **1** (1950), 319-345, issn=0035-6298,

[6] *Spazio duale delle spazio delle matrici infinite limitate*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **31** (1950), 111-128.

[7] *Su una classe di forme quadratiche dello spazio hilbertiano*, Giorn. Mat. Battaglini (4), **4(80)** (1951), 129-141.

[8] *Sulle equazioni a derivate parziali, lineari del secondo ordine in due variabili, di tipo parabolico*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **32** (1951), 179-204.
[9] *Su certe questioni di periodicità e asintoticità per i sistemi lineari del primo ordine ai differenziali totali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **20** (1951), 249-277.
[10] *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8), **11** (1951), 325-333.
[11] *Sulle funzioni a variazione doppia limitata d'ordine maggiore di uno*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **6**, (1951-1952), 34-44 (1953).
[12] *Un problema di valori al contorno, generalizzato, per l'equazione a derivate parziali lineare parabolica del secondo ordine*, Rivista Mat. Univ. Parma, **3** (1952), 153-187.
[13] *Sul primo problema di valori al contorno della teoria dell'elasticità*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **21** (1952), 345-369.
[14] *Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico nei domini non limitati*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4), **19** (1952), 157-170 (1953).
[15] *Sulle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine $2n$ di tipo ellittico e sui sistemi ellittici di equazioni lineari del secondo ordine sopra una superficie chiusa*, Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5), **11** (1952), 176-195.
[16] *Sui punti singolari per i sistemi ai differenziali totali*, Ann. Mat. Pura Appl (4), **34** (1953), 95-104.
[17] *Su certi integrali analoghi ai potenziali*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **8** (1953), 159-163.
[18] *Osservazioni su un teorema di M. Picone relativo all'equazione $\Delta u + cu = 0$*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **8** (1953), 19-25.
[19] *Sui cicli relativi ai sistemi ai differenziali totali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **22** (1953), 38-63.
[20] *Sulle singolarità delle soluzioni della equazione $\Delta u + cu = 0$*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8), **14** (1953), 21-26.
[21] *Sui sistemi di equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine ordine dei tipi ellittico e parabolico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **22** (1953), 265-280.
[22] *Osservazioni sulle soluzioni dei sistemi di equazioni a derivate parziali lineari di tipo ellittico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **22** (1953), 366-379.
[23] *Un problema di valori al contorno per l'equazione $\partial^4 u/\partial x^4 - \partial^2 u/\partial y^2 = 0$. I, II*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8), **14** (1953), 609-615, 746-749.
[24] *Sui punti singolari delle soluzioni delle equazioni paraboliche lineari*, Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII. (N.S.), **2** (1953), 1-12.
[25] *Traduzione in equazioni integrali di un problema analogo al problema biarmonico fondamentale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **22** (1953), 192-206.
[26] *Precisazioni a un ragionamento contenuto in una mia Nota sulle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico*, Ricerche Mat., **3** (1954), 3-12.
[27] *Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **23** (1954), 422-434.
[28] *Maggioranti e minoranti delle soluzioni delle equazioni paraboliche*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **37** (1954), 249-264.
[29] *Su un integrale analogo al potenziale logaritmico*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **9** (1954), 244-250.
[30] *Sulle funzioni sub e super-biarmoniche*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8), **16** (1954), 702-707.
[31] *Estensione al caso parabolico di un teorema di F. Riesz relativo alle funzioni subarmoniche*, Riv. Mat. Univ. Parma, **5** (1954), 269-280.
[32] *Sulla regolarità e irregolarità della frontiera per il primo problema di valori al contorno relativo all'equazione del calore*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **40** (1955), 69-88.

[33] *Teoremi di unicità per problemi generalizzanti i problemi biarmonici fondamentali interno ed esterno*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **10** (1955), 465-473.

[34] *Osservazioni sopra un problema generalizzato di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine ellittiche e paraboliche*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8), **19** (1955), 237-246.

[35] *Sul primo problema di valori al contorno per le equazioni paraboliche lineari*, Riv. Mat. Univ. Parma, **6** (1955), 215-237.

[36] *Sul comportamento alla frontiera delle derivate delle soluzioni dei problemi fondamentali armonico e biarmonico in due variabili*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, **26** (1956), 7-29.

[37] *Su una generalizzazione del problema fondamentale di valori al contorno per l'equazione del calore iterata*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, **26** (1956), 30-57.

[38] *Una generalizzazione del problema biarmonico fondamentale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **25** (1956), 196-213.

[39] *Sull'unicità della soluzione del problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche in due variabili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **26** (1956), 223-231.

[40] *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali lineari ellittiche in due variabili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **26** (1956), 177-200.

[41] *Sul problema fondamentale di valori al contorno per una classe di equazioni paraboliche lineari*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **43** (1957), 261-297.

[42] *Sul primo problema di valori al contorno per l'equazione parabolica non lineare del secondo ordine*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **27** (1957), 149-161.

[43] *Sulle equazioni paraboliche lineari del quarto ordine. I, II*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **27** (1957), 319-349, 387-410.

[44] *Un problema di valori al contorno per un'equazione a derivate parziali del terzo ordine con parte principale di tipo composito*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, **27** (1957), 114-135.

[45] *Su una equazione parabolica non lineare del quarto ordine*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, **27** (1957), 136-168.

[46] *Osservazioni sulla soluzione di un problema biarmonico generalizzato*, Scritti matematici in onore di Filippo Sibirani, Cesare Zuffi, Bologna, 1957, 219-224.

[47] *Sulle equazioni lineari del quarto ordine in due variabili con caratteristiche coincidenti. I*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 8 (1958/1959), 130-166.

[48] *Contributi allo studio dell'equazione delle vibrazioni della sbarra elastica*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 8 (1958/1959), 90-120.

[49] *Ulteriori contributi allo studio dell'equazione delle vibrazioni della sbarra elastica*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 8 (1958/1959), 217-227.

[50] *Su un problema di tipo nuovo relativo alle equazioni paraboliche d'ordine superiore al secondo*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **48** (1959), 305-332.

[51] *Sulle equazioni lineari del quarto ordine in due variabili con caratteristiche coincidenti. II*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **9** (1959/1960), 59-113.

[52] *Soluzione fondamentale per una classe di equazioni a derivate parziali con coefficienti costanti*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **9** (1959/1960), 131-155.

[53] *Sulle equazioni lineari pseudoparaboliche. I, II*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **30** (1960), 255-280, 361-375.

[54] *Precisazioni e aggiunte alla nota: Soluzione fondamentale per una classe di equazioni a derivate parziali con coefficienti constanti*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **10** (1960/1961), 36-67.

[55] *Su un teorema di unicità per un problema relativo a equazioni pseudoparaboliche*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **10** (1960/1961), 92-113.

[56] *Sui sistemi lineari pseudoparabolici*, Ricerche Mat., **10** (1961), 33-65.
[57] *Problema ridotto di Cauchy per certe equazioni pseudoparaboliche. I*, Atti Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Rend. (11), **9** (1961/1962), no. 1, 60-83.
[58] *Problema ridotto di Cauchy per certe equazioni pseudo-paraboliche. II*, Atti Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Rend. (11), **9** (1961/1962), no. 2, 23-61.
[59] *Proprietà locali delle soluzioni di una classe di equazioni ipoellittiche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **32** (1962), 221-238.
[60] *Sui problemi al contorno ben posti per le equazioni lineari alle derivate parziali con coefficienti costanti in uno strato*, Univ. Nac. Tucumán Rev. Ser. A, **14** (1962), 153-165.
[61] *Problema ridotto di Cauchy per certe equazioni pseudo-paraboliche. III*, Atti Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Rend. (11), **10** (1962/1963), no. 1, 52-77.
[62] *Su certe equazioni ipoellittiche*, Confer. Sem. Mat. Univ. Bari No., **82-83** (1962), 27.
[63] *Alcune stime integrali di soluzioni di certe equazioni ipoellittiche*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **18** (1963), 112-124.
[64] *Sulla classe di Gevrey delle soluzioni di certe equazioni ipoellittiche*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **18** (1963), 260-269.
[65] *Osservazioni sulla ipoellitticità*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **18** (1963), 420-432.
[66] *Su un problema tipico relativo a una certa classe di equazioni ipoellittiche*, Atti Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Rend. (12), **1** (1963/1964), no. 1, 25-50.
[67] *Sulle tracce di un certo spazio funzionale*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **37** (1964), 28-34.
[68] *Su un problema al contorno per certe equazioni ipoellittiche*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **9** (1964), 643-653.
[69] *Sulle tracce di un certo spazio funzionale*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **38** (1965), 61-66.
[70] *Proprietà al contorno delle funzioni di classe $H^{p_1,\cdots,p_n}$ per regioni dotate di punti angolosi*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **73** (1966), 33-53.
[71] *Una osservazione sulla natura delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche in un semispazio*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **43** (1967), 307-311. (Italian, with English summary).
[72] *Sulla rappresentazione delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche in una regione angolosa*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **80** (1968), 359-372.
[73] *Gianfranco Cimmino*, Boll. Un. Mat. Ital. A (7), **5** (1991), no. 1, 117-123.

Trattati

[1] *Primo corso di algebra*, CLUEB (1964).
[2] *Primo corso di analisi matematica*, CLUEB (1966).
[3] (coautore Mauro Pagni), *Corso di analisi matematica. Prima parte. Volume primo*, Pitagora Editrice, Bologna (1973).
[4] *Secondo corso di analisi matematica, Parte I*, CLUEB (1970).
[5] *Secondo corso di analisi matematica, Parte II*, CLUEB (1971).
[6] *Lezioni sulle distribuzioni-1. Distribuzioni temperate*, CLUEB (1979).
[7] *Terzo corso di analisi matematica - Cap. 1, Operatori lineari negli spazi $L^{\check{p}}$*, CLUEB (1977).
[8] *Terzo corso di analisi matematica - Cap. 2, Generalita sugli operatori lineari tra spazi normati, operatori compatti*, CLUEB (1978).

[9] *Lezioni di analisi matematica di secondo livello - parte I*, CLUEB (1983).
[10] *Lezioni di analisi matematica di secondo livello - parte II*, CLUEB (1986).
[11] *Lezioni di analisi matematica di secondo livello - parte III*, CLUEB (1994).
[12] (coautore Paolo Negrini), *Lezioni sul metodo delle differenze finite. Parte prima: problemi lineari*, Pitagora Editrice, Bologna (1994).
[13] —, *Lezioni sul metodo delle differenze finite. Parte seconda: problemi non lineari - vol. 1*, Pitagora Editrice, Bologna (1996).
[14] —, *Lezioni sul metodo delle differenze finite. Parte seconda: problemi non lineari - vol. 2*, Pitagora Editrice, Bologna (1996).
[15] —, *Lezioni sul metodo delle differenze finite. Parte seconda: problemi non lineari - vol. 3*, Pitagora Editrice, Bologna (1997).
[16] —, *Lezioni sul metodo delle differenze finite. Parte seconda: problemi non lineari - vol. 4*, Pitagora Editrice, Bologna (1999).
[17] —, *Lezioni sul metodo delle differenze finite. Parte seconda: problemi non lineari - vol. 5*, Pitagora Editrice, Bologna (1999).
[18] —, *Lezioni sul metodo delle differenze finite. Parte seconda: problemi non lineari - vol. 6*, Pitagora Editrice, Bologna (2000).
[19] —, *Lezioni su sistemi differenziali di modelli fisici, chimici, biologici - I.*, Pitagora Editrice, Bologna (2002).
[20] —, *Lezioni su sistemi differenziali di modelli fisici, chimici, biologici - II.*, Pitagora Editrice, Bologna (2003).
[21] —, *1. Misura, integrazione, derivazione. 2. Elementi di analisi lineare negli spazi normati. 3. Elementi di analisi non lineare negli spazi di Banach.*, Pitagora Editrice, Bologna (2006).

Angelo Cavallucci
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Ermanno Lanconelli
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna