

---

# *La Matematica nella Società e nella Cultura*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

GIORGIO OTTAVIANI

## **Introduzione all'iperdeterminante**

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 5 (2012), n.2, p. 169–195.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI\\_2012\\_1\\_5\\_2\\_169\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2012_1_5_2_169_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2012.

## Introduzione all'iperdeterminante

GIORGIO OTTAVIANI

### 1. – Prefazione

*La prima volta che vidi il libro di Ernesto Pascal fu nello studio di Francesco Gherardelli, mentre stavo preparando la tesi di laurea. Il professore lo prese dalla sua borsa di pelle, era un libro che teneva a casa e si vedeva che ci era affezionato dal modo in cui lo sfogliava.*

*Il titolo mi incuriosì: “I determinanti”. In quel libro c’era la spiegazione di alcune identità sui determinanti di Vandermonde in cui mi ero imbattuto durante lo studio, e che servivano a spiegare cose apparentemente più sofisticate: fibrati vettoriali, classi di Chern. Rimasi un po’ meravigliato che ci fosse un libro intero sui determinanti. Faceva parte di quella favolosa collezione che erano i Manuali Hoepli, la Wikipedia di un secolo fa. Il sottotitolo era ancora più affascinante: “Teoria ed applicazioni con tutte le più recenti ricerche”. Nel 1897 era un testo di avanguardia.*

*In questo articolo provo a raccontare come i determinanti siano rimasti un tema della ricerca contemporanea, nel caso di matrici multidimensionali.*

*Durante gli anni '90, Gherardelli si era dedicato ai determinanti di matrici multidimensionali [Ghe], e continuò a lavorare per passione su questo tema nel periodo successivo al pensionamento. In questo articolo vorrei rendere omaggio alla sua visione lungimirante della matematica. L'articolo comincia introducendo gradualmente alcuni esempi elementari. Un sommario più tradizionale può essere trovato nell'ultima sezione.*

Il sistema lineare nelle incognite  $(x_1, x_2)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

ammette una soluzione non nulla se e solo se

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

Questo teorema è vecchio quanto la matematica e, mutate le notazioni, se ne trovano tracce nell'aritmetica babilonese.

Il caso successivo è il sistema lineare nelle incognite  $(x_1, x_2, x_3)$

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

che ammette una soluzione non nulla se e solo se

$$(2) \quad a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = 0$$

Non stupisce che questo secondo risultato sia molto più recente, Wikipedia lo assegna (correttamente) al XVII secolo. L'espressione che compare in (2) è il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

e pone una sfida didattica notevole. Ricavare l'espressione del determinante dal sistema per sostituzioni successive, seppur possibile, è un compito laborioso che rischia di far perdere il filo.

Questo esempio fornisce una delle motivazioni che ha portato a concepire il primo corso di algebra lineare nella forma attuale, con l'utilizzo della teoria degli spazi vettoriali. Questo esempio, come fanno tutti coloro che hanno provato ad insegnare i determinanti, mostra anche la potenza (e la necessità) dell'approccio astratto per risolvere un problema concreto. In altre parole, le proprietà del determinante diventano ancora più importanti della sua espressione esplicita.

Forse questo è il momento per ricordare una provocatoria citazione di Arnold, che nel suo pamphlet "*On teaching mathematics*" afferma:

*The determinant of a matrix is an (oriented) volume of the parallelepiped whose edges are its columns. If the students are told this secret (which is carefully hidden in the purified algebraic education),*

*then the whole theory of determinants becomes a clear chapter of the theory of poly-linear forms. If determinants are defined otherwise, then any sensible person will forever hate all the determinants, Jacobians and the implicit function theorem.*

Gli scritti di Arnold sono suggestivi per la loro concretezza. In questo caso Arnold mette in luce *uno* dei tanti aspetti del determinante, che dovremo purtroppo dimenticarci in questa nota, perché il volume non ha trovato (ancora?) la sua interpretazione come iperdeterminante nel contesto multidimensionale che andiamo ad esaminare.

La proprietà forse più importante del determinante è che una matrice (non necessariamente quadrata) ha rango  $\leq r$  se e solo se tutti i suoi minori (quadrati) di ordine  $r + 1$  si annullano.

Il punto di vista *invariante* è di considerare le matrici come elementi del prodotto tensoriale  $V_1 \otimes V_2$  di due spazi vettoriali  $V_1, V_2$  dove agisce il gruppo  $GL(V_1) \times GL(V_2)$ . Le matrici di rango fissato coincidono con le orbite di questa azione, le matrici di rango massimo costituiscono l'orbita densa. Il determinante (e le sue potenze) sono gli unici invarianti per l'azione di  $SL(V_1) \times SL(V_2)$ .

È giunto il momento di considerare matrici a più dimensioni. Una matrice di tipo  $a \times b \times c$  può essere pensata come un edificio di  $c$  piani costituiti da matrici  $a \times b$ . Oppure da  $a$  fette verticali costituite da matrici  $b \times c$ .

Questi modi di "affettare" una matrice (ci sono  $n$  possibilità di ridurre una matrice  $n$ -dimensionale a sottomatrici  $(n - 1)$ -dimensionali) sostituiscono l'usuale descrizione di righe e colonne. Ci proponiamo di studiare *quali espressioni possono sostituire il determinante per matrici multidimensionali*. Il nostro punto di vista sarà chiedersi *quali proprietà del determinante trovano una generalizzazione nel caso di matrici multidimensionali*. La generalizzazione più calzante del determinante a matrici multidimensionali venne sviluppata da Cayley a metà del diciannovesimo secolo, tentando di estendere la nozione di determinante di una matrice quadrata, da lui stesso introdotta pochi anni prima. Per semplicità consideriamo coefficienti nei *numeri complessi* (campo algebricamente chiuso), si veda l'esempio 2.5. Le matrici usuali prendono il nome in questo articolo di matrici bidimensionali. Possiamo riferirci al loro determinante come al de-

terminante classico. Un sommario delle risposte è nella sezione conclusiva.

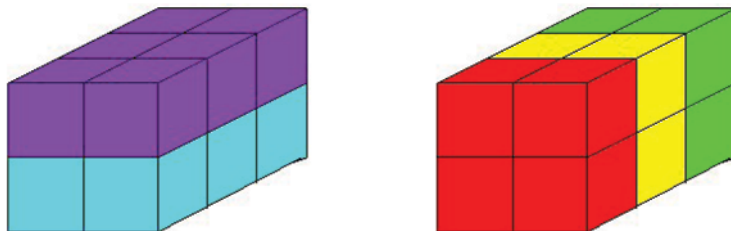


Fig. 1. – Due modi di affettare una matrice  $3 \times 2 \times 2$

## 2. – Introduzione ai sistemi multilineari: il caso $3 \times 2 \times 2$

Studiamo in questo paragrafo in dettaglio il caso delle matrici  $A$  di formato  $3 \times 2 \times 2$ . Gli elementi di  $A$  vengono descritti con un triplice indice  $a_{ijk}$  dove  $i = 0, 1, 2$ ,  $j = 0, 1$ ,  $k = 0, 1$ .  $A$  descrive un sistema “multilineare” (omogeneo) di 3 equazioni nei due blocchi di incognite  $x_0, x_1$ ;  $y_0, y_1$ .

$$(3) \quad \begin{cases} a_{000}x_0y_0 + a_{001}x_0y_1 + a_{010}x_1y_0 + a_{011}x_1y_1 = 0 \\ a_{100}x_0y_0 + a_{101}x_0y_1 + a_{110}x_1y_0 + a_{111}x_1y_1 = 0 \\ a_{200}x_0y_0 + a_{201}x_0y_1 + a_{210}x_1y_0 + a_{211}x_1y_1 = 0 \end{cases}$$

La notazione standard per questo tipo di sistemi è  $A(x \otimes y) = 0$ .

Una particolarità di questi sistemi è che  $x = (x_0, x_1) = 0$  è sempre soluzione qualunque sia il valore di  $y$  (e anche  $y = (y_0, y_1) = 0$  è sempre soluzione qualunque sia il valore di  $x$ ). Una soluzione  $((x_0, x_1), (y_0, y_1)) = (x, y)$  si dice non banale se  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ .

Ad esempio la matrice con le 3 fette

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

definisce il sistema multilineare

$$\begin{cases} x_0y_0 + x_0y_1 + x_1y_1 = 0 \\ 2x_0y_0 + 3x_0y_1 + 4x_1y_1 = 0 \\ -x_0y_0 + x_0y_1 + 2x_1y_1 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha come uniche soluzioni non banali  $(x, y) = ((0, \lambda), (\mu, 0))$  per  $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ .

ESEMPIO 2.1 – *Il sistema multilineare (non omogeneo)*

$$(4) \quad \begin{cases} x_0 y_0 = z_0 \\ x_0 y_1 = z_1 \\ x_1 y_0 = z_2 \\ x_1 y_1 = z_3 \end{cases}$$

ammette soluzioni non banali se e solo se  $z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0$  e  $(z_1, z_2, z_3, z_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ . Dimostrarlo è un facile esercizio. In particolare il sistema omogeneo associato ha solo soluzioni banali. Si vede da questo esempio come la relazione usuale tra le soluzioni di un sistema lineare e quelle dell'omogeneo associato cade nel caso multilineare.

La matrice del sistema multilineare (4) ha formato  $4 \times 2 \times 2$ . Una variante interessante è la seguente:

ESEMPIO 2.2 –

$$\begin{cases} x_0 y_0 & & = 0 \\ x_0 y_1 & + & x_1 y_0 = 0 \\ & & x_1 y_1 = 0 \end{cases}$$

ha soltanto soluzioni banali. La matrice multilineare di questo sistema  $3 \times 2 \times 2$  ha la forma

$$(5) \quad a_{ijk} = \delta_{i,j+k}$$

dove  $\delta_{r,s}$  è il simbolo di Kronecker. È l'analogo nell'ambito tridimensionale della matrice identità. Si può visualizzarla ponendo i coefficienti delle caselle colorate in figura 5 uguali a 1.

Diamo ora la soluzione generale del caso omogeneo  $3 \times 2 \times 2$ . Premettiamo come la matrice  $3 \times 2 \times 2$  si possa appiattare su una matrice  $3 \times 4$  come in figura 2 (l'ordine in cui vengono sistemate le 4 colonne è 00, 01, 10, 11).

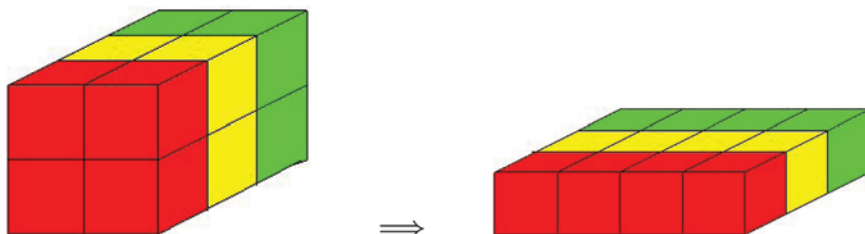


Fig. 2. – Appiattimento di una matrice  $3 \times 2 \times 2$  su una matrice  $3 \times 4$

**TEOREMA 2.3 (Cayley) [Cay].** – Sia  $A$  una matrice  $3 \times 2 \times 2$  e siano  $A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}$  le sottomatrici  $3 \times 3$  ottenute dalla matrice  $3 \times 4$  della figura 2

$$\begin{bmatrix} a_{000} & a_{001} & a_{010} & a_{011} \\ a_{100} & a_{101} & a_{110} & a_{111} \\ a_{200} & a_{201} & a_{210} & a_{211} \end{bmatrix}$$

cancellando rispettivamente la prima colonna (00), la seconda (01), la terza (10) e la quarta (11). Il sistema multilineare  $A(x \otimes y) = 0$  dato da (3) ammette soluzioni non banali se e solo se

$$\det A_{01} \det A_{10} - \det A_{00} \det A_{11} = 0$$

**DIMOSTRAZIONE.** – Osserviamo innanzitutto che se la matrice  $3 \times 4$  dell'enunciato non ha rango 3 allora nel sistema multilineare una equazione dipende dalle altre e ci si riconduce ad un sistema  $2 \times 2 \times 2$ . È facile verificare che quest'ultimo ha sempre soluzioni non banali; questo fatto sarà esplicitato nella sezione 4, Teorema 4.2. Questo è il punto dove è necessario lavorare con i numeri complessi, si veda l'esempio 2.5. Possiamo quindi supporre che la matrice  $3 \times 4$  abbia rango 3. Una soluzione  $(x_0 y_0, x_0 y_1, x_1 y_0, x_1 y_1)$  del sistema deve essere proporzionale a  $(\det A_{00}, -\det A_{01}, \det A_{10}, -\det A_{11})$  per la regola di Cramer. Per concludere basta considerare l'esempio 2.1.  $\square$

**DEFINIZIONE 2.4.** – L'espressione  $\det A_{01} \det A_{10} - \det A_{00} \det A_{11}$  si dice iperdeterminante della matrice tridimensionale  $A$  di formato  $3 \times 2 \times 2$  e si indica con l'espressione  $Det(A)$  (notare la maiuscola!).



$Det(A)$  è un polinomio omogeneo di grado 6 nei coefficienti di  $A$ . Riassumendo, se  $A$  ha formato  $3 \times 2 \times 2$  abbiamo che  $A(x \otimes y) = 0$  ha una soluzione non banale se e solo se  $Det(A) = 0$ . Questo ci dà una perfetta analogia con il legame visto tra (1) e (2).

Notiamo che  $Det(A) = 0$  se e solo se esiste una combinazione lineare delle due fette  $3 \times 2$  (non importa se “orizzontali” o “verticali”) che ha rango  $\leq 1$ . Questo risultato lega l’iperdeterminante con il rango delle fette. Invece il legame con il rango di  $A$  visto come tensore tridimensionale viene a mancare (si veda la sezione conclusiva).

ESEMPIO 2.5 – *Il sistema multilineare*

$$\begin{cases} x_0y_0 + x_1y_1 = 0 \\ x_0y_1 - x_1y_0 = 0 \end{cases}$$

corrisponde a una matrice  $3 \times 2 \times 2$  con iperdeterminante nullo (la terza fetta  $2 \times 2$  è nulla), ha per soluzioni  $(1, i) \otimes (1, i)$  e  $(1, -i) \otimes (1, -i)$  dove  $i = \sqrt{-1}$ . Questo sistema non ha soluzioni reali.

TEOREMA 2.6 (Gelfand-Kapranov-Zelevinsky) [GKZ1]. – *L’iperdeterminante della matrice tridimensionale  $3 \times 2 \times 2$  è uguale al determinante della matrice a blocchi  $6 \times 6$*

$$(6) \quad \begin{bmatrix} a_{000} & a_{100} & a_{200} & 0 & 0 & 0 \\ a_{001} & a_{101} & a_{201} & 0 & 0 & 0 \\ a_{010} & a_{110} & a_{210} & a_{000} & a_{100} & a_{200} \\ a_{011} & a_{111} & a_{211} & a_{001} & a_{101} & a_{201} \\ 0 & 0 & 0 & a_{010} & a_{110} & a_{210} \\ 0 & 0 & 0 & a_{011} & a_{111} & a_{211} \end{bmatrix}$$

**3. – Le matrici di formato bordo e la loro diagonale**

Dopo avere trattato il caso  $3 \times 2 \times 2$ , cerchiamo di generalizzare quanto abbiamo visto. Vedremo che lo studio dei sistemi multilineari porta ad isolare un formato particolare, detto *formato bordo*, dove la

“diagonale” è ben definita. I risultati prendono una forma più elegante se enunciati con notazioni proiettive.

Sia  $A$  una matrice  $(k_0 + 1) \times (k_1 + 1) \times \dots \times (k_p + 1)$ . Siano  $x^1 = (x_0^1, \dots, x_{k_1}^1), \dots, x^p = (x_0^p, \dots, x_{k_p}^p)$  gruppi di variabili. Una soluzione del sistema multilineare omogeneo  $A(x^1 \otimes \dots \otimes x^p) = 0$  si dice non banale se  $x^1 \neq 0, \dots, x^p \neq 0$ . Denotiamo con  $M(k_0 + 1, \dots, k_p + 1)$  lo spazio delle matrici multidimensionali di formato  $(k_0 + 1) \times (k_1 + 1) \times \dots \times (k_p + 1)$ .

Il seguente risultato si può far risalire agli studi classici di Corrado Segre [Se] sulle varietà che oggi portano il suo nome, come vedremo meglio nella sezione 6.

**TEOREMA 3.1.** – (*Proprietà dei sistemi multilineari omogenei*)

i) Se  $k_0 < \sum_{i=1}^p k_i$  allora il sistema multilineare  $A(x^1 \otimes \dots \otimes x^p) = 0$  ha sempre una soluzione non banale.

ii) Se  $k_0 \geq \sum_{i=1}^p k_i$  allora  
 $\{A \in M(k_0 + 1, \dots, k_p + 1) \mid A(x^1 \otimes \dots \otimes x^p) = 0$   
ha una soluzione non banale}

è una varietà algebrica di codimensione  $k_0 - \sum_{i=1}^p k_i + 1$ .

**DEFINIZIONE 3.2.** – *Le matrici multidimensionali di formato  $(k_0 + 1) \times (k_1 + 1) \times \dots \times (k_p + 1)$  con  $k_0 = \sum_{i=1}^p k_i$  si dicono di formato bordo.*

Notiamo che il caso  $3 \times 2 \times 2$  ha formato bordo. Nel caso di formato bordo la varietà delle matrici il cui sistema multilineare associato ammette una soluzione non banale ha codimensione 1, per il Teorema 3.1. L'equazione di questa varietà si dice *iperdeterminante di  $A$*  e viene indicata ancora con la notazione  $Det(A)$ . Gelfand, Kapranov e Zelevinsky provano che l'iperdeterminante di una matrice di formato bordo si può scrivere come il determinante classico di una matrice a blocchi analoga a quella che appare in (6), considerando delle convenienti potenze simmetriche (si veda [GKZ] o anche [DO]).

Il grado di  $\text{Det}(A)$  è uguale a  $\frac{(k_0 + 1)!}{k_1! \dots k_p!}$ . Notiamo che vale 6 nel caso  $3 \times 2 \times 2$ .

La proprietà fondamentale che abbiamo visto può essere riassunta nel seguente elegante teorema, che dà una perfetta analogia con il caso quadrato.

**TEOREMA 3.3** [Gelfand, Kapranov, Zelevinsky]. – *Sia  $A$  una matrice multidimensionale di formato bordo. Il sistema multilineare  $A(x^1 \otimes \dots \otimes x^p) = 0$  ha una soluzione non banale se e solo se  $\text{Det}(A) = 0$ .*

L'iperdeterminante non è lineare sulle fette ma è omogeneo su ogni fetta. Ad esempio nel formato  $3 \times 2 \times 2$  l'iperdeterminante è omogeneo di grado 3 sulle fette  $3 \times 2$  mentre è omogeneo di grado 2 sulle fette  $2 \times 2$ . Il grado di omogeneità rispetto alle  $(k_i + 1)$  fette ottenute tagliando rispetto alla  $i$ -esima dimensione è sempre dato da  $\frac{\text{deg Det}}{k_i + 1}$ . In particolare se una qualunque fetta è nulla allora l'iperdeterminante è nullo.



Fig. 3. – Scambiando due fette “verticali” nel formato  $3 \times 2 \times 2$  l'iperdeterminante rimane invariato.

È interessante studiare il comportamento rispetto agli scambi di fette. Se scambio tra loro due fette  $2 \times 2$  “verticali” l'iperdeterminante *rimane invariato*. Invece se scambio tra loro le due fette  $3 \times 2$  (sia “orizzontali” che “verticali”) l'iperdeterminante *cambia segno*. Dopo due scambi il segno rimane invariato, esattamente come nel caso bi-dimensionale.

Questo comportamento viene compreso grazie al seguente Teorema.

**TEOREMA 3.4.** – Sia  $k_0 \geq k_1 \geq k_2$  e  $k_0 = k_1 + k_2$  (formato bordo). Sia  $N = \frac{(k_0 + 1)!}{k_1!k_2!}$ . Per matrici di formato  $(k_0 + 1) \times (k_1 + 1) \times (k_2 + 1)$  lo scambio di due fette  $k_0 \times k_1$  (risp.  $k_0 \times k_2, k_1 \times k_2$ ) cambia segno al determinante se  $\frac{N}{k_2 + 1}$  (risp.  $\frac{N}{k_1 + 1}, \frac{N}{k_0 + 1}$ ) è dispari e lo lascia invariato se  $\frac{N}{k_2 + 1}$  (risp.  $\frac{N}{k_1 + 1}, \frac{N}{k_0 + 1}$ ) è pari.



Fig. 4. – Scambiando due piani “orizzontali” nel formato  $3 \times 2 \times 2$  l’iperdeterminante cambia segno.

**DIMOSTRAZIONE.** – L’iperdeterminante è un invariante relativo, nel senso che per matrici quadrate  $g$  di ordine  $(k_2 + 1)$  vale (con ovvie notazioni)

$$(7) \quad \text{Det}(A * g) = \text{Det}(A) \cdot (\det(g))^{N/(k_2+1)}$$

Una matrice di permutazione  $g$  agisce su  $A$  permutando le fette  $k_0 \times k_1$ . In particolare una matrice di permutazione che scambia due righe ha  $\det = -1$ , da cui la tesi.  $\square$

Una matrice multidimensionale con due fette parallele uguali (o proporzionali) ha ancora l’iperdeterminante uguale a zero.

Il lettore si può chiedere se è possibile definire una operazione di moltiplicazione per le matrici multidimensionali. Non sembra possibile definire una buona moltiplicazione interna alle matrici di formato fissato. Però se  $A$  ha formato bordo  $(k_0 + 1) \times \dots \times (k_p + 1)$  e  $B$  ha formato bordo  $(l_0 + 1) \times \dots \times (l_q + 1)$  con  $l_0 = k_p$  allora si può definire  $A * B$  come la matrice di formato  $(k_0 + 1) \times \dots \times (k_{p-1} + 1) \times (l_1 + 1) \times \dots \times (l_q + 1)$  ottenuta con la regola usuale di moltiplicazione “righe per colonne”.  $A * B$  ha ancora formato bordo. Vale il risultato seguente.

TEOREMA 3.5 [DO]. – [Formula di Cauchy-Binet per iperdeterminanti di formato bordo].

Siano  $A$  e  $B$  come sopra. Allora

$$Det(A * B) = Det(A)^\alpha Det(B)^\beta$$

dove  $\alpha = \frac{l_0!}{l_1! \dots l_q!}$ ,  $\beta = \frac{(k_0 + 1)!}{k_1! \dots k_{p-1}!(k_p + 1)!}$  (coefficienti multinomiali).

Notiamo che gli esponenti  $\alpha$  e  $\beta$  si riducono entrambi a 1 nel caso di matrici quadrate. Se una sola delle matrici  $A, B$  è quadrata la formula del Teorema 3.5 si riduce a (7). Nel caso di matrici rettangolari  $M(n, m)$ , tutte le matrici dello stesso rango sono equivalenti per l'azione del gruppo  $GL(n) \times GL(m)$ . Si può provare ad esempio che data una matrice  $A$  di formato  $3 \times 2 \times 2$  tale che  $Det(A) \neq 0$ , allora esistono tre matrici  $G$  di formato  $3 \times 3$ ,  $H_1$  e  $H_2$  di formato  $2 \times 2$  tali che (con ovvie notazioni)  $G * A * H_1 * H_2$  è uguale alla matrice identità (vedi (5)). Questo risultato è ben lontano dall'essere vero per matrici multidimensionali generali.

Studiamo ora la diagonale di una matrice di formato bordo.

ESEMPIO 3.6 – Se  $A$  di formato  $3 \times 2 \times 2$  ha la forma diagonale con al primo piano ( $k = 0$ )

$$\begin{bmatrix} a_{000} & 0 & 0 \\ 0 & a_{110} & 0 \end{bmatrix}$$

ed al secondo piano ( $k = 1$ )

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{101} & 0 \\ 0 & 0 & a_{211} \end{bmatrix}$$

allora dalla formula del Teorema 2.3 abbiamo  $det A_{01} = a_{000}a_{110}a_{211}$ ,  $det A_{10} = a_{000}a_{101}a_{211}$ ,  $det A_{00} = det A_{11} = 0$  da cui (si veda la figura 5)

$$(8) \quad Det(A) = a_{000}^2 a_{110} a_{101} a_{211}^2$$

Quindi l'iperdeterminante è diverso da zero esattamente quando sono diversi da zero tutti e quattro i termini diagonali. Inoltre nel caso  $a_{ijk} = \delta_{i,j+k}$  (matrice "identità") l'iperdeterminante vale 1.

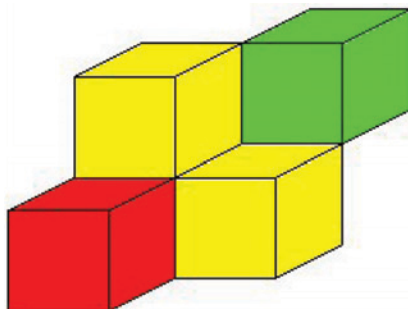


Fig. 5. – La diagonale di una matrice  $3 \times 2 \times 2$ . Nell'iperdeterminante, che ha grado 6, l'esponente dei coefficienti mediani gialli vale 1, mentre agli estremi vale 2.

Una matrice di formato bordo si dice *diagonale* se  $a_{i_0, \dots, i_p} = 0$  per  $i_0 \neq \sum_{j=1}^p i_j$ .

La diagonale di una matrice di formato bordo è costituita dagli elementi di posto  $(i_0, i_1, \dots, i_p)$  con  $i_0 = \sum_{j=1}^p i_j$ .

Una matrice di formato bordo si dice *triangolare inferiore* (risp. superiore) se  $a_{i_0, \dots, i_p} = 0$  per  $i_0 < \sum_{j=1}^p i_j$  (risp.  $i_0 > \sum_{j=1}^p i_j$ ).

Generalizzando l'esempio 3.6, l'iperdeterminante di una matrice diagonale  $A$  di formato  $(n+1) \times n \times 2$  (formato bordo) è pari a

$$(9) \quad \text{Det}(A) = \prod_{i=0}^{n-1} a_{i, i, 0}^{n-i} a_{i+1, i, 1}^{i+1}$$

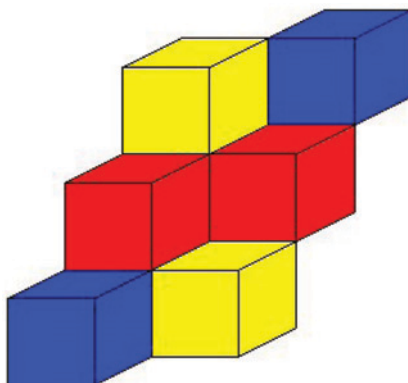


Fig. 6. – La diagonale di una matrice  $4 \times 3 \times 2$ . Nell'iperdeterminante, che ha grado 12, l'esponente dei coefficienti estremi blu vale 3, per i rossi vale 2 e per i gialli vale 1.

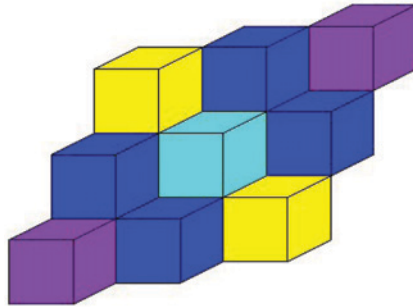


Fig. 7. – La diagonale di una matrice  $5 \times 3 \times 3$ . Nell'iperdeterminante, che ha grado 30, l'esponente dei coefficienti estremi viola vale 6, per i blu vale 3, per i gialli vale 1 e per il celeste vale 4.

Questa formula si ottiene imponendo il corretto grado di omogeneità per ogni fetta. Alcuni casi particolari di questa formula sono illustrati nelle figure 5 e 6. La figura 7 mostra che il caso generale è più complesso.

L'iperdeterminante di una matrice triangolare di formato bordo è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale, ciascuno con uno specifico esponente (si veda [WZ] e anche [BBG]). La formula che si ottiene è analoga a (8) e (9). In particolare per matrici triangolari l'iperdeterminante è diverso da zero se e solo se tutti gli elementi diagonali sono diversi da zero. La definizione di matrice triangolare (o diagonale) perde di senso per matrici non di formato bordo.

Le matrici triangolari e diagonali hanno un ruolo particolare nella Teoria Geometrica degli Invarianti, sotto l'azione del gruppo  $GL(k_0 + 1) \times \dots \times GL(k_p + 1)$ , si veda [AO].

La diagonale di una matrice di formato bordo “sufficientemente grande” può essere visualizzata in rosso nella figura 8. Sulla diagonale ci sono esattamente  $\prod_{i=1}^p k_i$  caselle. Gli elementi “estremi” appaiono nella formula per l'iperdeterminante di una matrice diagonale con esponente dato dal coefficiente multinomiale  $\binom{k_0}{k_1, \dots, k_p} = \frac{k_0!}{k_1! \dots k_p!}$ .

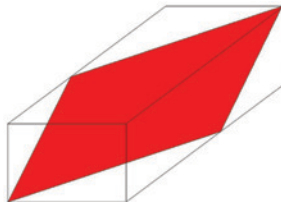


Fig. 8. – La diagonale di una matrice di formato bordo.

#### 4. – Il metodo di calcolo di Schläfli ed il caso $2 \times 2 \times 2$

L'iperdeterminante di formato  $3 \times 2 \times 2$  può essere calcolato in modo alternativo usando un metodo dovuto a Schläfli.

La matrice  $A$  di formato  $3 \times 2 \times 2$  definisce la matrice  $2 \times 2$  seguente

$$\begin{bmatrix} a_{000}z_0 + a_{100}z_1 + a_{200}z_2 & a_{001}z_0 + a_{101}z_1 + a_{201}z_2 \\ a_{010}z_0 + a_{110}z_1 + a_{210}z_2 & a_{011}z_0 + a_{111}z_1 + a_{211}z_2 \end{bmatrix}$$

ottenuta sommando le tre fette  $2 \times 2$  con coefficienti rispettivamente  $z_0, z_1, z_2$ .

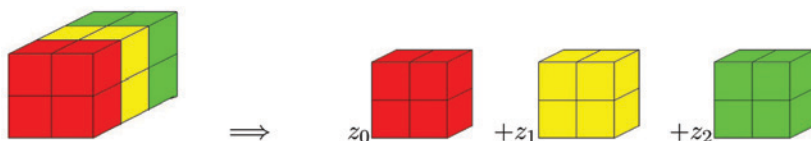


Fig. 9. – Una matrice tridimensionale dà una matrice bidimensionale con coefficienti forme lineari.

Il determinante di questa matrice definisce la seguente conica proiettiva nelle variabili  $z_0, z_1, z_2$

$$(10) \quad z_0^2 \begin{vmatrix} a_{000} & a_{001} \\ a_{010} & a_{011} \end{vmatrix} + z_0 z_1 \left( \begin{vmatrix} a_{000} & a_{101} \\ a_{010} & a_{111} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{100} & a_{001} \\ a_{110} & a_{011} \end{vmatrix} \right) + \dots = \\ = (z_0, z_1, z_2) \cdot C \cdot (z_0, z_1, z_2)^t$$

dove  $C$  è una matrice simmetrica  $3 \times 3$  con coefficienti quadratici in  $a_{ijk}$ .

**TEOREMA 4.1 (Schläfli, 1852).** – *L'iperdeterminante della matrice  $A$  di formato  $3 \times 2 \times 2$  è uguale al determinante di  $C$ , cioè l'iperdeterminante si annulla esattamente quando la conica (10) è singolare.*

Omettiamo la dimostrazione del teorema di Schläfli, ottenibile geometricamente mediante la bidualità; diamo invece una motivazione per un risultato analogo nel caso  $2 \times 2 \times 2$ . È interessante osservare come il caso  $2 \times 2 \times 2$  richieda un trattamento diverso da quello  $3 \times 2 \times 2$ ; infatti il caso  $3 \times 2 \times 2$  ha formato bordo a differenza del caso  $2 \times 2 \times 2$ .



Consideriamo un sistema multilineare  $2 \times 2 \times 2$  omogeneo di 2 equazioni nei due blocchi di variabili  $x_0, x_1, y_0, y_1$ .

$$\begin{cases} a_{000}x_0y_0 + a_{001}x_0y_1 + a_{010}x_1y_0 + a_{011}x_1y_1 = 0 \\ a_{100}x_0y_0 + a_{101}x_0y_1 + a_{110}x_1y_0 + a_{111}x_1y_1 = 0 \end{cases}$$

L'espressione può essere scritta come

$$\begin{bmatrix} a_{000}x_0 + a_{010}x_1 & a_{001}x_0 + a_{011}x_1 \\ a_{100}x_0 + a_{110}x_1 & a_{101}x_0 + a_{111}x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi esistono soluzioni non banali per i valori  $(x_0, x_1)$  tali che

$$\begin{vmatrix} a_{000}x_0 + a_{010}x_1 & a_{001}x_0 + a_{011}x_1 \\ a_{100}x_0 + a_{110}x_1 & a_{101}x_0 + a_{111}x_1 \end{vmatrix} = 0$$

Tali valori esistono sempre, almeno sui numeri complessi, e possono essere calcolati risolvendo una equazione di secondo grado. Il seguente teorema, dovuto a Cayley, è a questo punto immediato.

**TEOREMA 4.2.** – *La matrice generale di formato  $2 \times 2 \times 2$  (a coefficienti complessi) definisce un sistema multilineare con esattamente due soluzioni non banali (a meno di costanti di proporzionalità). Il sistema ammette una sola soluzione (oppure ne ammette infinite) se e solo se il discriminante del polinomio*

$$\begin{vmatrix} a_{000}x_0 + a_{010}x_1 & a_{001}x_0 + a_{011}x_1 \\ a_{100}x_0 + a_{110}x_1 & a_{101}x_0 + a_{111}x_1 \end{vmatrix} = 0$$

*si annulla.*

Il discriminante precedente si dice iperdeterminante del formato  $2 \times 2 \times 2$ . Esplicitamente il polinomio precedente è

$$\begin{aligned} x_0^2 \begin{vmatrix} a_{000} & a_{001} \\ a_{100} & a_{101} \end{vmatrix} + x_0x_1 \left( \begin{vmatrix} a_{000} & a_{011} \\ a_{100} & a_{111} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{010} & a_{001} \\ a_{110} & a_{101} \end{vmatrix} \right) + \\ + x_1^2 \begin{vmatrix} a_{010} & a_{011} \\ a_{110} & a_{111} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

e quindi la definizione precisa è la seguente .

DEFINIZIONE 4.3. – Sia  $A$  di formato  $2 \times 2 \times 2$ .

$$\text{Det}(A) = \left( \begin{vmatrix} a_{000} & a_{011} \\ a_{100} & a_{111} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{010} & a_{001} \\ a_{110} & a_{101} \end{vmatrix} \right)^2 - 4 \begin{vmatrix} a_{000} & a_{001} \\ a_{100} & a_{101} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{010} & a_{011} \\ a_{110} & a_{111} \end{vmatrix}$$

La formula precedente si semplifica nella seguente, che contiene 12 addendi ed è quella che appare nel lavoro originale di Cayley [Cay]

$$(11) \quad \begin{aligned} \text{Det}(A) = & (a_{000}^2 a_{111}^2 + a_{001}^2 a_{110}^2 + a_{010}^2 a_{101}^2 + a_{011}^2 a_{100}^2) + \\ & -2(a_{000} a_{001} a_{110} a_{111} + a_{000} a_{010} a_{101} a_{111} + a_{000} a_{011} a_{100} a_{111} + \\ & a_{001} a_{010} a_{101} a_{110} + a_{001} a_{011} a_{110} a_{100} + a_{010} a_{011} a_{101} a_{100}) + \\ & +4(a_{000} a_{011} a_{101} a_{110} + a_{001} a_{010} a_{100} a_{111}) \end{aligned}$$

Raggruppata in questo modo, la formula ha notevoli proprietà di simmetria. Ad esempio i primi 4 addendi corrispondono ai 4 segmenti diagonali del cubo  $2 \times 2 \times 2$ . I successivi 6 addendi corrispondono alle 6 diagonali piane del cubo, mentre gli ultimi 2 addendi corrispondono ai vertici dei due tetraedri regolari pari e dispari inscritti nel cubo.

È conveniente vedere le soluzioni  $x$  (oppure  $y$ ) a meno di proporzionalità come elementi di una retta proiettiva  $\mathbf{P}^1$ . Allora il risultato precedente può essere riassunto così: se  $A$  ha formato  $2 \times 2 \times 2$ , allora  $A(x \otimes y) = 0$  ha due soluzioni distinte  $(x \otimes y) \in \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  se e solo se  $\text{Det}(A) \neq 0$ . La proprietà enunciata è particolarmente bella, tuttavia abbiamo dovuto abbandonare l'analogia con il caso quadrato.

L'iperdeterminante  $2 \times 2 \times 2$  è omogeneo di grado 2 in ciascuna fetta  $2 \times 2$  e rimane invariato per qualunque scambio tra fette.

## 5. – L'iperdeterminante in generale

Nel caso di matrici multidimensionali che soddisfano la disuguaglianza  $k_0 \leq \sum_{i=1}^p k_i$ , dove  $k_0 = \max_j k_j$ , è ancora possibile definire l'iperdeterminante, considerando un sistema multilineare più complesso e che adesso accenniamo.

Esprimiamo  $A$  come l'applicazione multilineare

$$A: \mathbb{C}^{k_0+1} \times \dots \times \mathbb{C}^{k_p+1} \rightarrow \mathbb{C}$$

Nel caso  $3 \times 2 \times 2$ , l'esistenza di una soluzione al sistema (3) si può scrivere come

$$(12) \quad A(\mathbb{C}^3, x^0, y^0) = 0$$

che significa  $A(z, x^0, y^0) = 0$  per ogni  $z \in \mathbb{C}^3$ .

In questo caso esiste sempre  $z^0 \in \mathbb{C}^3$  tale che i due sistemi seguenti sono verificati

$$A(z^0, \mathbb{C}^2, y^0) = 0 \quad A(z^0, x^0, \mathbb{C}^2) = 0$$

Infatti il primo sistema è dato due equazioni in  $z^0$ , di cui una sola è indipendente rispetto a (12), e analogamente nel secondo sistema rimane una sola equazione indipendente rispetto a (12). Abbiamo complessivamente due equazioni lineari omogenee nelle tre incognite  $z^0 = (z_0^0, z_1^0, z_2^0)$ , che ammettono una soluzione non nulla. Pertanto possiamo riformulare il Teorema 2.3 nel modo seguente

**TEOREMA 5.1.** – *Una matrice  $A$  di formato  $3 \times 2 \times 2$  soddisfa  $\text{Det}(A) = 0$  se e solo se esiste  $(z^0 \otimes x^0 \otimes y^0) \in \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  non banale tale che*

$$\begin{cases} A(\mathbb{C}^3, x^0, y^0) = 0 \\ A(z^0, \mathbb{C}^2, y^0) = 0 \\ A(z^0, x^0, \mathbb{C}^2) = 0 \end{cases}$$

La condizione del Teorema 5.1 fornisce la definizione di matrice degenera e permette di definire l'iperdeterminante in generale.

**DEFINIZIONE 5.2.** – *Chiamiamo una matrice  $A$  di formato  $(k_0 + 1) \times \dots \times (k_p + 1)$  degenera se esiste  $(x^0 \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^p)$  non banale tale che*

$$(13) \quad A(x^0, x^1, \dots, \mathbb{C}^{k_i+1}, \dots, x^p) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, p$$

Schläfli mostrò che le matrici degeneri sono esattamente quelle con iperdeterminante nullo nel caso  $2 \times 2 \times 2$ . È una conseguenza del teorema di bidualità, a cui accenneremo nella sezione 6, ma che ci porterebbe troppo lontano se volessimo approfondirlo qui.

TEOREMA 5.3 ([GKZ], Theorem 14.3.1). – Sia  $k_0 = \max_j k_j = \geq \sum_{i=1}^p k_i$  (ad esempio nel formato bordo). Se è soddisfatta la condizione (13) per  $i = 0$  allora è soddisfatta (13) anche per  $i \geq 1$  (la cui richiesta diventa superflua nella definizione di matrice degenera).

La dimostrazione del teorema precedente è elementare e segue le stesse righe del ragionamento svolto sopra nel caso  $3 \times 2 \times 2$ . È opportuno aggiungere che ragionamenti di questo tipo sono analoghi al risultato di algebra lineare sulle matrici bidimensionali per cui “il rango per righe è uguale al rango per colonne”.

TEOREMA 5.4 ([GKZ], Theorem 14.1.3) (Disuguaglianza “triangolare”). – Le matrici degeneri hanno codimensione 1 in  $M(k_0 + 1, \dots, k_p + 1)$  esattamente quando vale la disuguaglianza  $k_0 = \max_j k_j = \leq \sum_{i=1}^p k_i$ .

Notiamo che nel caso bidimensionale, la disuguaglianza  $k_0 \leq \sum_{i=1}^p k_i$  si riduce necessariamente ad una uguaglianza e quindi al formato bordo (cioè quadrato).

Si può quindi definire l'iperdeterminante  $Det(A)$  nel caso generale.

DEFINIZIONE 5.5. – Consideriamo matrici multidimensionali di formato  $(k_0 + 1) \times \dots \times (k_p + 1)$  con  $k_0 = \max_j k_j$  che soddisfa  $k_0 \leq \sum_{i=1}^p k_i$ . L'equazione della varietà delle matrici degeneri è per definizione l'iperdeterminante.

In realtà la definizione precedente caratterizza l'iperdeterminante solo a meno di una costante moltiplicativa. L'ambiguità può essere risolta ponendo uguale a 1 il coefficiente di un monomio “massimale” (vedi [WZ]). Questa è una convenzione un po' artificiosa ma ha il vantaggio di ricondursi al determinante classico nel caso di matrici quadrate. Naturalmente nel formato bordo la definizione 5.5 coincide con l'iperdeterminante che abbiamo visto nella sezione 3.

La proprietà saliente è che  $\text{Det}(A) = 0$  se e solo se  $A$  è degenera. L'iperdeterminante in generale è un *invariante relativo* per l'azione del gruppo  $GL(k_0 + 1) \times \dots \times GL(k_p + 1)$ , come nel formato bordo, e da qui discendono varie proprietà generali. Ad esempio è ancora vero che lo scambio di due facce parallele lascia l'iperdeterminante invariato a meno di un eventuale segno. Inoltre l'iperdeterminante di una matrice con due facce proporzionali è nullo. La definizione non aiuta però a calcolare l'iperdeterminante. Il calcolo è in generale assai complesso, perfino con l'uso del computer, e non sono note formule che legano l'iperdeterminante ad un determinante classico come nel formato bordo. Il metodo di Schläfli che funziona nel caso  $2 \times 2 \times 2$  si può estendere anche ai casi  $m \times m \times 2$ ,  $m \times m \times 3$  e  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  ma non sono possibili altre estensioni. Siamo quindi in una situazione paradossale, dove conosciamo molte proprietà di una funzione senza saperla calcolare. Il calcolo dell'iperdeterminante in generale rimane un interessante problema aperto. Seguendo [GKZ], si inquadra nel calcolo dei risultanti multidimensionali, che vanno oltre lo scopo di questa nota.

Il seguente caso particolare dà le equazioni della sottovarietà delle matrici degeneri nel caso  $4 \times 2 \times 2$ , dove tale sottovarietà ha codimensione 2 per i Teoremi 3.1 (ii) e 5.3.

**PROMOZIONE 5.6.** – *Sia  $A$  una matrice  $4 \times 2 \times 2$ . Il sistema multilineare  $A(x \otimes y) = 0$  con  $x, y \in \mathbb{C}^2$  ha soluzioni non banali se e solo se valgono le seguenti due condizioni:*

- (i) *ogni sottomatrice  $3 \times 2 \times 2$  ha iperdeterminante nullo*
- (ii) *il determinante  $4 \times 4$  ottenuto appiattendendo le due fette  $4 \times 2$  si annulla (è indifferente prendere le fette “orizzontali” oppure quelle “verticali”).*

**DIMOSTRAZIONE.** – La prima condizione è necessaria perché ogni soluzione non banale del sistema è soluzione anche dei sottosistemi dati da tre delle quattro equazioni. La seconda condizione è necessaria perché una soluzione  $(x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1)$  è anche soluzione del sistema omogeneo  $4 \times 4$  “in senso classico”. Viceversa, se (ii) è soddisfatta consideriamo tre righe che generano lo spazio delle righe della matrice  $4 \times 4$ . Per (i) ed il Teorema 2.3 il sistema multilineare dato da queste tre

equazioni ammette una soluzione non banale. Anche la quarta equazione è soddisfatta perché è una combinazione lineare di queste tre.  $\square$

Notiamo che le condizioni (i) e (ii) della Proposizione 5.6 equivalgono all'esistenza di una combinazione lineare delle fette  $4 \times 2$  che ha rango  $\leq 1$ .

Nel caso  $4 \times 2 \times 2$  la disuguaglianza "triangolare" non è soddisfatta e l'iperdeterminante non è definito.

Il grado dell'iperdeterminante è difficile da valutare. Una espressione compatta si può ottenere per mezzo di una funzione generatrice. Sia  $N(k_0, \dots, k_p)$  il grado dell'iperdeterminante di formato  $(k_0 + 1) \times \dots \times (k_p + 1)$  e sia  $k_0 = \max_j k_j$ . Poniamo  $N(k_0, \dots, k_p) = 0$  se  $k_0 > \sum_{i=1}^p k_i$  (in questo caso si può porre per convenzione  $Det = 1$ ). Se  $k_0 \leq \sum_{i=1}^p k_i$  vogliamo valutare  $N(k_0, \dots, k_p)$ . È rimarchevole il fatto che la funzione generatrice definita dalla sommatoria  $\sum_{k_0, \dots, k_p \geq 0} N(k_0, \dots, k_p) z_0^{k_0} \dots z_p^{k_p}$  (con  $(z_0, \dots, z_p)$  variabili) sia calcolabile, e quindi prendendo lo sviluppo di Taylor, sono in linea di principio calcolabili tutti i coefficienti  $N(k_0, \dots, k_p)$ . In altre parole, è più facile calcolare i gradi  $N(k_0, \dots, k_p)$  *tutti insieme* piuttosto che uno alla volta. La formula che cerchiamo è la seguente (la dimostrazione, assai tecnica, è contenuta in [GKZ]).

TEOREMA 5.7.

$$\sum_{k_0, \dots, k_p \geq 0} N(k_0, \dots, k_p) z_0^{k_0} \dots z_p^{k_p} = \frac{1}{\left(1 - \sum_{i=2}^{p+1} (i-1)x_i(z_0, \dots, z_p)\right)^2}$$

dove  $x_i$  è l' $i$ -esima funzione simmetrica elementare.

## 6. – La varietà duale e l'interpretazione geometrica

Lo spazio proiettivo  $P(V)$  può essere definito come l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione 1 (rette) di uno spazio vettoriale  $V$ . Lo spazio duale  $P(V^*)$  è l'insieme dei sottospazi vettoriali di codi-

mensione 1 (iperpiani) di  $V$ . Quindi i punti di  $\mathbf{P}(V^*)$  sono esattamente gli iperpiani di  $\mathbf{P}(V)$ . Viceversa ad ogni punto  $p \in \mathbf{P}(V)$  è associato un iperpiano  $p^\vee \subset \mathbf{P}(V^*)$  che consiste nell'insieme degli iperpiani di  $V$  che contengono  $p$ . Questa corrispondenza si estende ai sottospazi proiettivi  $L \subset \mathbf{P}(V)$ . Se definiamo la varietà duale  $L^\vee$  come l'insieme degli iperpiani di  $V$  che contengono  $L$  allora  $L^\vee$  è un sottospazio proiettivo di  $\mathbf{P}(V^*)$  tale che  $\text{codim } L^\vee = \text{dim } L + 1$ . Mediante l'identificazione naturale tra  $\mathbf{P}((V^*)^*)$  e  $\mathbf{P}(V)$ , vale la dualità  $L^{\vee\vee} = L$ .

Possiamo definire la varietà duale per una qualunque varietà proiettiva irriducibile  $X \subset \mathbf{P}(V)$ . Un iperpiano  $H$  si dice tangente a  $X$  se  $H$  contiene lo spazio tangente a  $X$  in un suo punto nonsingolare  $x$ .

La *varietà duale*  $X^\vee \subset \mathbf{P}(V^*)$  è definita come la chiusura dell'insieme di tutti gli iperpiani tangenti. In generale vale il

**TEOREMA 6.1** (Teorema di bidualità). – *Sia  $X \subset \mathbf{P}(V)$  una varietà proiettiva irriducibile. Allora*

$$(14) \quad X^{\vee\vee} = X$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [GKZ]. I lettori familiari con le varietà proiettive possono invece apprezzare il seguente

**COROLLARIO 6.2.** – *Se  $X^\vee$  non è una ipersuperficie e  $\text{codim } X^\vee = r + 1$  con  $r \geq 1$  allora  $X$  contiene una famiglia densa di sottospazi lineari di dimensione  $r$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** – Per il teorema di bidualità l'enunciato è equivalente al seguente. Se  $X$  ha codimensione  $r + 1$  allora  $X^\vee$  contiene una famiglia densa di sottospazi lineari di dimensione  $r$ . In questo caso la famiglia può essere costruita così : dato un punto nonsingolare di  $x$ , tutti gli iperpiani che contengono lo spazio tangente  $T_x X$  formano un sottospazio di dimensione  $r$  contenuto in  $X^\vee$ .  $\square$

Il corollario precedente mostra che tipicamente la varietà duale è una ipersuperficie. È noto classicamente che nello spazio proiettivo delle matrici  $n \times m$ , le matrici di rango 1 corrispondono alla varietà di Segre  $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{m-1}$ . La varietà duale  $(\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{m-1})^\vee$  è una ipersu-

perficie soltanto nel caso quadrato  $n = m$  ed in questo caso l'equazione dell'ipersuperficie è la funzione determinante. Il fatto è significativo perché permette di dare una interpretazione geometrica del determinante.

Algebricamente, si può interpretare la dualità in termini della matrice aggiunta  $ad A$ . È facile verificare che se  $A$  è una matrice quadrata di ordine  $n$  e di rango  $n - 1$  allora  $\text{rango } ad A = 1$ .

Gelfand, Kapranov e Zelevinsky hanno generalizzato questa corrispondenza al caso multidimensionale, giungendo ad una interpretazione geometrica dell'iperdeterminante. Per fare questo si considera la varietà di Segre  $\mathbf{P}^{k_0} \times \dots \times \mathbf{P}^{k_p}$ .

Il punto è che una matrice  $A$  degenera secondo la Definizione 5.2 corrisponde a un iperpiano tangente nel punto  $x_0 \otimes \dots \otimes x_p$ . La varietà delle matrici degeneri corrisponde alla varietà duale della varietà di Segre  $\mathbf{P}^{k_0} \times \dots \times \mathbf{P}^{k_p}$ . Pertanto il Teorema 5.4 ha la seguente formulazione.

**TEOREMA 6.3** ([GKZ], Corollary 1.5.10). – *La varietà duale di  $\mathbf{P}^{k_0} \times \dots \times \mathbf{P}^{k_p}$  è una ipersuperficie se e solo se vale la disuguaglianza*

$$\max_j k_j = k_0 \leq \sum_{i=1}^p k_i$$

Quando la disuguaglianza è verificata, l'equazione della varietà duale a  $\mathbf{P}^{k_0} \times \dots \times \mathbf{P}^{k_p}$  è l'iperdeterminante.

Un aspetto merita un chiarimento. Siccome la varietà duale vive nello spazio duale, l'iperdeterminante è stato definito nello spazio duale a quello delle matrici, mentre vorremmo una funzione definita nello spazio stesso delle matrici. Nonostante non ci sia un isomorfismo canonico tra lo spazio delle matrici e il suo duale, questa apparente ambiguità viene risolta mediante l'invarianza. Possiamo costruire infiniti isomorfismi tra lo spazio delle matrici  $V_0 \otimes \dots \otimes V_p$  e il suo duale  $V_0^\vee \otimes \dots \otimes V_p^\vee$ , fissando una base costruita dai prodotti tensoriali delle basi dei singoli spazi  $V_i$ . Qualunque funzione sullo spazio delle matrici che è invariante ri-



spetto all'azione di  $SL(V_0) \times \dots \times SL(V_p)$  si trasporta mediante un isomorfismo allo spazio duale e, grazie all'invarianza, non dipende dall'isomorfismo scelto.

### 7. – L'iperdeterminante di Vandermonde

Fissati  $t_0, \dots, t_n$ , la matrice di Vandermonde ha coefficienti

$$a_{ij} = t_i^j$$

per  $i, j = 0, \dots, n$ . È ben noto che il suo determinante vale  $\prod_{i < j} (t_j - t_i)$ , e che viene utilizzato in problemi di interpolazione. Questo esempio si generalizza a matrici multidimensionali di formato bordo ed è uno dei pochi casi in cui è fattibile un calcolo esplicito. Si veda anche [WZ].

Per semplicità trattiamo il caso tridimensionale ma il ragionamento è analogo in dimensione maggiore.

Cerchiamo un polinomio  $f(t)$  di grado  $a + b$  che si fattorizzi nel prodotto di due polinomi di grado  $a$  e  $b$  e che abbia come radici i valori  $t_1, \dots, t_{a+b}$ , cioè tale che  $f(t_i) = 0$  per  $i = 1, \dots, a + b$ . Scriviamo  $f(t) = x(t)y(t) = (x_0 + x_1t + x_2t^2 + \dots + x_at^a)(y_0 + y_1t + y_2t^2 + \dots + y_bt^b)$ . L'uguaglianza  $x(t)y(t) = x_ay_b \prod_{i=1}^{a+b} (t - t_i)$  mostra che se i  $t_i$  sono distinti ci sono  $\binom{a+b}{a}$  soluzioni a meno di proporzionalità: infatti  $x(t)$  può essere calcolato scegliendo  $a$  tra le  $a + b$  radici. Aggiungiamo adesso un ulteriore valore  $t_0$ . Il sistema  $f(t_i) = 0$  per  $i = 0, \dots, a + b$  equivale al sistema multilineare

$$\sum_{j,k} t_i^{j+k} x_j y_k = 0 \quad \text{per } i = 0, \dots, a + b$$

che si può scrivere come

$$A(x \otimes y) = 0$$

dove

$$a_{ijk} = t_i^{j+k}$$

per  $i = 0, \dots, a + b, j = 0, \dots, a, k = 0, \dots, b$ . Chiamiamo questa ma-

trice tridimensionale  $A$  ancora *matrice di Vandermonde*. Il suo formato è  $(a + b + 1) \times (a + 1) \times (b + 1)$  e quindi è un formato bordo. Per il significato del sistema multilineare in termini di interpolazione, e per il Teorema 3.3, l'iperdeterminante di  $A$  deve essere diverso da zero quando le radici  $t_i$  sono distinte ma deve annullarsi quando due di esse coincidono. Segue che  $Det(A)$  è divisibile per ciascun polinomio  $(t_i - t_j)$  con  $0 \leq i < j \leq a + b$  e quindi per il prodotto  $\prod_{i < j} (t_i - t_j)$ . Dalla simmetria delle radici l'iperdeterminante può essere soltanto (a meno di costanti) una potenza di questa espressione. Ad esempio nel caso  $3 \times 2 \times 2$  si ricava dalla definizione che l'iperdeterminante di Vandermonde è uguale a  $(t_1 - t_0)^2(t_2 - t_0)^2(t_2 - t_1)^2$  per una costante moltiplicativa. Dall'invarianza relativa dell'iperdeterminante sappiamo che il grado di omogeneità è lo stesso per tutte le facce parallele. Si ricava che (a meno di costanti moltiplicative)

$$Det(A) = \prod_{i < j} (t_i - t_j)^\alpha$$

dove  $\alpha = \binom{a+b}{a}$ .

In [WZ], dati  $t_i, s_i$  per  $i = 0, \dots, a + b$  è definita la matrice  $a_{ijk} = t_i^j s_i^k$  per  $i = 0, \dots, a + b$ ,  $j = 0, \dots, a$ ,  $k = 0, \dots, b$ , che si riconduce al caso precedente quando  $t_i = s_i$ .

L'iperdeterminante vale (a meno di costanti moltiplicative)  $Det(A) = \prod_{i < j} (t_i - t_j)^\tau (s_i - s_j)^\sigma$  dove  $\tau = \binom{a+b-1}{a-1}$ ,  $\sigma = \binom{a+b-1}{b-1}$ .

## 8. – Conclusioni

Il determinante di una matrice quadrata soddisfa molte proprietà, che per matrici multidimensionali prendono aspetti diversi.

- La condizione per l'esistenza di soluzioni non banali a sistemi lineari omogenei si generalizza a *sistemi multilineari* nel caso del *formato bordo* (vedi Definizione 3.2), e permette di definire in modo soddisfacente l'iperdeterminante in questo caso (vedi la sezione 3).

Per matrici di formato diverso da quello bordo la condizione di esistenza di soluzioni non banali per sistemi multilineari ha una codi-

mensione maggiore di uno e non può essere espressa dall'annullarsi di un singolo invariante come l'iperdeterminante.

- Il determinante di una matrice quadrata è una funzione multilineare e alternante sulle righe. L'iperdeterminante gode di una proprietà analoga, infatti è *multiomogeneo* di grado fissato sulle fette, ma il grado di omogeneità è in generale maggiore di 1. La parità di questo grado determina se l'iperdeterminante, dopo lo *scambio* di due fette, *cambia segno* oppure *rimane invariato* (si veda il Teorema 3.4).

- Il determinante di ordine  $n$  soddisfa una formula ricorsiva mediante il determinante di ordine  $n - 1$ . Non sono note formule ricorsive per l'iperdeterminante. Si veda però l'esempio 5.6 per una applicazione dove si considerano iperdeterminanti di sottomatrici.

- Il determinante è dato dalla formula chiusa

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \varepsilon(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)}$$

In alcuni casi (come il formato  $2 \times 2 \times 2$ , vedi (11)) sono note sommatorie analoghe, ma in generale una formula esplicita non è nota. Nel formato bordo si può ricondurre l'iperdeterminante al calcolo di un determinante usuale, con una forma simile a quella del Teorema 2.6, utilizzando le potenze simmetriche, si veda il cap. 14 di [GKZ].

- Il determinante di una matrice triangolare (o diagonale) è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale. Nel caso di formato bordo la diagonale è ben definita, e l'iperdeterminante di una matrice *triangolare* (o *diagonale*) è ancora dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale, ma ciascuno con un esponente, di non facile calcolo (si veda [WZ] e gli esempi nella sezione 3).

- Il determinante descrive l'equazione della varietà duale alla varietà delle matrici di rango uno. Questa è la proprietà che si generalizza a un formato qualunque. In generale l'iperdeterminante di una matrice si può definire come l'equazione della *varietà duale* della varietà di Segre  $\mathbb{P}^{k_0} \times \dots \times \mathbb{P}^{k_p}$  quando quest'ultima è una ipersuperficie. Questo si verifica se e solo se  $\max_i k_i = k_0 \leq \sum_{i=1}^p k_i$  (il caso in cui vale l'uguale è infatti il formato bordo). Questo è spiegato nella sezione 6. Il testo più completo sugli iperdeterminanti è [GKZ], al

quale rimandiamo per le generalizzazioni nel contesto discreto, il cosiddetto  $A$ -discriminante dove  $A$  è un insieme di punti in  $\mathbb{Z}^n$ . L'iperdeterminante corrisponde al caso in cui  $A$  è il prodotto di semplici  $\Delta_{k_0} \times \dots \times \Delta_{k_p}$ .

Per approfondimenti storici e per un approccio di tipo omologico si veda [Bof, BW].

- Nonostante che l'iperdeterminante si possa legare al rango delle fette (si veda (3) per un esempio), la relazione tra rango e determinante per matrici a due dimensioni si perde per matrici multidimensionali. A ogni matrice multidimensionale è associato un tensore  $t$ . Si può esprimere  $t = \sum_{i=1}^r t_i$  dove  $t_i$  sono tensori decomponibili ed il *rango* è definito come il numero minimo di addendi in una tale espressione. Per matrici a due dimensioni questa nozione di rango coincide con quella usuale. Per matrici multidimensionali la nozione di rango mostra degli aspetti più sofisticati: la situazione nel caso reale è profondamente diversa dal caso complesso, inoltre l'insieme delle matrici di rango minore o uguale ad una costante non è più chiuso. Ad esempio una matrice  $2 \times 2 \times 2$  generale ha rango 2 (sui numeri complessi) mentre se il suo iperdeterminante (vedi (11)) si annulla ha in generale rango 3. La nozione di rango porta a degli invarianti molto interessanti, che sono equazioni di *varietà secanti*, oggetto di studio attuale, che sono diversi dall'iperdeterminante e che vanno oltre lo spazio di questa nota (si veda il bel lavoro [CGG] per una introduzione). Solo in pochi casi le varietà secanti in questione sono ipersuperfici e per descriverle sono necessarie più equazioni e non un singolo invariante come l'iperdeterminante.

*Il testo [GKZ] di Gelfand, Kapranov, Zelevinsky ha avuto il merito di riportare l'interesse sugli iperdeterminanti, che dopo i lavori classici di Cayley e Schläfli aveva subito una battuta d'arresto. È un testo che raccomando a tutti coloro che sono interessati ad approfondire questi argomenti. Segnalo anche la stimolante recensione [Cat] di [GKZ] da parte di Fabrizio Catanese ("a beautiful road which on the one hand comes from far away in the past, on the other hand projects us into the future").*

*Vincenzo Ancona, che aveva intuito subito l'importanza delle matrici multidimensionali e aveva organizzato un paio di cicli di*

*seminari su [GKZ] a Firenze, confidava di sfogliarlo spesso: “È un libro che si legge per piacere”. Ne acquistammo una copia ciascuno, che entrambi conserviamo gelosamente.*

*Quei seminari, a cui era davvero un piacere assistere, soprattutto quando erano tenuti da Vincenzo, furono il punto di partenza per alcuni lavori nostri [AO] e di altri colleghi [Val], e mi hanno fornito molte idee per la stesura di questo articolo.*

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [AO] V. ANCONA - G. OTTAVIANI, *Unstable hyperplanes for Steiner bundles and multidimensional matrices*, Adv. Geom. **1**, no. 2 (2001), 165-192.
- [Bof] G. BOFFI, *On a certain complex related to the notion of hyperdeterminant*, Invariant methods in discrete and computational geometry (Curaçao, 1994), 279-288, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
- [BBG] G. BOFFI - W. BRUNS - A. GUERRIERI, *On the Jacobian ideal of a trilinear form*, J. Algebra **197**, no. 2 (1997), 521-534.
- [BW] G. BOFFI - J. WEYMAN, *Koszul complexes and hyperdeterminants*, J. Alg. **230** (2000), 68-88.
- [CGG] M. V. CATALISANO - A. V. GERAMITA - A. GIMIGLIANO, *Ranks of tensors, secant varieties of Segre varieties and fat points*, Linear Algebra and Appl. **355** (2002), 263-285; Linear Algebra and Appl. **367** (2003), 347-348.
- [Cat] F. CATANESE, *Review of [GKZ]*, Bull. Amer. Math. Soc. **37** (2000), 183-198.
- [Cay] A. CAYLEY, *On the theory of linear transformations*, Cambridge Math. J., **4** (1845), 1-16.
- [DO] C. DIONISI - G. OTTAVIANI, *The Cauchy-Binet formula for hyperdeterminants of boundary format*, J. Algebra **259**, no. 1 (2003), 87-94.
- [GKZ] I. M. GELFAND - M. M. KAPRANOV - A. V. ZELEVINSKY, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants* Birkhäuser, Boston, 1994.
- [GKZ1] I. M. GELFAND - M. M. KAPRANOV - A. V. ZELEVINSKY, *Hyperdeterminants*, Adv. in Math., no. 96 (1992), 226-263.
- [Ghe] F. GHERARDELLI, *Osservazioni sugli iperdeterminanti*, Istituto Lombardo (Rend. Sc.) A **127** (1993), 107-113.
- [Pas] E. PASCAL, *I determinanti*, Hoepli, Milano, 1897.
- [Se] C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, Rend. Circ. Mat. Palermo, V (1891), 192-204, Opere, vol. I, 173-184, ed. Cremonese, Roma 1957.
- [Val] J. VALLÈS, *Nombre maximal d'hyperplanes instables pour un fibré de Steiner*, Math. Zeitschrift **233** (2000), 507-514.
- [WZ] J. WEYMAN - A. V. ZELEVINSKY, *Singularities of hyperdeterminants of boundary format*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **46**, 3 (1996), 591-644.

Dipartimento di Matematica e Informatica “U. Dini”, Università di Firenze  
viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze  
email: ottavian@math.unifi.it