Serena Dipierro

Fenomeni di concentrazione per problemi ellittici singolarmente perturbati e argomenti correlati

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (2013), n.3 (Fascicolo tesi di Dottorato), p. 513–516.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_3_513_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VI, Dicembre 2013, 513-516

Fenomeni di concentrazione per problemi ellittici singolarmente perturbati e argomenti correlati

SERENA DIPIERRO

Introduzione

In questa tesi studiamo i fenomeni di concentrazione per il seguente problema singolarmente perturbato:

$$-\varepsilon^2 \Delta u + u = u^p \qquad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato, $p \in \left(1, \frac{n+2}{n-2}\right)$ è sottocritico rispetto all'immersione di Sobolev e $\varepsilon > 0$ è un parametro piccolo.

Problemi del tipo (1) compaiono in molti modelli in fisica e in biologia. Esempi molto conosciuti sono l'equazione di Schrödinger nonlineare nel limite semiclassico e il sistema di Gierer-Meinhardt. Inoltre, imponendo sul bordo condizioni miste, l'equazione in (1) modellizza la dinamica delle popolazioni o la conduzione del calore.

Tipicamente, in queso tipo di problemi, la concentrazione della soluzione $U_{Q,\varepsilon}$ di (1) si ottiene scalando le variabili in questo modo: $U_{Q,\varepsilon}(x) \sim U\left(\frac{x-Q}{\varepsilon}\right)$, dove Q è un punto di $\bar{\Omega}$ e U è soluzione del problema

$$-\Delta U + U = U^p \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (\text{o in } \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}), \tag{2}$$

e la scelta del dominio dipende dal fatto che Q è nell'interno di Ω o sul bordo. Nel 1983, Berestycki e Lions hanno dimostrato che se $p < \frac{n+2}{n-2}$ (e solo se questa disuguaglianza è soddisfatta), il problema (2) ammette soluzioni positive, radiali, radialmente decrescenti, che decadono a zero all'infinito esponenzialmente.

Illustriamo i risultati noti nel caso in cui il bordo di Ω è regolare. Nel caso in cui si impongono condizioni di Neumann sul bordo, cioè si richiede che la derivata normale della soluzione sia nulla sul bordo, nel 1991-93 Ni e Takagi hanno dimostrato che le soluzioni di passo montano si concentrano sul bordo di Ω in punti di massimo globale della curvatura media. Invece, nel caso in cui si impongono condizioni di Dirichlet sul bordo, cioè si richiede che la soluzione sia uguale a zero sul bordo, nel 1995 Ni e Wei hanno dimostrato che le soluzioni ad energia minima si concentrano all'interno di Ω in punti che massimizzano la distanza dal bordo. Infine, imponendo condizioni miste di Neumann e Dirichlet sul bordo, nel 2010 Garcia Azorero, Malchiodi, Montoro e Peral hanno costruito soluzioni che si concentrano sull'intersezione tra la parte di Neumann e quella di Dirichlet, sotto opportune condizioni geometriche sul bordo.

Condizioni di Neumann

Il primo problema che abbiamo studiato è (1) con condizioni di Neumann sul bordo; si veda [2]. Assumiamo per semplicità che $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sia un dominio limitato, liscio a tratti, il cui bordo $\partial\Omega$ abbia un numero finito di spigoli lisci. Fissiamo uno spigolo Γ del bordo e consideriamo la funzione $\alpha : \Gamma \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni punto $Q \in \Gamma$ l'angolo di apertura in Q, $\alpha(Q)$.

Analogamente al caso dei domini lisci, ci aspettiamo che la funzione α giochi lo stesso ruolo della curvatura media H per un dominio liscio. Infatti, il risultato ottenuto è il seguente:

TEOREMA 1. – *Supponiamo che* $1 < p < 5$. *Fissiamo uno spigolo* Γ, *e supponiamo che* $Q \in \Gamma$ *sia un punto di massimo o di minimo stretto locale per la funzione* α, *con* $\alpha(Q) \neq \pi$. *Allora, per* $\varepsilon > 0$ *sufficientemente piccolo, il problema* (1) *con condizioni di Neumann sul bordo ammette una soluzione che si concentra in* Q.

La strategia generale per dimostrare il Teorema 1 si basa sulla riduzione finito-dimensionale; si veda la Sezione 2.1 in [2]. Prima di tutto, bisogna definire una varietà Z_ε di soluzioni approssimate del problema dato, che sono della forma $U_{Q,\varepsilon}(x) = \varphi_\mu(\varepsilon x)U(x - Q)$, dove φ_μ è un'opportuna funzione cut-off definita in un intorno di $Q \in \Gamma$. Inoltre, è necessario verificare una condizione di non-degenerazione della varietà Z_ε. La difficoltà rispetto al caso dei domini lisci risiede nel fatto che il caso limite è il problema non perturbato in un dominio del tipo $K = \tilde{K} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, dove $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^2$ è un cono di angolo di apertura $\alpha(Q)$, invece che in $\mathbb{R}^3$ o in $\mathbb{R}^3_+$. Quindi, dato che la dimostrazione della non-degenerazione si basa sull'analisi di Fourier, abbiamo bisogno di armoniche sferiche definite su una porzione della sfera invece che su S^2.

Dunque risolviamo l'equazione a meno di un vettore parallelo al piano tangente della varietà Z_ε e costruiamo una nuova varietà $\tilde{Z}_\varepsilon$, vicina a Z_ε, che rappresenta un vincolo naturale per il funzionale assoociato al problema. Per *vincolo naturale* intendiamo un insieme per cui i punti critici del funzionale vincolati all'insieme sono veri e propri punti critici.

Infine, applichiamo il metodo perturbativo per ridurre il problema originario ad uno finito-dimensionale e studiamo il funzionale vincolato a $\tilde{Z}_\varepsilon$. Otteniamo un'espansione dell'energia delle soluzioni approssimate centrate in Q, che ci permette di notare che il termine dominante è $\alpha(Q)$. Da questo deduciamo il Teorema 1.

Condizioni miste

Il secondo problema che studiamo è (1) con condizioni miste al bordo, si veda [3]. Più precisamente:

$$
\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = u^p & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \partial_N \Omega, & u = 0 \quad \text{su } \partial_D \Omega, \end{cases} \tag{3}
$$

dove ν denota la normale esterna unitaria e ε un parametro piccolo. Assumiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, sia un dominio limitato, il cui bordo ha una singolarità liscia $(n-2)$-dimensionale, che denotiamo con Γ, e che $p \in \left(1, \dfrac{n+2}{n-2}\right)$ $(1 < p < +\infty$ se $n = 2)$ sia sottocritico. Inoltre, $\partial_N \Omega$, $\partial_D \Omega$ sono due sottoinsiemi del bordo di Ω tali che l'unione delle chiusure coincida con $\partial\Omega$ e la loro intersezione sia Γ.

Denotiamo con H la curvatura media di $\partial\Omega$ ristretta alla chiusura di $\partial_N\Omega$, cioè $H : \overline{\partial_N \Omega} \to \mathbb{R}$. Il risultato che otteniamo è il seguente:

TEOREMA 2. – *Supponiamo che $Q \in \Gamma$ sia tale che $\alpha(Q) \neq 0$, che $H|_\Gamma$ sia critico e non-degenere in Q e che $\nabla H(Q) \neq 0$ punti verso $\partial_D\Omega$. Allora, per ε sufficientemente piccolo, il problema* (3) *ammette una soluzione che si concentra in Q.*

Con più precisione, possiamo dire che, per ε piccolo, la soluzione ottenuta possiede un unico punto di massimo globale $Q_\varepsilon \in \partial_N\Omega$ e che $dist(Q_\varepsilon, \Gamma)$ è di ordine $\varepsilon \log \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Come nel caso precedente, la strategia per dimostrare il Teorema 2 si basa sulla riduzione fnito-dimensionale. La differenza principale risiede nel fatto che in questo caso abbiamo bisogno di modificare la soluzione in modo che essa si annulli sulla parte di Dirichlet. Dunque, per costruire le soluzioni approssimate partiamo da quelle note in letteratura per il problema di Neumann nel caso di dominio liscio. Poiché queste funzioni non si annullano su $\partial_D\Omega$, usiamo l'*operatore di proiezione* in $H^1(\Omega)$, che associa ad ogni funzione in $H^1(\Omega)$ il più vicino elemento in $H^1_D(\Omega)$, che è lo spazio delle funzioni di $H^1(\Omega)$ con traccia nulla su $\partial_D\Omega$. Possiamo dunque definire la varietà critica e applicare il metodo perturbativo per ridurre il problema ad uno finito-dimensionale.

L'espansione dell'energia che otteniamo presenta dei termini che coinvolgono la curvatura media (che sono legati alle condizioni di Neumann) e dei termini in cui interviene la distanza del punto dalla singolarità (che tengono conto dell'effetto repulsivo del bordo dovuto alle condizioni di Dirichlet). Inoltre, in questi ultimi appare l'angolo di apertura $\alpha(Q)$ solo se $0 < \alpha(Q) < \dfrac{\pi}{2}$; questo fenomeno è dovuto al fatto che la distanza del punto Q dalla parte di Dirichlet $\partial_D\Omega$ dipende da $\alpha(Q)$ solo se $0 < \alpha(Q) < \dfrac{\pi}{2}$. Dunque possiamo concludere che la soluzione approssimata viene spinta verso Γ dal gradiente di H e viene respinta da Γ dalle condizioni di Dirichlet. In ogni caso, poiché il termine dominante è quello legato alle condizioni di Neumann, otteniamo il risultato enunciato nel Teorema 2.

Problemi di esistenza che riguardano il laplaciano frazionario

Un'altro problema di ricerca consiste nello studio dei fenomeni di concentrazione per equazioni ellittiche che coinvolgono il laplaciano frazionario. In particolare,

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s u + u = u^p, \qquad \text{per } s \in (0,1). \tag{4}$$

Per la definizione di laplaciano frazionario e degli spazi di Sobolev frazionari si veda [1]. Per questo scopo, un primo passo è costruire la soluzione del problema non perturbato in $\mathbb{R}^n$, che dovrebbe essere usata per definire le soluzioni approssimate di (4), si veda [4]. Cerchiamo, quindi, una soluzione non negativa $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ del problema

$$(-\Delta)^s u + u = u^p \text{ in } \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

dove $H^s(\mathbb{R}^n)$ denota lo spazio di Sobolev frazionario, si veda [1]. In particolare, siamo interessati alle proprietà di simmetria delle soluzioni di (5):

TEOREMA 3. – *Sia $s \in (0,1)$ e $p \in (1, (n+2s)/(n-2s))$, con $n > 2s$. Allora esiste una soluzione $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ del problema* (5) *che è positiva e radiale.*

Notiamo che il limite superiore per l'esponente p è esattamente $2_s^* + 1$, dove $2_s^* = 2n/(n-2s)$ è l'esponente critico per l'immersione di Sobolev $H^s \hookrightarrow L^p$.

La dimostrazione del Teorema 3 estende al laplaciano frazionario parte della dimostrazione nel caso del laplaciano classico fatta da Berestycki e Lions nel 1983. In particolare, usiamo un approccio variazionale applicando il metodo dei minimi vincolati al funzionale associato a (5). Il metodo si basa sulla selezione di una opportuna sequenza minimizzante costituita da funzioni radiali. Rispetto al caso classico, sono necessarie alcune modifiche tecniche dovute al carattere non locale dell'operatore laplaciano frazionario (e della corrispondente norma $H^s(\mathbb{R}^n)$).

Per studiare i fenomeni di concentrazione nel caso frazionario è necessario superare una serie di difficoltà concettuali. Prima di tutto, per applicare il metodo perturbativo, dobbiamo verificare una condizione di non-degenerazione, che è molto più complicata rispetto al caso classico, poiché dovremmo calcolare esplicitamente derivate frazionarie e integrali singolari. Inoltre, il decadimento delle soluzioni di (5) è solo polinomiale e non esponenziale, come accade nel caso classico; pertanto il decadimento delle soluzioni nell'intero spazio potrebbe essere troppo lento e creare una difficoltà nella localizzazione dei punti di concentrazione. Infine, il laplaciano frazionario ha, in generale, un effetto regolarizzante inferiore al caso classico (ad esempio, le soluzioni del problema frazionario sono, in generale, uniformemente continue ma non C^1 fin sul bordo).

BIBLIOGRAFIA

[1] DI NEZZA E., PALATUCCI G. e VALDINOCI E., *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math., **136**, no. 5 (2012), 521-573.

[2] DIPIERRO S., *Concentration of solutions for a singularly perturbed Neumann problem in non-smooth domains*, Ann. Inst. H. Poincaré (C) Anal. Non Linéaire, **28**, no. 1 (2011), 107-126.

[3] DIPIERRO S., *Concentration of solutions for a singularly perturbed mixed problem in non-smooth domains*, J. Differential Equations, **254**, no. 1 (2013), 30-66.

[4] DIPIERRO S., PALATUCCI G. e VALDINOCI E., *Existence and symmetry results for a Schrödinger type problem involving the fractional laplacian*, Le Matematiche, **68**, no. 1 (2013).

CMM - Universidad de Chile, Santiago
e-mail: dipierro@sissa.it, serydipierro@yahoo.it
Dottorato in Analisi Matematica, con sede presso SISSA - Scuola Internazionale Superiore degli Studi Avanzati, Trieste (Italia) – Ciclo XXIV
Direttore di ricerca: Prof. Andrea Malchiodi, SISSA - Trieste