La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Sofia Tirabassi

Sizigie, mappe pluricanoniche e la geometria birazionale delle varietà di dimensione di Albanese massima

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (2013), n.3 (Fascicolo tesi di Dottorato), p. 529–532.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_3_529_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VI, Dicembre 2013, 529-532

Sizigie, mappe pluricanoniche e la geometria birazionale delle varietà di dimensione di Albanese massima

SOFIA TIRABASSI

Nel 1981 Mukai ha sviluppato uno strumento, chiamato trasformata di Fourier–Mukai, particolarmente adatto allo studio degli spazi di moduli di fibrati vettoriali su di varietà abeliane. Nella mia tesi di dottorato ho utillizzato i funtori di Fourier–Mukai per indagare la geometria di oggetti strettamente correlati alle varietà abeliane. Nello specifico ho trattato i seguenti argomenti:

- sizigie delle varietà di Kummer (classiche e singolari);
- geometria birazionale di varietà di dimensione di Albanese massima;
- mappe pluricanoniche di varietà di dimensione di Albanese massima.

Nelle sezioni a seguire spiegherò i risultati da me ottenuti in questi campi, talora menzionando delle loro possibili evoluzioni.

1. – Sizigie di varietà di Kummer

Sia Z una varietà proiettiva ed L un fascio invertibile molto ampio su Z. Si considerino gli anelli graduati $S_L := \mathrm{Sym}^\bullet(H^0(Z, L))$ e $R_L := \bigoplus_{n\geq 0} H^0(Z, L^{\otimes n})$. Allora, per il teorema delle sizigie di Hilbert, esiste una risoluzione libera minima

$$0 \to \cdots \to E_p \to \cdots \to E_1 \to E_0 \to R_L \to 0,$$

dove $E_i = \oplus_j S_L(-a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $a_{ij} \geq 0$.

DEFINIZIONE 1.1. – *Si dice che il fibrato L soddisfa la proprietà N_p^r se $a_{0j} \leq 1 + r$ per ogni j e $a_{ij} \leq i + 1 + r$ per ogni $i \leq p$.*

Data, quindi, una varietà proiettiva Z ed una sua polarizzazione L, è naturale chiedersi per quali n interi positivi il fibrato in rette $L^{\otimes n}$ soddisfi la proprietà N_p^r. Nel caso in cui Z sia una varietà abeliana tale problema è stato studiato con successo da Kempf, Pareschi, Pareschi–Popa, e Lazarsfeld–Pareschi–Popa.

Le varietà di Kummer (quozienti di varietà abeliane per l'involuzione naturale indotta dall'operazione di gruppo) sono, per costruzione, strettamente legate alle varietà abeliane. Viste anche le forti relazioni esistenti tra le polarizzazioni su una varietà di Kummer K_X con i fibrati in rette sulla corrispondente varietà abeliana X, era del tutto naturale chiedersi se le tecniche impiegate per le varietà abeliane potessero essere applicate allo studio delle sizigie delle Kummer. Il risultato principale da me ottenuto in tal senso (e accettato per la pubblicazione in [3]), estendendo il lavoro di Kempf e Khaled, è il seguente:

TEOREMA 1.1. – *Sia X una varietà abeliana; si denoti con K_X la varietà di Kummer ad essa associata e con $\pi_X : X \longrightarrow K_X$ la suriezione canonica. Dato L un fibrato in rette ampio su K_X allora*

(i) *il fibrato $L^{\otimes n}$ soddisfa la proprietà N_p^r per ogni n tale per cui $L^{\otimes n}$ sia molto ampio e $(r+1)n \geq p+2$;*
(ii) *se $\pi_X^* L \simeq A^{\otimes 2}$ con A fascio invertibile su X, simmetrico, ampio e senza divisore base, allora il fibrato $L^{\otimes n}$ soddisfa la proprietà N_p^r per ogni n tale per cui $L^{\otimes n}$ sia molto ampio e $(r+1)n \geq p+1$.*

La dimostrazione di questo teorma è stata ottenuta per induzione sul numero naturale p utilizzando delle tecniche che appaiono già nei lavori di Kempf e la più recente teoria dell'M-regolarità introdotta da Pareschi–Popa.

I risultati presentati nell'enunciato qui sopra sono ottimali per $p = 0, 1$, e le tecniche utilizzate non permettono di migliorarli ulteriormente per p grande. È però auspicabile che, anche grazie all'utilizzo delle trasforamte di Fourier-Mukai equivarianti, introdotte da Ploog nellla sua tesi di dottorato, al posto delgi usuali funtori integrali, si possa migliorare il tutto di un “fattore 2”, così come i lavori di Pareschi e Pareschi-Popa hanno migiorato di un “fattore 2” i risultati sulle varità abeliane di Kempf.

2. – Geometria birazionale delle varietà di dimensione di Albanese massima

Un'interessante linea di ricerca iniziata da Ein–Lazarsfeld e ampliata grazie a risultati di Hacon, Hacon–Pardini, Pirola, Barja–Lahoz–Naranjio–Pareschi e Pareschi consiste nel riconoscere modelli lisci di divisori theta, dati i loro invarianti birazionali. Un immediato sviluppo di questi argomenti consiste nel vedere se le tecniche ideate da questi autori possono essere applicate allo studio dei prodotti di divisori theta.

Prima di esporre in maniera rigorosa il problema da me affrontato, ritengo opportuno ricordare alcune definizioni.

DEFINIZIONE 2.1. – *Sia Z una varietà complessa, proiettiva, liscia. La sua varietà di Albanese è il dato di una coppia* $(\mathrm{Alb}(Z), \mathrm{alb}_Z)$ *dove* $\mathrm{Alb}(Z)$ *è una varietà abeliana,* $\mathrm{alb}_Z : Z \to \mathrm{Alb}(Z)$ *è un morfismo tale che ogni altra mappa da Z ad una varietà abeliana si fattorizza in modo unico (a meno di traslazione) tramite* alb_Z.

La mappa alb_Z è detta *morfismo di Albanesse di Z* mentre $\mathrm{alb}_Z(Z)$ è *l'immagine di Albanese di Z*. Si dice che Z è di *dimensione di Albanese massima* se la sua mappa di Albanese è genericamente finita.

In questo contesto Pareschi ha congetturato il seguente enunciato:

> Sia data Z una varietà complessa liscia proiettiva di dimensione di Albanese massima e con caratteristica di Eulero $\chi(\omega_Z) = 1$ la cui immagine di Albanese non è fibrata in sottotori. Allora Z è birazionale ad un prodotto di divisori theta.

Grazie al lavoro di Hacon–Pardini e Pirola, è noto come la congettura sia vera per le superfici e per le varietà con irregolarità pari a $2 \dim Z$.

Nella mia tesi di dottorato ho, innanzitutto, dimostrato che nelle ipotesi dell'enunciato qui sopra la mappa di Albanese di Z è sempre birazionale. Usando questo fatto sono poi riuscita a dimostrare il seguente

TEOREMA 2.1. – *Sia Z come nella congettura e si supponga che l'immagine di Albanese di Z sia normale. Si considerino i luoghi di svanimento generico*

$$V^i(Z) := \{\alpha \in \mathrm{Pic}^0(Z) | h^i(Z, \omega_Z \otimes \alpha) \neq 0\}$$

dove ω_Z denota il fibrato canonico di Z. Se il fascio strutturale O_Z è un punto isolato dei $V^i(Z)$ per ogni i positivo, allora la varietà di Albanese di Z è prinipalmente polarizzata e l'immagine di Albanese di Z è una polarizzazione principale.

3. – Mappe pluricanoniche di varietà irregolari

Sia Z una varietà complessa proiettiva liscia e si denoti con K_Z la sua classe canonica. È ben noto che esiste uno spazio di fibre algebrico $f : Z \to Y$, detto fibrazione di Iitaka di Z, tale che, se n è un intero positivo abbastanza grande, allora la mappa razionale indotta dal sistema n-canonico, $|nK_Z|$, è birazionalmente equivalente a f. È, quindi, naturale cercare di trovare (nel caso esista) un limite effettivo per tale intero, i.e. si vuole cercare un $n_0(X)$ tale per cui per ogni $n \geq n_0$ la mappa n-canonica sia un modello della fibrazione di Iitaka di Z.

Nel caso di curve e superfici di tipo generale la risposta a questo problema è nota da tempo. Nel caso di varietà di tipo generale di dimensione superiore tale questione è stata recentemente affrontata da Hacon-Mckernan, Takayama, Todorov e Chen–Chen (per quanto conerne le 3-fold).

Sotto l'ulteriore ipotesi che Z abbia dimensione di Albanese massima (vedere sezione precedente), questo studio ha portato risultati sorprendenti, in quanto si è visto che è possibile trovare un tale intero n_0 indipendente dalla varietà Z o dalla sua dimensione. Ad esempio, Chen–Hacon hanno dimostrato che, per varietà di tipo generale, la mappa esacanonica $\varphi_{|6K_Z|}$ è sempre birazionale, mentre Jiang, usando idee di Pareschi–Popa, ha visto come la mappa pentacanonica induca sempre la fibrazione di Iitaka. In quest'ambito ho ottenuto due risultati. Il primo, pubblicato in [2] è il seguente

TEOREMA 3.1. – *Sia Z una varietà complessa proiettiva di tipo generale e dimensione di Albanese massima. Allora la mappa tetracanonica $\varphi_{|4K_Z|}$ è sempre birazionale.*

Il secondo, ottenuto in collaborazione con Z. Jiang and M. Lahoz, e pubblicato in [1], è un miglioramento del primo.

TEOREMA 3.2. – *Sia Z una varietà proiettiva di dimensione di Albanese massima.*

(i) *Per ogni $m \geq 4$ il sistema m-canonico di Z induce la fibrazione di Iitaka.*
(ii) *Se Z è di tipo generale, la mappa 3-canonica è birazionale.*

Ritengo importante sottolineare che entrambi i limiti inferiori che appaiono nell'enunciato sono ottimali.

BIBLIOGRAFIA

[1] JIANG Z., LAHOZ M. and TIRABASSI S., *On the Iitaka fibration of varieties of maximal Albanese dimension*, IRMN, **99** (2012), 199-200.
[2] TIRABASSI S., *On the tetracanonical map of varieties of general type and maximal Albanese dimension*, Collectanea Mathematica, **99** (2012), 199-200.
[3] TIRABASSI S., *Syzygies and equations of Kummer varieties*, Bull. Lon. Math. Soc. **45** (2013), no. 3, 651-665.

Dipartimento di Matematica, Università dello Utah
e-mail: sofia@math.utah.edu
Dottorato di Ricerca in Matematica
con sede presso l'Università degli Studi Roma TRE – XXIV Ciclo
Direttore di Ricerca: Prof. Giuseppe Pareschi