La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Gabriele Lolli

Fondamenti e paradossi

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (2014), n.3 (Matematica e filosofia. Contributi al dialogo interdisciplinare), p. 445–460.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2014_1_7_3_445_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2014.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VII, Dicembre 2014, 445-460

Fondamenti e paradossi

GABRIELE LOLLI

I paradossi accompagnano e scandiscono da sempre nella storia la crescita della matematica; un paradosso secondo l'etimologia è qualcosa che si discosta o va contro l'opinione comune, o quella ereditata: παρά δόξαν. La δόξα può essere una credenza metafisica su come deve essere e essere fatta la matematica, oppure semplicemente un dominio matematico consolidato con le sue leggi. In ogni caso è il vecchio che resiste al nuovo. L'irrazionalità di $\sqrt{2}$ contraddiceva l'assunzione pitagorica imperante che ogni grandezza fosse misurabile, quindi esprimibile con un numero razionale, rispetto a una opportuna unità di misura. Gli infinitesimi erano paradossali per il rifiuto dell'infinito attuale, motivato frettolosamente dall'annichilamento del numero ($a + \infty = \infty$). L'immaginario $\sqrt{-1}$ contraddiceva la regola dei segni dei numeri, già faticosamente accettata.

I paradossi indicano qualcosa di inaspettato per la pigrizia mentale collettiva, qualcosa che chiede di modificare le convinzioni acriticamente assorbite. I paradossi di solito svaniscono quando la nuova matematica si consolida e si impone; facciamo fatica ora a ricostruire gli argomenti di Zenone contro il moto.

Nell'età contemporanea, a cui è dedicata questa riflessione, un nuovo tipo di paradossi, più resistenti ed elusivi, hanno alimentato la discussione sui fondamenti della matematica. Il problema dei fondamenti è nato quando si è presa coscienza che la nuova matematica non aveva giustificazione o origine esterne, dal mondo, e nello stesso tempo meravigliava il suo successo.

1. – Paradossi insiemistici

Nella seconda metà dell'Ottocento si credeva di poter affermare, con gli strumenti culturali del tempo, che la matematica è libera creazione della mente, soggetta solo a vincoli di coerenza. La coerenza aveva diverse sfumature: per Georg Cantor [1845-1918] si trattava di armonizzare i nuovi concetti con quelli consolidati, per esempio i numeri transfiniti come estensione dei numeri finiti; l'estensione era guidata spesso da analogie formali o trascinata dai simboli stessi; per David Hilbert [1862-1943] la coerenza era l'impossibilità della contraddizione logica. La mente era variamente intesa, in generale come logica naturale, non necessariamente codificata, una logica in Germania di derivazione kantiana, o addirittura da Port-Royal. ([1]) Essa si riduceva praticamente, a parte le regole tacite degli operatori logici, al principio di comprensione: ogni condizione determina o un concetto o una estensione del concetto, un sistema di enti che soddisfano la condizione. Richard Dedekind [1831-1916] lo richiamava come un modo comune di pensare quando presentava nel 1888 la sua fondazione insiemistica dei numeri naturali:

> Capita spesso che diverse cose *a*, *b*, *c* ... considerate per qualche ragione sotto uno stesso punto di vista siano riunite insieme nella mente, e allora uno dice che esse formano un *sistema S*. ([2])

Nella penultima versione del 1887:

> Noi trattiamo tutte le cose che hanno una proprietà comune, nella misura in cui le differenze tra di esse non sono importanti, come una cosa nuova in contrasto con tutte le altre cose. La chiamiamo sistema, o totalità di tutte queste cose. ([3])

Altri ritenevano necessario ridefinire la logica rigorosamente, e simbolicamente, per evitare la vaghezza del linguaggio naturale, a partire dalla scrittura concettuale [*Begriffschrift*] di Frege (1879); tuttavia Gottlob Frege [1848-1925] manteneva, nella sua opera fondamentale, ([4]) il principio di comprensione come pilastro essenziale, e fatale.

([1]) Arnauld e Nicole (1662).
([2]) Nel § 1 di Dedekind (1888); nella terminologia consolidata la parola "sistema" sarà rimpiazzata da "insieme". Le traduzioni sono dell'autore.
([3]) Citato da Lolli (2013), p. 44.
([4]) Frege (1893-1903).

La fiducia generica nella capacità di pensare, in generale convincente e acritica, venne messa in crisi dalla scoperta dei bachi della logica nel corso della costruzione della teoria degli insiemi: le antinomie fanno perdere l'innocenza.

Le prime antinomie riguardano ordinali e cardinali. L'antinomia del massimo ordinale consiste nell'osservare che l'insieme di tutti gli ordinali, con la relazione d'ordine, ha la stessa struttura degli ordinali, e dovrebbe quindi essere un ordinale, che avrebbe tuttavia un successore più grande. L'antinomia del massimo cardinale è analoga: l'insieme di tutti i cardinali dovrebbe avere un cardinale maggiore di tutti i suoi elementi e quindi di tutti i cardinali. Entrambe erano note a Cantor e a Ernst Zermelo [1871-1953] verso il 1897. Esse dipendevano dalla considerazione della totalità di determinati enti come un insieme o, come la chiamava Bertrand Russell [1872-1970], dalla classe totale.

Quando aveva scoperto la contraddizione del massimo cardinale, Russell aveva giustamente colto l'analogia della dimostrazione con l'argomento del teorema di Cantor sulla non esistenza di una suriezione di x su $\mathscr{P}(x)$, (5) ed era convinto inizialmente che la contraddizione fosse apparente perché la dimostrazione gli sembrava difettosa. Ma presto aveva messo il dito sul vero responsabile (anzi aveva tratto ispirazione dall'argomento di Cantor, come diremo, per elaborare la propria antinomia).

> La difficoltà sorge tutte le volte che cerchiamo di trattare con la classe di tutte le entità in senso assoluto, o con una qualunque altra classe parimenti numerosa; se non fosse della difficoltà di un tale punto di vista, si sarebbe tentati di dire che la concezione [...] dell'intero universo di entità e di esistenti, risulta in qualche modo illegittima ed essenzialmente contraria alla logica. Ma non è auspicabile adottare una misura così draconiana, finché resta la speranza di trovare una soluzione un po' meno eroica. (6)

(5) $\mathscr{P}(x)$ è l'insieme dei sottoinsiemi di x. Se si assume una $f\colon x \to \mathscr{P}(x)$ suriettiva, si consideri il sottoinsieme di x definito da $R = \{y \in x | y \notin f(y)\}$; R sarebbe $f(s)$ per qualche $s \in x$, ma $s \in f(s)$ se e solo se $s \notin f(s)$.

(6) Russell (1903), § 344.

Lo stesso Russell formulava nel 1901 e rendeva pubblica in Russell (1903) l'antinomia dell'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi; in notazione moderna: $R = \{x | x \notin x\}$, per cui $R \in R \leftrightarrow R \notin R$.(7)

Russell chiamava inizialmente "contraddizioni" le antinomie (pare che il primo a chiamarle antinomie sia stato Henri Poincaré [1854-1912] nel 1906). Le antinomie non sono come i paradossi, che lasciano una via d'uscita; sono qualcosa da cui non si scappa, che mostrano un ostacolo insormontabile.

Informato nel 1899 da Cantor delle contraddizioni nella logica, che identificava con la teoria degli insiemi, Dedekind resta muto, appare incerto su come reagire, al punto che nel 1903 non concede l'autorizzazione alla terza ristampa del suo libro del 1888. Quando la darà nel 1911, pur riferendosi nella prefazione ai dubbi residui sulla teoria degli insiemi, non menziona esplicitamente l'assiomatizzazione di Zermelo (1908b) intervenuta nel frattempo, e che sarebbe una cornice adeguata per le sue ricerche. Si limita a esprimere la speranza che il proprio lavoro venga garantito e riabilitato dalla "capacità del nostro spirito":

> La mia fiducia nell'armonia interna della nostra logica non è scossa; io credo che un'indagine rigorosa della capacità del nostro spirito di creare, a partire da determinati elementi, una nuova entità determinata, il loro sistema, necessariamente diversa da ciascuno di questi elementi, arriverà certamente a rendere i fondamenti del mio scritto immuni da ogni obiezione.

L'auspicio di Dedekind non si è realizzato. La logica ha dovuto prendere atto che il principio di comprensione deve essere ristretto, ma non si è trovato un criterio condiviso; si sono sperimentate varie soluzioni, in particolare quelle delineate in Russell (1906): la complessità sintattica delle definizioni, la distinzione di tipi logici. Russell con la *no class theory* proponeva anche una trattazione che evitasse la reificazione delle definizioni, ma a parte la difficoltà tecnica questa impostazione equivale a rinunciare completamente alla comprensione.

(7) Nella dimostrazione di Cantor, immaginando x come insieme universale, si ponga f come la funzione identica.

Periodicamente si riprova, nella speranza che qualche nuovo linguaggio faccia il miracolo, perché sembra che in esso sia naturale parlare della totalità di tutte le cose di un dato genere come di una cosa dello stesso genere: per esempio la categoria di tutte le categorie è ancora una categoria. Ma non se ne esce, l'unica soluzione praticabile è stata quella di escludere l'insieme universale con restrizioni sulla costruzione di insiemi inserite negli assiomi, piuttosto che nella logica. La matematica si è vista costretta a trovare lei soluzioni per difendersi da una logica a cui pensava di affidarsi e che invece al microscopio si è rivelata non adeguata.

Se la logica si è rotta le corna nel tentativo di plasmare la matematica, nel corso dell'impresa ha costruito diversi sistemi importanti, i quali con la loro esistenza e specifica efficacia provano che la logica non è una. La consapevolezza della molteplicità delle logiche potrebbe essere una nuova δόξα di cui fare tesoro, ma la maggior parte dei matematici preferisce ignorarla e pensare ora che la logica non c'entra nulla con il proprio lavoro, e non deve disturbare il guidatore. Così non è. Altri paradossi hanno fatto la loro comparsa, come era da aspettarsi vista la grande novità della matematica dell'infinito.

2. – Il principio di scelta

Una forma di inferenza che è stata da molti considerata paradossale all'inizio della teoria degli insiemi è quella giustificata dal principio di scelta. In una delle formulazioni equivalenti il principio afferma che se x è un insieme non vuoto di insiemi non vuoti, esiste un insieme la cui intersezione con ogni elemento di x contiene un unico elemento (insieme di scelta per l'insieme x); oppure che esiste una funzione da x nell'unione $\cup x$ tale che $f(y) \in y$ per ogni $y \in x$ (funzione di scelta). Una δόξα abbastanza diffusa vietava di fare appello al principio, ritenendo che esso dovesse valere solo nei domini finiti; l'uso inconsapevole era tuttavia frequente, per il fatto che nel trattare insiemi infiniti si tendeva a usare la logica usuale, la quale è giustificata, in particolare per quel che riguarda i quantificatori, solo nel finito: la negazione di $\forall x A(x)$ equivale senza perplessità a $\exists x \neg A(x)$ solo se gli elementi del dominio si possono passare in rassegna uno per uno, il che non è possibile se il dominio è infinito. Ma l'esistenza non può essere conseguenza delle nostre limitazioni.

Una volta messo in dubbio che le leggi logiche potessero essere le stesse, si imponeva la precisazione di una logica dell'infinito diversa, con una revisione che andava ben al di là della questione del principio di comprensione. La proposta più organica in tal senso è dovuta a Luitzen E. J. Brouwer [1881-1966] e ha portato a sviluppare una matematica, quella intuizionistica, che è fortemente divergente da quella che per contrasto è chiamata classica.

L'intuizionismo è la filosofia più conseguente, se si afferma il carattere mentale della produzione della matematica e si attribuisce alla mente una capacità di intuizione del numero attraverso il senso dello scorrere del tempo. Mentre nel finito la matematica intuizionistica si identifica con l'operare calcolabile e decidibile, essa sviluppa una vera logica alternativa dell'infinito. Brouwer non voleva codificarla in regole e sistemi formali, ma lo hanno fatto i suoi successori. La logica intuizionistica differisce da quella classica per il rifiuto del principio del terzo escluso, o *tertium non datur*, $A \vee \neg A$ per affermazioni A non decidibili; le conseguenze si esplicitano sopratutto nelle regole per i quantificatori: l'equivalenza $\neg \forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \neg A(x)$ è una generalizzazione della legge di De Morgan $\neg (A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$, che dipende dal terzo escluso.

Hilbert riteneva comprensibili le perplessità relative alle affermazioni "infinitarie" (contenenti quantificatori su domini infiniti), e ha cercato una soluzione meno drastica che non deformasse la logica classica, in quanto convinto che

> nessuno, per quanto parli la lingua degli angeli, tratterrà gli uomini dal negare asserzioni universali e [...] dall'adoperare il *tertium non datur*. ([8])

La soluzione di Hilbert era quella di negare che tali affermazioni avessero un contenuto sostenendo tuttavia che si potesse continuare a usarle in modo formale, cioè privo di significato, come elementi ideali

([8]) Hilbert (1925), trad. it. p. 247.

aggiunti alle affermazioni contenutistiche, se si fosse potuto dimostrare, con la logica del finito, che tale uso non porta a contraddizioni. Il programma di Hilbert è stato dimostrato irrealizzabile con i teoremi di incompletezza, ([9]) e dal suo fallimento l'alternativa intuizionistica ha derivato maggiore legittimità.

Se per il numerabile ancora in fondo non si hanno differenze tragiche tra le due matematiche, il continuo atomistico classico appare inadeguato rispetto al continuo fluido dell'intuizione, del flusso di coscienza. L'intuizionismo concepisce i numeri reali come successioni di libere scelte, un dispiegarsi senza vincoli il cui merito è quello di presentare i reali come in divenire, in un flusso temporale indeterminato dove non ci sono punti senza durata. Il continuo come medium di divenire libero, come lo definiva Hermann Weyl [1885-1955] dopo la sua temporanea conversione all'intuizionismo ([10]), è difficile da concepire e gestire se non si approfondiscono i necessari teoremi, da dimostrare con la nuova logica. Ogni funzione di variabile reale per esempio diventa continua. Pure Weyl lo ha anticipato prima della dimostrazione di Brouwer (1924), sulla base della fluidità del continuo intuitivo e dell'impossibilità di dividerlo in parti disgiunte. Pochi sono i matematici che hanno sposato questa linea, ancorché con risultati molto interessanti. ([11]) La storia dell'intuizionismo è un caso nuovo nella storia, un episodio in cui il rifiuto di accettare passivamente la δόξα dominante ha portato non all'arroccamento reazionario ma allo sviluppo di una alternativa originale.

Le prime ingenue resistenze al principio di scelta dipendevano da una interpretazione psicologica dell'atto delle scelte, come se esse fossero eseguite una per una in una successione infinita. ([12]) Ad esse è

([9]) Gödel (1931).

([10]) Si veda Weyl 1921 e 1927, p. 63 della trad. it.

([11]) Si veda Dummett (1977) o Bishop (1967) per una presentazione della analisi secondo un'impostazione rigorosamente costruttivistica, anche se meno filosoficamente fondata dell'intuizionismo.

([12]) Nel caso dell'intuizionismo, il principio di scelta appare meno sovrumano per il diverso senso degli operatori logici: le premesse sono più forti, perché l'interpretazione costruttiva dei quantificatori ($\forall\exists$ in "ogni elemento di x è non vuoto") comporta in un certo senso il dato di una funzione di scelta.

stato sufficiente opporre da parte di Zermelo una ragione di efficienza e progresso scientifico, indicando in Zermelo (1908a) tutti i risultati dimostrati nel recente passato facendone implicitamente o consapevolmente uso e ai quali non si sarebbe voluto rinunciare: la teoria dei cardinali, la definizione stessa di finito e infinito, e altri risultati, in diversi settori: tra i nuovi, l'esistenza di basi in ogni spazio vettoriale. ([13]) Ha vinto il principio di autorità.

Sono seguiti risultati meno prevedibili e negativi, come l'esistenza di insiemi non Lebesgue misurabili (1905, non menzionato da Zermelo) e altri che sembravano proprio paradossali, come il teorema (o paradosso) di Banach-Tarski (1924) sulla decomposizione della sfera: una sfera a tre dimensioni può essere decomposta in un numero finito di parti che possono essere ricomposte con movimenti rigidi a formare due sfere equivalenti a quella data. La via d'uscita dal paradosso è stata quella di pensare che la colpa non fosse dell'assioma di scelta, ma della nostra intuizione geometrica macroscopica che continua a interferire con la definizione puramente aritmetica del continuo.

L'accettazione definitiva del principio di scelta getta una luce curiosa sulla psicologia e sulla metodologia di lavoro dei matematici; per essi quello che è accettabile dipende da preferenze non tanto sui risultati, che possono essere anche sorprendenti, quanto sui metodi che si vogliono usare, e questi metodi si riducono sempre alla vecchia logica naturale, che deve stare sullo sfondo e non interferire con la matematica.

3. – Paradossi della definibilità

Non è stato possibile tuttavia alzare uno sbarramento contro il concetto di definibilità, che è entrato prepotentemente sulla scena all'inizio del Novecento con una serie di paradossi.

([13]) Zermelo (1908a) contiene una nuova dimostrazione del teorema del buon ordinamento (sull'esistenza di buoni ordini per ogni insieme), con una discussione delle critiche mosse al principio di scelta in generale e rivolte in particolare alla sua prima dimostrazione (1904), dove il principio era proposto come assioma. Si veda Lolli (2013), cap. 4, 'Antinomie e infinite scelte'.

Alcuni tentativi di risolvere l'ipotesi del continuo che avevano fatto riferimenti imprecisi agli insiemi definibili, nei primi anni del secolo, ([14]) avevano già indispettito Zermelo, quando nel 1905 Jules Richard rese nota quella che è impropriamente nota come antinomia di Richard.

Si considerino enti, per esempio numeri reali, definibili con frasi finite; il loro insieme $E = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è numerabile, bene ordinabile nell'ordine lessicografico delle definizioni, e lo si può diagonalizzare: ([15]) sia e il numero che nell'n-esima cifra della sua espansione decimale differisce da quella di e_n secondo una regola determinata. Il numero e è definito dalla descrizione appena presentata, ma non appartiene a E.

La costruzione di Richard è impropriamente chiamata antinomia perché l'autore stesso era oscillante su come considerarla: da una parte insegna che bisogna evitare gli insiemi più che numerabili, dall'altra E non è ben definito perché porta a una contraddizione, o la definizione è confusa perché per definire e occorre già conoscere E. Poincaré ne coglie il nocciolo logico individuando nel circolo vizioso dell'impredicatività la fonte di tutte le antinomie: una definizione impredicativa è una definizione che nel definire un ente fa riferimento a una totalità a cui l'ente stesso deve appartenere. Russell si convince della giustezza dell'analisi di Poincaré, e per evitare l'impredicatività è spinto a scegliere finalmente come sistema logico fondamentale la teoria dei tipi, presentata in Russell (1908) e poi nei *Principia Mathematica*.

Russell propone anche un'altra antinomia che attribuisce a G. G. Berry: il minimo numero non definibile con meno di venticinque sillabe (la definizione appena data ne ha 24). Nel 1908 Kurt Grelling e Leonard Nelson inventano quella dell'aggettivo 'eterologo': un aggettivo è eterologo se si applica a stesso, autologo altrimenti; eterologo non può essere né eterologo né autologo. Si riesumano vecchie antinomie come quella del mentitore, il cretese Epimenide che afferma che tutti i cretesi sono bugiardi, o "io sto mentendo".

([14]) L'Ipotesi del continuo è l'enunciato che non esistono cardinalità infinite intermedie tra quella di $\mathbb{N}$ e quella di $\mathbb{R}$, o in altri termini che $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

([15]) L'ispirazione viene dalla prova di Cantor della non numerabilità dei reali.

Zermelo perde la pazienza e dichiara che queste idee non sono matematiche. Peano (1906) concorda con il fatto che “exemplo de Richard non pertine ad Mathematica sed ad Linguistica”. Zermelo imposta la sua formulazione degli assiomi in modo da escludere la possibilità che tali idee intervengano in matematica.

L’assioma di separazione in Zermelo (1908b) afferma che per ogni insieme x esistono tutti i sottoinsiemi di x che sono individuati da proprietà definite. Per Zermelo è chiaro cosa significhi:

> 4. Una domanda o asserzione $\mathfrak{S}$ è detta *definita* [*definit*] se le relazioni fondamentali del dominio, per mezzo degli assiomi e delle leggi universalmente valide della logica, determinano senza arbitrarietà se essa vale o no.
>
> [L’assioma] differisce [dal principio di comprensione] per il fatto di contenere le seguenti restrizioni. In primo luogo, gli insiemi non possono mai essere *definiti in modo indipendente* per mezzo di questo assioma, ma devono sempre essere *separati* come sottoinsiemi da insiemi già dati; quindi concetti contraddittori come quello di “l’insieme di tutti gli insiemi” o “l’insieme di tutti i numeri ordinali” [...] vengono esclusi. In secondo luogo inoltre, il criterio di definizione deve essere sempre definito, nel senso della definizione in No. 4 [...], con il risultato che, dal nostro punto di vista, tutti i criteri del tipo “definibile per mezzo di un numero finito di parole”, quindi l’“antinomia di Richard” e il “paradosso della denotazione finita” scompaiono.

Ma ovviamente non è affatto chiaro, e dal problema di ridefinire *definit* verrà una svolta nella assiomatizzazione della teoria.

Thoralf Skolem [1887-1963], seguendo anticipazioni di Weyl, e con l’esperienza fatta nella logica algebrica, proporrà nel 1922 di considerare definite le proprietà esprimibili nel linguaggio del primo ordine della teoria, con i simboli relazionali $=$ ed $\in$. L’assioma di separazione si presenta ora come lo schema di formule

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge A(z)),$$

per ogni formula A del linguaggio.

Tuttavia questa decisione ha conseguenze fatali, che dipendono dal teorema di Löwenheim (1915) e Skolem (1920), secondo cui una teoria formalizzata in un linguaggio del primo ordine (con un insieme numerabile di assiomi), se è coerente ed ha un modello, allora ha anche un modello finito o numerabile. Questo è il vero paradosso linguistico che mina la matematica, o almeno la teoria degli insiemi, il paradosso di Löwenheim-Skolem.

La teoria ZF, di Zermelo e Fraenkel, ([16]) soddisfa le condizioni del teorema, e quindi se è coerente ha modelli numerabili. Un modello numerabile della teoria degli insiemi presenta il paradosso che in esso esistono insiemi per cui è vero nel modello che sono più che numerabili, anche se essi sono numerabili. ([17])

Morale: i concetti insiemistici fondamentali, come quello di cardinalità, sono relativi. Il teorema di Löwenheim-Skolem mette in luce una limitazione della logica diversa da quella del principio di comprensione: non solo non sempre si ha che a una proprietà corrisponde un concetto o un'estensione, ma quando anche succede un tale concetto, se riferito all'infinito, non è assoluto.

Gli altri paradossi linguistici non sono solo curiosità: Kurt Gödel [1906-1978] li ha trasformati in tecniche dimostrative basate sull'autoriferimento. L'antinomia di Richard e quella di Berry offrono dimostrazioni alternative del teorema di incompletezza, che peraltro riproduce anche per analogia l'argomentazione del mentitore (Lolli 1992, cap. 11). L'antinomia di Berry interviene in informatica per dimostrare l'indecidibilità di problemi come quello di trovare il programma più corto (Machtey e Young 1978, pp. 5-7).

La definibilità in teoria degli insiemi è stata sistemata in modo spettacolare sempre da Gödel, ispirandosi alla gerarchia ramificata dei tipi di Russell, con la costruzione del modello interno di ZF costituito dagli insiemi costruibili: una restrizione che permette di decidere tutte le aporie della teoria degli insiemi, dalla scelta all'ipotesi del continuo (Gödel 1938, 1940).

([16]) Come è chiamata nonostante il contributo di Skolem. Ha prevalso l'influenza sugli insiemisti del tempo della proposta di Adolf A. Fraenkel [1891-1965], analoga ma meno chiara. Skolem e Fraenkel hanno anche entrambi proposto indipendentemente l'aggiunta a quelli di Zermelo dell'assioma di rimpiazzamento, dove interviene di nuovo il concetto di operazione *definit*.

([17]) La spiegazione del paradosso sta nella possibilità che ogni funzione che stabilisce una biiezione tra l'insieme e $\mathbb{N}$ non appartenga al modello.

4. – La lezione dei paradossi

Con i fondamenti diventati una difesa dai paradossi, l'interesse dei matematici è presto scemato, quando è stato chiaro che non c'erano da aspettarsi risposte semplici. La discussione tuttavia ha insegnato molto alla logica e alla matematica. I paradossi linguistici in particolare sono stati un faro per lo sviluppo della logica nel ventesimo secolo: la differenza di livelli, la distinzione tra linguaggio e metalinguaggio, la non definibilità di concetti quali la verità se non in un opportuno metalinguaggio (l'antinomia di Richard si spiega con il fatto che E è sì definibile, ma in un metalinguaggio di quello numerico in cui sono definiti i suoi elementi). I paradossi sono anche penetrati, con l'autoriferimento, nell'arte e nella cultura generale. ([18])

I matematici restano riluttanti a introdurre l'attenzione agli strumenti linguistici nel loro lavoro, temendo di essere considerati grammatici. Tuttavia alcuni concetti generali hanno rilevanza nel complesso della vita matematica, per esempio l'attenzione al metalinguaggio nell'insegnamento, e anche nella produzione scientifica.

L'esperienza della programmazione ha reso un luogo comune l'esistenza di limiti a quello che si può dire, e programmare in ogni particolare linguaggio, e anche ovviamente dimostrare in un linguaggio dichiarativo. Non si può dimostrare la categoricità dell'aritmetica, ([19]) né quella della teoria dei numeri reali, in un linguaggio del primo ordine. Non si possono definire i gruppi di torsione se non in un linguaggio infinitario, e così via. Il matematico snobba queste distinzioni perché quando vuole parlare di qualcosa usa il linguaggio che meglio gli permette di parlarne; ma non si rende conto che in questo modo il linguaggio onnicomprensivo è per forza di cose, se non si fa attenzione a usarne solo frammenti, contraddittorio, come è contraddittorio il linguaggio naturale: se ci si dimentica che il concetto di verità non è definibile, si finisce con la contraddizione del mentitore; o si deve fare i

([18]) Per lo sfruttamento di paradossi nella letteratura si veda il *fraudulemce paradox* nel racconto di David Foster Wallace, "Good old neon", in *Oblivion*, Little, Brown and Company, New York, 2004.

([19]) Una teoria è categorica se tutti i suoi modelli sono isomorfi.

conti con teoremi tra loro in opposizione, che l'aritmetica è e non è categorica, che il sistema dei numeri reali è e non è completo.

A seguito di Löwenheim-Skolem, il fare matematica (nella misura in cui la teoria degli insiemi rappresenta il fare matematica) si sdoppia in due strategie diverse: o lavorare dentro un modello immaginato fissato, considerando quindi le cardinalità e altri concetti insiemistici come assoluti, pur sapendo che non lo sono; in questo caso il linguaggio semantico ha solo una funzione comunicativa, di fatto le affermazioni considerate vere nel modello sono semplicemente i teoremi della teoria; oppure lavorare al modo dell'algebra, con diversi modelli, mettendo a confronto tra di loro le nozioni relativizzate a ciascun modello.

La reazione prevalente sembra essere quella di accettare l'esistenza di modelli non isomorfi. Questo rende un po' pickwickiano il senso in cui la teoria si possa considerare fondazionale. Skolem era convinto che tale relatività vanificasse la pretesa di una fondazione insiemistica, o comunque globale, della matematica.

La perdita della possibilità fondazionale non preoccupa più di tanto. L'eredità accettata dall'insiemistica è soprattutto quella del suo linguaggio, ma non in una prospettiva riduzionistica (definire intimisticamente tutti gli enti matematici) che non interessa al matematico. Il linguaggio si è imposto perché quando ci si specializza a teorie particolari, i linguaggi speciali possono essere immaginati come frammenti di quello insiemistico, favorendo traduzioni e interscambi, in quanto quest'ultimo è in grado di costruire copie isomorfe di ogni linguaggio matematico, grazie alla sua capacità di definire sintassi e semantica, più che gli oggetti matematici.

Si dice che la stagione dei fondamenti si è chiusa con gli anni Trenta del ventesimo secolo, e anche l'orientamento della filosofia della matematica esplora altre direzioni (Lolli 2002). Ma l'apparire di paradossi nello sviluppo della matematica non si è esaurito: un paradosso attuale è quello del computer. L'uso del computer da una parte invera ed esalta la logica meccanizzabile e meccanica; la dimostrazione automatica, soprattutto in informatica con le dimostrazioni di correttezza, e le dimostrazioni assistite da calcolatore in matematica, hanno dato utilità pratica ai calcoli logici; d'altra parte il computer favorisce le ricerche e le esplorazioni empiriche sostenendo l'idea di una matematica sperimentale.

Già la definizione delle funzioni calcolabili mostrava un paradosso: l'insieme delle funzioni ricorsive parziali è enumerabile con una funzione ricorsiva parziale di due variabili; la diagonalizzazione non porta a una contraddizione ma a una apertura sul dominio del non computabile. Alan M. Turing [1912-1954] ha definito le macchine teoriche per poter dimostrare l'esistenza di problemi non effettivamente risolubili (arresto, validità logica). La tecnica dimostrativa, diagonalizzazione e autoriferimento, ha origine in un paradosso.

Lo stesso fenomeno si presenta in tutte le antinomie legate alla logica: si cerca di chiudere un concetto in modo da individuare un dominio sicuro e dominabile – l'universo in un insieme, la classe delle funzioni ricorsive in una funzione universale – e invece l'atto stesso della chiusura spalanca gli orizzonti inesplorati di quello che resta fuori.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

ARNAULD, A. e NICOLE, P., 1662, *La logique ou l'art de penser*, Savreux, Paris (trad. it 'Logica o arte di pensare', in *Grammatica e Logica di Port-Royal*, a cura di R. Simone, Ubaldini, Roma, 1969).

BANACH, S. e TARSKI, A., 1924, 'Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes', *Fundamenta Mathematicae*, vol. 6, pp. 244-77.

BISHOP, E., 1967, *Foundations of constructive analysis*, McGraw Hill, New York.

BROUWER, L. E. J., 1924, 'Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässigstetig ist', *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Verslagen*, vol. 27, pp. 189-93 (rist. in L. E. J., Brouwer, *Collected works*, a cura di A. Heyting, vol. I, North Holland, Amsterdam, 1975)..

DEDEKIND, R., 1888, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig, Leipzig (trad. it. col titolo 'Essenza e significato dei numeri' in R. Dedekind, *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali*, a cura di O. Zariski, Stock, Roma 1926, e col titolo 'Che cosa sono e a che servono i numeri?' in R. Dedekind, *Scritti sui fondamenti della matematica*, a cura di F. Gana, Bibliopolis, Napoli 1982).

DUMMETT, M., 1977, *Elements of intuitionism*, Oxford Univ. Press, Oxford.

FREGE, G., 1879, *Begriffschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Nebert, Halle (trad. it. 'Ideografia. Un linguaggio in formule del pensiero puro a imitazione di quello aritmetico', in G. Frege, *Logica e aritmetica*, a cura di C. Mangione, Torino, Boringhieri, 1965).

Frege, G., 1893-1903, *Grundgesetze der Arithmetik*, 2 voll., Pohle, Jena (trad. it. parziale, *I principi dell'aritmetica*, in G. Frege, *Logica e aritmetica*, a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino 1965).

Gödel, K., 1931, 'Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia matematica* und verwandte Systeme I', *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38, pp. 173-198 (trad. it. 'Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei *Principia Mathematica* e di sistemi affini I', in K. Gödel, *Opere*, vol. 1, Bollati Boringhieri, Torino 1999).

Gödel, K., 1938, 'The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis', *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.*, vol. 24, pp. 556-7 (trad. it. 'La coerenza dell'assioma di scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo', in K. Gödel, *Opere*, vol. 2, Bollati Boringhieri, Torino 2002).

Gödel, K., 1940, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis* (note di George W. Brown), Princeton University Press, Princeton (trad. it. 'La coerenza dell'assioma di scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo con gli assiomi della teoria degli insiemi', in K. Gödel, *Opere*, vol. 2, Bollati Boringhieri, Torino 2002).

Grelling, K. e Nelson, L., 1908, 'Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti', *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, vol. 2, pp. 301-34.

Hilbert, D., 1926, 'Über das Unendliche', *Mathematische Annalen*, vol. 95, pp. 161-90 (trad. it. 'Sull'infinito', in D. Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di M. V. Abrusci, Bibliopolis, Napoli, 1978).

Lolli, G., 1992, *Incompletezza. Saggio su Kurt Gödel*, Il Mulino, Bologna.

Lolli, G., 2002, *Filosofia della matematica*, Il Mulino, Bologna.

Lolli, G., 2011, *La guerra dei trent'anni*, ETS, Pisa.

Lolli, G., 2013, *Nascita di un'idea matematica*, Edizioni della Normale, Pisa.

Löwenheim, L., 1915, 'Über Möglichkeinte im Relativkalkul', *Mathematische Annalen*, vol. 76, pp. 447-70.

Machtey, M. e Young, P., 1978, *An introduction to the general theory of algorithms*, North Holland, New York.

Peano, G., 1889, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Bocca, Torino (rist. in G. Peano, *Opere Scelte*, vol. II, Cremonese, Roma, 1958).

Peano, G., 1906, 'Super theorema de Cantor-Bernstein', *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 21, pp. 360-6, anche in *Revista de matematica*, vol. 8, n. 5, 1902-1906, pp. 136-43 (rist. in G. Peano, *Opere Scelte*, vol. I, Cremonese, Roma, 1957).

Poincaré, H., 1905-06, 'Les mathématiques et la logique', *Revue de Métaphysique et de Morale*, vol. 13, pp. 815-35, e vol. 14, pp. 17-34 e 294-317; semplificato e inserito in H. Poincaré, *Science et méthode*, Flammarion, Paris, 1908 (trad. it. *Scienza e metodo*, Einaudi, Torino, 1997) in tre capitoli approssimativamente corrispondenti alle tre parti in cui è frazionato l'articolo.

RICHARD, J., 1905, 'Les principes des mathématiques et le problème des ensembles', *Revue générale des sciences pures et appliquées*, vol. 16, pp. 541-2.

RUSSELL, B., 1903, *The principles of mathematics*, Allen and Unwin, London (trad it. *I principi della matematica*, Longanesi, Milano, 1951).

RUSSELL, B., 1906, 'On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types', *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 4, pp. 29-53.

RUSSELL, B., 1908, 'Mathematical logic as based on the theory of types', *American Journal of Mathematics*, vol. 30, pp. 222-62 (trad. it. parziale, 'Logica matematica basata sulla teoria dei tipi', in B. Russell, *Linguaggio e realtà*, Laterza, Roma-Bari, 1970)

SKOLEM, T., 1920, 'Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einer Theoreme über dichte Mengen', *Videnskaps-selskapets Skrifter*, I. Matematisk-Naturv. Klass, n. 4, 36 pp. (trad. it. parziale, 'Ricerche logico-combinatorie sulla soddisfacibilità delle proposizioni matematiche unitamente a un teorema sugli insiemi densi', in *Dalla logica alla metalogica*, a cura di E. Casari, Sansoni, Firenze, 1979).

SKOLEM, T., 1922, 'Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre', *Mathematikerkongressen i Helsingfors den 4-7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse*, Akademiska Bokhandeln, Helsinki, 1923, pp. 217-232 (trad. it. 'Osservazioni sulla fondazione assiomatica della teoria degli insiemi', in *Il paradiso di Cantor. Il dibattito sui fondamenti della teoria degli insiemi*, a cura di C. Cellucci, Bibliopolis, Napoli, 1979).

WEYL, H., 1921, 'Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik', *Mathematische Zeitschrift*, vol. 10, pp. 39-79.

WEYL, H., 1927, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften*, Oldenburg, München (trad. it. dell'edizione inglese del 1949, *Filosofia della matematica e delle scienze naturali*, Boringhieri, Torino, 1967).

ZERMELO, E., 1908a, 'Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung', *Mathematische Annalen*, vol. 65, pp. 107-28.

ZERMELO, E., 1908b, 'Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I', *Mathematische Annalen*, vol. 65, pp. 261-81 (trad. it. parziale, 'Ricerche sui fondamenti della teoria degli insiemi', in *I fondamenti della matematica da Dedekind a Tarski*, a cura di A. Cantini, Loescher, Torino, 1979).

Gabriele Lolli
Scuola Normale Superiore di Pisa
e-mail: gabriele.lolli@sns.it