La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Giuseppe Rosolini

Dagli insiemi alle categorie

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (2014), n.3 (Matematica e filosofia. Contributi al dialogo interdisciplinare), p. 461–480.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2014_1_7_3_461_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2014.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VII, Dicembre 2014, 461-480

Dagli insiemi alle categorie

Giuseppe Rosolini

Nella prima metà del XX secolo, la teoria degli insiemi sviluppata da Ernst Zermelo—che con i completamenti di Thoralf Skolem, Abraham Fraenkel e Dmitry Mirimanoff, viene oggi denominata ZFC—fissava finalmente in una teoria fruibile le intuizioni di Georg Cantor e Richard Dedekind. I matematici trovarono nella teoria ZFC uno strumento potentissimo che permetteva di aumentare il livello di astrazione nella loro attività matematica. Il singolo esempio della topologia generale è sufficiente per dare un'idea delle possibilità offerte dalla teoria ZFC.

Ed è stato l'incessante sviluppo dell'astrazione matematica nella prima parte del XX secolo—in particolare in topologia algebrica—che ha condotto due matematici americani, Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane, a introdurre il concetto di categoria nell'articolo "General Theory of Natural Equivalences", apparso nel 1945 sul volume 58 delle *Transactions of the American Mathematical Society*. Dichiaratamente sia nel titolo che nel testo, il concetto rilevante introdotto è quello di "equivalenza naturale", e più in generale di "trasformazione naturale". Le categorie venivano introdotte per poter definire il concetto di funtore—gli *omomorfismi* di categorie—perché questo era strumentale per poter scrivere la definizione di trasformazione naturale, si veda [14], p. 18. ([1])

Come suggerivano i due autori, una trasformazione naturale è una sorta di *omomorfismo* di funtori, cioè un omomorfismo di omomorfismi. Appare come una nozione molto complicata, controintuitiva—e la determinazione matematica del concetto non concede nulla all'intuizione. Inoltre poteva risultare estranea alle strutture tipiche del-

([1]) Il testo è pubblicato in italiano in [15].

l'algebra, della logica matematica, della geometria. Forse proprio per questo Eilenberg e Mac Lane si soffermarono su vari esempi comuni nell'esperienza matematica—basati specialmente su spazi di rappresentazione: il biduale di uno spazio vettoriale, lo spazio di caratteri di un gruppo topologico, il gruppo degli omomorfismi tra due gruppi abeliani.

La duttilità del concetto introdotto (quello di trasformazione naturale, non quello di categoria o quello di funtore che erano soltanto strumentali) si dimostrò attraverso le numerose applicazioni. Le prime apparvero proprio in topologia algebrica, e un uso sistematico degli strumenti categoriali fu fatto da Alexander Grothendieck e dalla sua scuola producendo importanti risultati in geometria e in teoria dei numeri.

Negli stessi anni, Daniel Kan introduceva il concetto di aggiunzione in [10], per il quale è fondamentale la nozione di trasformazione naturale. Nel seguito il concetto introdotto da Kan si dimostrò estremamente utile al punto che Mac Lane in [14] dichiara che le aggiunzioni si ritrovano quasi ovunque nella matematica, si veda anche il recente [12].

Le applicazioni della teoria delle categorie sono aumentate costantemente nella seconda parte del XX secolo: il ricorso al linguaggio categoriale diventa molto utile (sarei tentato di dire necessario) quando un problema richiede di chiarire le basi concettuali in cui deve essere affrontato—a puro titolo di esempio, menziono le categorie cartesiane chiuse per la semantica dei linguaggi di programmazione e le categorie monoidali intrecciate per la teoria dei nodi e per la fisica quantistica. Inoltre la determinazione categoriale di un problema offre una serie di spunti canonici per studiarlo: concetti, metodi e costruzioni che possono suggerire punti di vista diversi sul problema e al tempo stesso una strutturazione matematica precisa del poblema al punto da determinare un livello di astrazione appropriato dove affrontarlo.

Di contro, la matematica espressa usando la teoria delle categorie risulta coriacea e inutilmente complessa a chi non parla fluentemente il linguaggio della teoria. Tra i molti motivi, almeno due si rivelano abbastanza comuni: il linguaggio categoriale è in molti punti in contrasto radicale con quello insiemistico al punto da disincentivare anche il più risoluto a impararlo—basta menzionare un caso per tutti: si scrive $f : A \to B$ per intendere una freccia f dall'oggetto A all'oggetto B

quando si scrive $f : A \to B$ per indicare una funzione dall'insieme A all'insieme B. Il secondo motivo è che molte delle strutture esemplificative in teoria delle categorie sono *matematicamente inimmaginabili*: la categoria degli insiemi e funzioni è un grafo i cui nodi sono gli insiemi e i cui archi... Ma questo non è accettabile, dato che grazie alla teoria degli insiemi si sa che non esiste l'insieme di tutti gli insiemi.

Forse, per concludere questa introduzione, è opportuno richiamare un parallelo proposto da Eilenberg e Mac Lane nell'articolo originale:

> Si può considerare [la teoria delle categorie] come una continuazione dell'Erlanger Programm di Klein, nel senso che si generalizzano gli spazi geometrici con il relativo gruppo di trasformazioni alle categorie con la relativa algebra di frecce. ([2])

Nel seguito, cercheremo di discutere più a fondo del carattere "geometrico" della teoria delle categorie; così dopo aver richiamato ed esemplificato le nozioni di categoria, funtore, trasformazione naturale e aggiunzione, presenteremo alcuni tratti della teorie e alcuni problemi di fondo ancora aperti.

1. – Categorie

La definizione di categoria può essere data succintamente come segue.

DEFINIZIONE 1.1. – Una ***categoria*** è un grafo C dotato di un'operazione $\cdot$ su archi consecutivi che

(i) produce un arco che collega la partenza del primo arco con l'arrivo del secondo arco
(ii) ed è formalmente associativa e con elementi neutri.

Proprio perché espressa succintamente, è opportuno commentare e esemplificare la definizione 1.1: per grafo $C = (C_0, C_1)$ intendiamo una collezione C_0 di ***nodi*** e una collezione C_1 di ***archi*** insieme con due funzioni $\partial_0^C, \partial_1^C : C_1 \to C_0$, quello che a volte viene chiamato un grafo

([2]) Si veda [17] che tratta a fondo questo suggerimento.

orientato multietichettato: ad esempio, il grafo i cui nodi sono gli incroci delle strade sulla cartina della città di .... (*scrivi una città*) e i cui archi sono tutti i percorsi che un'auto può fare da un incrocio ad un altro: se p è un percorso sulla cartina, $\partial_0^C p$ è l'incrocio di partenza e $\partial_1^C p$ quello di arrivo. L'orientazione dei percorsi sulla cartina è necessario perché ci saranno molti sensi unici da tenere in considerazione mentre si guarda un percorso.

Un altro esempio molto formale è dato da una relazione binaria $C_1 \subseteq C_0 \times C_0$ su C_0, chiamato spesso *grafo orientato* (*monoetichettato*). Partenza e arrivo di una coppia in C_1 sono dati da prima e seconda proiezione.

Un'operazione $\cdot$ su archi consecutivi che agisca come richiesto in 1.1(i), a partire da due archi consecutivi a e a', produce un arco come mostrato in figura

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "a"] \arrow[rr, bend right, "a' \cdot a"'] & c' \arrow[r, "a'"] & c'' \end{tikzcd}$$

Nel caso del grafo dei percorsi stradali è facile immaginare un'operazione come richiesto: fare il primo percorso e continuarlo con il secondo ottenendo un percorso dal primo incrocio al terzo incrocio.

Nel caso di una relazione binaria $C_1 \subseteq C_0 \times C_0$ su C_0, un'(unica) operazione che agisca come richiesto esiste se e solo se la relazione è transitiva.

La richieste formali si scrivono facilmente in modo algebrico:

Associatività: per ogni terna di archi consecutivi $c \xrightarrow{a} c' \xrightarrow{a'} c'' \xrightarrow{a''} c'''$, si ha che

$$a'' \cdot (a' \cdot a) = (a'' \cdot a') \cdot a.$$

Graficamente

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "a' \cdot a"'] \arrow[drr, bend left=40, "(a'' \cdot a') \cdot a"] \arrow[drr, bend left=60, "a'' \cdot (a' \cdot a)"] & c' \arrow[d, "a'"] \arrow[dr, "a'' \cdot a'"] & \\ & c'' \arrow[r, "a''"'] & c''' \end{tikzcd}$$

Elementi neutri: per ogni nodo c esiste un arco $\begin{tikzcd} c \arrow[loop above, "e_c"] \end{tikzcd}$ e per ogni arco $c \xrightarrow{a} c'$ si ha che

$$a \cdot e_c = a = e_{c'} \cdot a.$$

Graficamente

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "e_c"] \arrow[dr, bend right, "a = a \cdot e_c"'] & c \arrow[d, "a"] \arrow[dr, bend left, "e_{c'} \cdot a = a"] & \\
& c' \arrow[r, "e_{c'}"'] & c'
\end{tikzcd}$$

È chiaro che per ciascun nodo l'elemento neutro richiesto è univocamente determinato dalla proprietà che deve verificare rispetto all'operazione $\cdot$ su archi consecutivi.

D'ora in avanti, se non si genera confusione, eviteremo di scrivere il segno $\cdot$ tra due archi limitandoci a concatenare il primo al secondo.

Nel caso del grafo dei percorsi stradali l'operazione di proseguire un percorso ad un altro verifica le due proprietà a patto di riconoscere tra i percorsi quelli in cui l'auto resta ferma.

Nel caso di una relazione binaria $C_1 \subseteq C_0 \times C_0$ transitiva su C_0, l'operazione verifica automaticamente la proprietà associativa, mentre verifica la proprietà degli elementi neutri se e solo se la relazione è riflessiva.

Ci affrettiamo a menzionare altri esempi di categorie. Dato un qualunque monoide $M = (|M|, \star)$—un insieme $|M|$ con un'operazione $\star$ associativa con elemento neutro, si costruisce una categoria come segue: si considera un grafo C_M con un solo nodo e con archi gli elementi di $|M|$—cioè il grafo ha soltanto cappi. L'operazione su archi consecutivi è la stessa del monoide.

Ma gli esempi di categoria veramente eclatanti sono quelli forniti dalle strutture matematiche e dalle appropriate trasformazioni tra essi: i gruppi e gli omomorfismi, gli spazi vettoriali su un campo e le trasformazioni lineari, gli spazi topologici e le funzioni continue, le teorie logiche e le traduzioni, le C^*-algebra e gli omomorfismi. Sviluppiamo il primo in dettaglio lasciando all'immaginazione del lettore come determinare gli altri.

La categoria $\mathcal{G}rp$ dei gruppi e omomorfismi consiste del grafo in cui $\mathcal{G}rp_0$ è la collezione dei gruppi—un gruppo è un monoide M tale che ogni elemento ha inverso—e $\mathcal{G}rp_1$ è la collezione degli archi $G \xrightarrow{(f,G,G')} G'$ dove f è omomorfismo dal gruppo G al gruppo G'. L'operazione su archi consecutivi è data dalla composizione funzionale

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "{(f,G,G')}"] \arrow[rr, bend right, "{(f'\circ f,G,G'')}"'] & G' \arrow[r, "{(f',G',G'')}"] & G'' \end{tikzcd}$$

dato che produce un omomorfismo di gruppi a partire da due omomorfismi, è notoriamente associativa e dotata di elementi neutri, forniti dagli omomorfismi identità.

OSSERVAZIONE 1.2. -- Fino a questo punto abbiamo evitato di utilizzare il più possibile il linguaggio categoriale mentre abbiamo cercato di esemplificare graficamente quasi tutte le condizioni richieste dalla definizione di categoria. Non possiamo determinare quanto questo abbia aiutato il lettore—anzi è possibile che abbia invece disturbato un lettore esperto per certe notazioni o dizioni.

Abbiamo anche evitato di evidenziare punti dove la descrizione si stacca dalla teoria degli insiemi che viene usata di norma. In effetti, conviene notare che abbiamo sempre usato la denominazione "collezione" ed in un solo punto è comparsa la parola "insieme"—per indicare la natura del sostegno $|M|$ del monoide M.

I nodi di una categoria C vengono detti ***oggetti di*** C, gli archi vengono detti ***frecce di*** C (ma anche *morfismi* oppure *mappe*). Il motivo principale è il parallelo con la più semplice tra le categorie di strutture matematiche: la categoria $\mathcal{I}ns$ delle strutture senza struttura, gli insiemi e le funzioni—o meglio delle strutture minime con la sola nozione di uguaglianza e gli omomorfismi che la conservano.

Gli oggetti della categoria $\mathcal{I}ns$ sono gli insiemi e una freccia dall'insieme I all'insieme I' è $I \xrightarrow{(f,I,I')} I'$ dove f è funzione; l'operazione su frecce consecutive è ancora data dalla composizione funzionale—suggeriamo di confrontare questa presentazione con quella della categoria $\mathcal{G}rp$ data prima di 1.2.

OSSERVAZIONE 1.3. – In rappresentazioni grafiche del tipo $I \xrightarrow{(f,I,I')} I'$ o $G \xrightarrow{(f,G,G')} G'$, si riduce la scrittura a $I \xrightarrow{f} I'$ cancellando due componenti poiché non si rischia confusione. Inoltre la notazione che ne risulta per l'operazione su frecce consecutive è esattamente quella standard. Anche se questa può essere letta come giustificazione per la notazione rovesciata, resta la difficoltà di riuscire a visualizzare categorie che *non* siano categorie di insiemi strutturati.

Il problema principale che si presenta chiaramente a questo punto consiste nel fatto che le categorie che sembrano rilevanti per un matematico non esistono in ZFC! La collezione $\mathcal{I}ns_0$—come necessariamente la collezione $\mathcal{I}ns_1$—non è un insieme, o meglio non esiste in ZFC. Ed è così per ogni altra categoria di strutture e trasformazioni appropriate suggerita in precedenza, si veda [6] per altri esempi interessanti.

In effetti, si può argomentare che molte delle teorie matematiche rientrano con difficoltà in ZFC. Ad esempio, quando si produce una costruzione generale per strutture di un certo tipo—diciamo il derivato $[G,G]$ di un gruppo G—, si agisce al di fuori di ZFC: la costruzione non può essere scritta *per tutti i gruppi* in ZFC, semplicemente non ha senso scrivere $G \mapsto [G,G]$. Eppure è chiaro come abbia perfettamente senso fare il derivato di qualunque gruppo si voglia.

Il problema era chiaro fin dall'inizio (si veda [5], p. 239 e pp. 246-8); rimandiamo la discussione sui fondamenti che l'analisi categoriale suggerisce alla sezione dedicata 4 più avanti. Qui ci limitiamo a richiamare (e adottare) la proposta di Grothendieck di universi inscatolati di insiemi, riportata in [4].

Ogni insieme compare come elemento di un universo; inoltre ogni universo u è un insieme, ed è transitivo rispetto all'appartenenza (cioè se $x \in u$ e $y \in x$, allora $y \in u$), alle unioni di insiemi dell'universo (cioè se $x \in u$ allora $\cup x \in u$), all'operazione di parti (cioè se $x \in u$, allora $\mathscr{P}(x) \in u$), all'immagine di funzioni da insiemi dell'universo (cioè se $x \in u$ e $f : x \to u$, allora $\mathrm{im}(f) \in u$).

Queste condizioni sono essenzialmente le stesse di richiedere in ZFC che ogni cardinale inaccessibile appartenga ad un cardinale inaccessibile, si veda [19].

Il primo universo è chiaramente la collezione degli insiemi ereditariamente finiti, ma dal secondo universo in poi, tra gli elementi dell'universo vi sono l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri reali ed è chiaro quanta matematica può essere sviluppata considerando soltanto gli insiemi di u. In questo contesto, c'è una categoria u-$\mathcal{I}ns$ di insiemi e funzioni dell'universo u per ogni universo u e una tale struttura compare come elemento in ogni universo v tale che $u \in v$.

Rispetto ad universo u, si parla di categorie ***u*-piccole** per quelle categorie C tali che C_1 sia un elemento di u—dunque anche C_0 ed il resto della struttura sono elementi di u. Sono categorie ***u*-grandi** quelle categorie C tali che C_0 non è un elemento di u. Può apparire come se questi fossero i due casi possibili, ma in base a situazioni di notevole interesse è utile anche introdurre il concetto di categoria u-localmente piccola: una categoria C è ***u*-localmente piccola** se, per ogni coppia di oggetti $c, c' \in C_0$, la collezione

$$C(c,c') := \{f \in C_1 \mid \partial_0^C(f) = c \text{ e } \partial_1^C(f) = c'\} \tag{1}$$

è un elemento di u. In effetti, ogni categoria di strutture su elementi di u—la categoria u-$\mathcal{I}ns$, ma anche la categoria u-$\mathcal{G}rp$ dei gruppi su insiemi in u, ecc.—è u-grande e u-localmente piccola.

Chiaramente una categoria u-piccola è u-localmente piccola.

Per lo stesso motivo che gran parte della matematica può essere sviluppata rispetto ad un dato universo, le dizioni appena introdotte tralasciano spesso il riferimento all'universo; si dice dunque semplicemente categoria piccola, categoria grande, categoria localmente piccola.

Avendo vari esempi di categoria a disposizione, è anche opportuno notare che la struttura di categoria su un grafo C coinvolge soltanto identità tra frecce; non c'è alcuna richiesta di uguaglianze tra certi oggetti. Questo è radicalmente diverso da quanto si sviluppa per gli insiemi dove si può verificare uguaglianza mediante estensionalità, ma appare in linea con quanto avviene per strutture dove si parla sempre *a* *meno della presentazione*: ad esempio, alla domanda «quante sono le strutture di gruppo su un insieme di quattro elementi?» un matematico risponde «due» (e non $48 = 2 \cdot 4!$). ([3])

La prima nozione elementare che si introduce nel contesto di una categoria è quella di coppia di inversi.

DEFINIZIONE 1.4. – Data una categoria C, date frecce $c \xrightarrow{a} c'$ e $c' \xrightarrow{b} c$, si dice che a è ***inverso di*** b se $e_c = ba$ e $e_{c'} = ab$, graficamente ([4])

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "a"] \arrow[dr, bend right, "e_c = ba"'] & c' \arrow[d, "b"] \arrow[dr, bend left, "ab = e_{c'}"] & \\ & c \arrow[r, "a"'] & c' \end{tikzcd}$$

Una freccia che ha inverso (chiaramente unico) si dice ***iso***.

ESEMPI 1.5 – Gli esempi sono tanto interessanti quanto elementari: nella categoria $\mathcal{Ins}$ le frecce iso sono le biiezioni; in una categoria di strutture algebriche, le frecce iso sono gli isomorfismi ([5]); nella categoria $\mathcal{Top}$ degli spazi topologici e funzioni continue, le frecce iso sono gli omeomorfismi; per un monoide M, gli iso nella categoria C_M costituiscono il più grande sottomonoide di M che sia

([3]) Questo è quanto si fa anche con gli insiemi quando si finisce a considerare la loro cardinalità, ma certo non si usa solitamente $\aleph_0$ al posto di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, né tantomeno $\aleph_1$ al posto di $\mathbb{R}$ invocando l'Ipotesi del Continuo.

([4]) La "geometria" dei diagrammi di oggetti e frecce si arricchisce sfruttando l'operazione $\cdot$ su frecce consecutive: si parla di diagramma ***commutativo*** quando, per ogni coppia di oggetti nel diagramma, calcolando $\cdot$ su tutti i possibili percorsi dal primo oggetto al secondo, si ottiene sempre lo stesso risultato. Ad esempio, la condizione che a sia inverso di b si può perciò esprimere dichiarando che il diagramma

$$\begin{tikzcd} c \arrow[loop left, "e_c"] \arrow[r, bend left, "a"] & c' \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[loop right, "e_{c'}"] \end{tikzcd}$$

è commutativo. Si noti che il termine appena introdotto discende dalla radice del verbo inglese "to commute" che significa "fare il pendolare"; non ha nulla a che fare con la proprietà algebrica di commutatività.

([5]) Da questo esempio deriva il nome per il concetto.

un gruppo di M; per una relazione $C_1 \subseteq C_0 \times C_0$ riflessiva e transitiva, le frecce invertibili costituiscono la più grande relazione simmetrica contenuta in C_1.

Ricordiamo ora la nozione di omomorfismo tra categorie o, come si dice, di *funtore*.

DEFINIZIONE 1.6. -- Date categorie C e D, un ***funtore*** $F : C \to D$ è una coppia di funzioni $F_0 : C_0 \to D_0$ e $F_1 : C_1 \to D_1$ tali che, per ogni $a \in C_1$, si ha che

- $\partial_0^D(F_1(a)) = F_0(\partial_0^C(a))$
- $\partial_1^D(F_1(a)) = F_0(\partial_1^C(a))$;

per ogni coppia a, a' di frecce consecutive in C_1, (per le prime due condizioni, $F_1(a)$ e $F_1(a')$ sono consecutive in D e) si ha che

- $F_1(aa') = F_1(a)F_1(a')$;

per ogni $c \in C_0$, si ha che

- $e_{F_0(c)} = F_1(e_c)$.

Dato che la composizione componente per componente di due funtori consecutivi è un funtore—e la si scriverà $G \circ F$ come si fa solitamente per omomorfismi tra strutture—, è facile immaginare come costruire la categoria $\mathcal{CAT}$ delle categorie e funtori tra esse. (6) Inoltre, in quanto omomorfismo di categorie, un funtore trasforma una freccia iso in una freccia iso.

ESEMPI 1.7 – Un funtore dalla categoria data da una relazione binaria $C_1 \subseteq C_0 \times C_0$ riflessiva e transitiva su C_0 in un'altra relazione binaria $D_1 \subseteq D_0 \times D_0$ riflessiva e transitiva su D_0 è totalmente determinato da una funzione $F : C_0 \to D_0$ che conserva la relazione.

(6) È una categoria piccola in ogni universo a cui appartiene l'universo a cui ci si sta riferendo. Si può notare anche che la categoria $\mathcal{C}at$ delle categorie piccole e funtori tra esse è una categoria grande, ma localmente piccola, rispetto all'universo di riferimento.

Un funtore dalla categoria C_M data da un monoide M in un'altra categoria C_N data da un monoide N è esattamente un omomorfismo $F_1 : M \to N$.

Un funtore $F : C_M \to \mathcal{I}ns$ dalla categoria C_M data dal monoide M nella categoria $\mathcal{I}ns$ è totalmente determinato dall'azione

$$(m,x) \mapsto (F_1(m))(x) : |M| \times F_0(\bullet) \to F_0(\bullet)$$

(abbiamo scritto $\bullet$ per il singolo oggetto di C_M). In particolare, se M è un gruppo, i funtori $F : C_M \to \mathcal{I}ns$ sono esattamente i G-insiemi (sinistri).

La costruzione del quoziente abeliano di un gruppo con il suo derivato produce un funtore $A : \mathcal{G}rp \to \mathcal{G}rp$ dalla categoria dei gruppi e omomorfismi in sé.

La costruzione del gruppo libero su un insieme si estende per universalità ad un funtore $F : \mathcal{I}ns \to \mathcal{G}rp$. Allo stesso modo, fissato un campo k, la costruzione del k-spazio vettoriale $k^{(X)} := \bigoplus_{x \in X} k$ sulla base X si estende a un funtore $k^{(-)} : \mathcal{I}ns \to \mathcal{V}tr_k$ nella categoria dei k-spazi vettoriali e applicazioni lineari tra essi.

Sulla stessa categoria $\mathcal{V}tr_k$, la costruzione dello spazio duale *non* è un funtore $\mathcal{V}tr_k \to \mathcal{V}tr_k$: la costruzione proposta associa correttamente ad ogni oggetto V di $\mathcal{V}tr_k$ lo spazio vettoriale $\mathrm{lin}(V,k)$, ma ad una freccia di $\mathcal{V}tr_k$, cioè ad un'applicazione lineare $f : V \to W$, si riesce soltanto a collegare un'applicazione

$$- \circ f : \phi \mapsto \phi \circ f : \mathrm{lin}(W,k) \to \mathrm{lin}(V,k)$$

In effetti, data la natura algebrica della teoria, sono disponibili molte costruzioni elementari di categorie astratte: ad esempio, date due categorie si costruisce la categoria prodotto con la struttura determinata componente per componente. Data una categoria C, si costruisce la categoria ***opposta*** C^{op} scambiando tra loro le funzioni ∂_0^C e ∂_1^C; dato che frecce consecutive restano consecutive, l'operazione resta la stessa. Insomma C^{op} è lo stesso grafo di C, ma tutti i versi delle frecce sono stati cambiati. Questa costruzione ha l'effetto collaterale di *rendere* la costruzione dello spazio duale un funtore $\mathrm{lin}(-,k) : \mathcal{V}tr_k \to \mathcal{V}tr_k^{\mathrm{op}}$ ed anche un funtore $\mathrm{lin}(-,k) : \mathcal{V}tr_k^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}tr_k$.

Numerosi esempi elementari di funtori sono i cosiddetti funtori *dimenticanti* [7]: agiscono da una categoria di strutture matematiche verso la categoria $\mathcal{I}ns$ degli insiemi e funzioni, *dimenticando* tutto di una struttura escluso l'insieme sottogiacente e *dimenticando* che un omomorfismo conserva la struttura trattenendo soltanto la funzione. Un esempio per tutti: il funtore dimenticante $U : \mathcal{G}rp \to \mathcal{I}ns$ associa ad un gruppo $G = (|G|, \cdot)$ l'insieme $|G|$ ed ad un omomorfismo $f : G \to H$ se stesso—dato che è una funzione $f : |G| \to |H|$.

2. – Il secondo livello

Come già scritto nell'introduzione, categorie e funtori sono strumentali per poter parlare di trasformazioni naturali tra funtori; queste appariranno come la corretta nozione di omomorfismo tra funtori. E come già avvisato, la definizione di trasformazione naturale è abbastanza ostica—è la condizione algebrica che solitamente scoraggia il tentativo di apprezzare il concetto.

DEFINIZIONE 2.1. – Date categorie C e D, dati funtori $F : C \to D$ e $G : C \to D$, una trasformazione naturale α da F a G è una famiglia

$$\left(F_0 c \xrightarrow{\alpha_c} G_0 c \right)_{c \in C_0}$$

di frecce nella categoria D indiciata dagli oggetti di C tale che per ogni freccia $c' \xrightarrow{a} c''$ si ha che

$$G_1(a)\alpha_{c'} = \alpha_{c''} F_1(a)$$

cioè il diagramma

$$\begin{tikzcd} F_0(c') \arrow[r, "\alpha_{c'}"] \arrow[d, "F_1(a)"'] & G(c') \arrow[d, "G_1(a)"] \\ F(c'') \arrow[r, "\alpha_{c''}"'] & G_0(c'') \end{tikzcd}$$

è commutativo.

[7] Strana traduzione del termine "forgetful" che nell'uso comune della lingua inglese significa "distratto".

Anche se F e G non sono strutture su insiemi, si utilizza una notazione simile alle funzioni per indicare che α è trasformazione naturale e si scrive $\alpha : F \dot{\to} G$.

Osservazione 2.2. -- Prima di presentare esempi di trasformazioni naturali, conviene osservare che tipo di collegamento sia richiesto da una trasformazione naturale: mentre i funtori F e G sono coppie di funzioni che si inseriscono a livelli omonimi

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, shift right, "\partial_0^C"'] \arrow[d, shift left, "\partial_1^C"] & D_1 \arrow[d, shift right, "\partial_0^D"'] \arrow[d, shift left, "\partial_1^D"] \\
C_0 \arrow[r, "F_0"] & D_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "G_1"] \arrow[d, shift right, "\partial_0^C"'] \arrow[d, shift left, "\partial_1^C"] & D_1 \arrow[d, shift right, "\partial_0^D"'] \arrow[d, shift left, "\partial_1^D"] \\
C_0 \arrow[r, "G_0"] & D_0
\end{tikzcd}
$$

la famiglia α è una funzione $\alpha : C_0 \to D_1$ che sale di un livello

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[d, shift right, "\partial_0^C"'] \arrow[d, shift left, "\partial_1^C"] & D_1 \arrow[d, shift right, "\partial_0^D"'] \arrow[d, shift left, "\partial_1^D"] \\
C_0 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "F_0"] \arrow[r, shift right, "G_0"'] & D_0
\end{tikzcd}
$$

Anche la condizione algebrica sulle frecce di C_1 può essere inserita in questo contesto, ma tale analisi travalicherebbe gli scopi della presente discussione.

Resta comunque il fatto che la trasformazione naturale α coinvolge soltanto la struttura di grafo su C e nulla di più.

Esempi 2.3 – Considerate due relazioni d'ordine $\leq_C \subseteq C_0 \times C_0$ su C_0 e $\leq_D \subseteq D_0 \times D_0$ su D_0 e due funzioni monotone $F_0, G_0 : C \to D$, una trasformazione naturale $\alpha : F \dot{\to} G$ indica che $F_0 \leq G_0$ nell'usuale relazione d'ordine tra funzioni a valori in un insieme ordinato. ([8])

([8]) Cioè, per ogni $c \in C_0$, si ha che $F_0(c) \leq_D G_0(c)$. Di conseguenza, se esiste, $\alpha : F \dot{\to} G$ è unica.

Considerati due monoidi M e N e due omomorfismi $F_1, G_1 : M \to N$, una trasformazione naturale $\alpha : F \stackrel{.}{\to} G$, essendo una famiglia indiciata da un insieme singoletto, consiste di un elemento $\alpha_\bullet$ di $|N|$ tale che, per ogni $a \in |M|$, si ha che $G_1(a)\alpha_\bullet = \alpha_\bullet F_1(a)$. Se N è un gruppo, la condizione dichiara che G_1 si ottiene coniugando F_1 con $\alpha_\bullet$.

Se M è un gruppo, considerati due funtori $F : C_M \to \mathcal{I}ns$ e $G : C_M \to \mathcal{I}ns$ dalla categoria C_M nella categoria $\mathcal{I}ns$, una trasformazione naturale $\alpha : F \stackrel{.}{\to} G$ determina esattamente un omomorfismo tra gli M-insiemi corrispondenti.

L'omomorfismo quoziente da un gruppo verso il quoziente con il suo derivato $\rho_G : G \to G/[G, G]$, al variare del gruppo G, è una trasformazione naturale $\rho : \mathrm{Id}_{\mathcal{G}rp} \stackrel{.}{\to} A$ dal funtore identità $\mathrm{Id}_{\mathcal{G}rp} : \mathcal{G}rp \to \mathcal{G}rp$ al funtore $A : \mathcal{G}rp \to \mathcal{G}rp$. Infatti per ogni omomorfismo $f : G \to H$ tra gruppi il diagramma $\mathcal{GRP}$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\rho_G"] \arrow[d, "f"'] & G/[G,G] \arrow[d, "A(f)"] \\
H \arrow[r, "\rho_H"'] & H/[H,H]
\end{tikzcd}$$

è commutativo. Ancora, una raffigurazione grafica condensa in modo utile la situazione: $\mathcal{G}rp$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}rp \arrow[r, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathcal{G}rp}"] \arrow[r, bend right, "A"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow\cdot\rho"] & \mathcal{G}rp.
\end{tikzcd}$$

L'immersione dei vettori di base nel k-spazio vettoriale $\upsilon_X : X \hookrightarrow U(k^{(X)})$, al variare dell'insieme X, è una trasformazione naturale $\mathcal{I}ns$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}ns \arrow[r, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathcal{I}ns}"] \arrow[r, bend right, "U \circ k^{(-)}"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow\cdot\upsilon"] & \mathcal{I}ns
\end{tikzcd}$$

dove $U \circ k^{(-)}$ è la composizione $\mathcal{I}ns \xrightarrow{k^{(-)}} \mathcal{V}tr_k \xrightarrow{U} \mathcal{I}ns$ del funtore $k^{(-)}$ che estende la costruzione dello spazio vettoriale su una base data e del funtore dimenticante per gli spazi vettoriali, come in 1.7.

Il prossimo esempio è il primo proposto in [5]. Come si è visto in 1.7, la costruzione dello spazio duale permette due versioni di funtore: $\mathrm{lin}(-,k) : \mathcal{V}tr_k \to \mathcal{V}tr_k^{\mathrm{op}}$ e $\mathrm{lin}(-,k) : \mathcal{V}tr_k^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}tr_k$. La loro composizione, il doppio duale, è un funtore

$$\mathrm{lin}(\mathrm{lin}(-,k),k) : \mathcal{V}tr_k \to \mathcal{V}tr_k.$$

Dato uno spazio vettoriale V, la funzione di valutazione sul vettore v è un omomorfismo

$$\begin{aligned} \varepsilon_V : V &\to \mathrm{lin}(\mathrm{lin}(V,k),k) \\ v &\longmapsto [\ell \mapsto \ell(v)] \end{aligned}$$

e, al variare dello spazio vettoriale V, produce una trasformazione naturale

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}tr_k \arrow[r, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathcal{V}tr_k}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{lin}(\mathrm{lin}(-,k),k)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \cdot\, \varepsilon"] & \mathcal{V}tr_k \end{tikzcd}$$

Quanto appena enunciato assicura che, per ogni applicazione lineare $f : V \to W$, il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varepsilon_G"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{lin}(\mathrm{lin}(V,k),k) \arrow[d, "\mathrm{lin}(\mathrm{lin}(f,k))"] \\ W \arrow[r, "\varepsilon_H"'] & \mathrm{lin}(\mathrm{lin}(W,k),k) \end{tikzcd}$$

è commutativo; infatti per ogni v in V e ogni ℓ in $\mathrm{lin}(W,k)$ si ha che

$$[(\mathrm{lin}(\mathrm{lin}(f,k)) \circ \varepsilon_V)(v)](\ell) = \ell(f(v)) = [\varepsilon_H(f(v))](\ell).$$

Nel caso che V sia di dimensione finita, ε_V è un isomorfismo. Anche $\mathrm{lin}(V,k)$ ha la stessa dimensione di V, ma non è possibile fare una scelta di un isomorfismo da V a $\mathrm{lin}(V,k)$ che sia canonica, "naturale" al variare di V di gli spazi vettoriali di dimensione finita.

Può certamente apparire che il concetto di trasformazione naturale sia una generalizzazione di molti casi matematici interessanti e, in quanto generalizzazione, non possa essere di grande utilità. È l'esperienza matematica degli ultimi cinquant'anni che ha mostrato come sia fruttuoso raccogliere strutture astratte "simili" in una categoria, dove si considerano *non solo* le strutture, *ma anche* i collegamenti tra esse—in quanto simili; è utile che i confronti tra categorie siano attuabili secondo elementari canoni algebrici (i funtori), ma avviene anche che la sovrapposizione di una struttura geometrica (il grafo) e di una struttura algebrica (l'operazione su frecce consecutive) permette di introdurre una nozione di confronto tra confronti (le trasformazioni naturali).

Ma è incredibile quanto l'esperienza mostri l'appropriatezza dell'aggettivo "naturale" che Eilenberg e Mac Lane accostarono a "trasformazione" per battezzare il concetto: quando si ha la sensazione che, in un collegamento tra strutture simili, ci sia qualcosa di canonico, non-speciale, è molto probabile che tale sensazione provenga dal fatto matematico che il collegamento è effettivamente naturale, una *trasformazione naturale*.

3. – Le aggiunzioni

Le aggiunzioni verranno introdotte nel caso di categorie localmente piccole. Il motivo è puramente per questioni di spazio; l'ipotesi di comodo attuata sulle categorie che si considerano da qui in poi dipende dal fatto di poter fare riferimento, per una categoria localmente piccola C, al funtore $\hom_C$

$$C(+,-) : C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathcal{I}ns$$

e questo permette di ridurre lo spazio necessario per introdurre il concetto di aggiunzione.

Il funtore $\hom_C$ si applica a coppie (c, c') di oggetti della categoria localmente piccola C a produrre l'insieme $C(c, c')$ come introdotto in (1) a p. 468. L'azione del funtore su coppie di frecce ($c \xleftarrow{a} b$, $c' \xrightarrow{a'} b'$) (9) è introdotta come segue

$$\begin{aligned} C(a, a') : C(c,c') &\to C(b, b') \\ f &\longmapsto a'fa \end{aligned}$$

(9) Si ricordi come nella categoria C^{op} le frecce siano quelle di C con verso rovesciato; per indicare una freccia $c \xrightarrow{a} b$ in C^{op} scriviamo la freccia con il verso in C, ma la indichiamo da destra verso sinistra.

DEFINIZIONE 3.1. – Siano C e D categorie localmente piccole. Si dice che la tripla (F, G, ψ) è un'***aggiunzione*** da C e D se $F : C \to D$ e $G : D \to C$ sono funtori e

$$\psi : D(F+, -) \dot{\to} C(+, G-)$$

una trasformazione naturale biiettiva. Si scrive $\psi : F \dashv G$, ma molto spesso si tralascia di specificare ψ e si riduce la scrittura a $F \dashv G$, parlando semplicemente di F è ***aggiunto sinistro di*** G e G è ***aggiunto destro di*** F.

La definizione appena fornita contiene elementi ridondanti. Richiamiamo una delle presentazioni equivalenti del concetto di aggiunzione, si veda uno tra [3, 7, 11, 12, 14, 16, 18].

TEOREMA 3.2. – *Siano C e D categorie localmente piccole.*

(i) *Siano $F : C \to D$ un funtore, $G_0 : D_0 \to C_0$ una funzione e, per ogni d oggetto di D, sia $\psi_d : D(F+, d) \dot{\to} C(+, G_0 d)$ una biiezione naturale. Allora G_0 può essere esteso ad un funtore in modo che (F, G, ψ) sia un'aggiunzione da C e D.*

(ii) *Siano $G : D \to C$ un funtore, $F_0 : C_0 \to D_0$ una funzione e, per ogni c oggetto di C, sia $\psi_c : D(F_0 c, -) \dot{\to} C(c, G-)$ una biiezione naturale. Allora F_0 può essere esteso ad un funtore in modo che (F, G, ψ) sia un'aggiunzione da C e D.*

Come conseguenza immediata di 3.2 si ottiene che, se $F : C \to D$ e $K : D \to E$ sono aggiunti sinistri, allora $K \circ F : C \to E$ è aggiunto sinistro.

ESEMPI 3.3 – Considerate due relazioni d'ordine $\leq_C \subseteq C_0 \times C_0$ su C_0 e $\leq_D \subseteq D_0 \times D_0$ su D_0, un'aggiunzione $\psi : F \dashv G$ con $F : C \to D$ e $G : D \to C$ corrisponde esattamente ad una connessione di Galois. (10) È chiaro che, dati F e G, ψ è unica.

(10) È opportuno notare che anche un'altra nozione di connessione di Galois appare in letteratura, specialmente nel secolo scorso: questa corrisponde ad un'aggiunzione da $(C_0, \leq_C)$ a $(D_0, \geq_D)$.

Considerati due gruppi G e H, un'aggiunzione $\psi : F \dashv G$ con $F : C_G \to C_H$ e $G : C_H \to C_G$ determina che $F_1 : G \to H$ e $G_1 : H \to G$ sono isomorfismi tali che l'omomorfismo composizione $G_1 \circ F_1$ è un automorfismo interno (dunque anche $F_1 \circ G_1$).

Il funtore gruppo libero $F : \mathcal{I}ns \to \mathcal{G}rp$ è aggiunto sinistro del funtore dimenticante $U : \mathcal{G}rp \to \mathcal{I}ns$. Allo stesso modo, fissato un campo k, il funtore $k^{(-)} : \mathcal{I}ns \to \mathcal{V}tr_k$ è aggiunto sinistro del funtore dimenticante $U : \mathcal{V}tr_k \to \mathcal{I}ns$.

Si consideri la costruzione del quoziente di un gruppo con il suo derivato come funtore $A : \mathcal{G}rp \to \mathcal{A}b$ nella categoria dei gruppi abeliani. Questo è aggiunto sinistro dell funtore inclusione $J : \mathcal{A}b \to \mathcal{G}rp$.

Fissato uno k-spazio vettoriale V, il funtore $\mathrm{lin}(V, -) : \mathcal{V}tr_k \to \mathcal{V}tr_k$ è aggiunto destro del funtore $V \otimes - \; : \mathcal{V}tr_k \to \mathcal{V}tr_k$.

È impossibile per questa presentazione andare oltre nel dettaglio della teoria delle categorie, ma riteniamo che gli esempi di aggiunzioni che sono stati elencati permettano al lettore di apprezzare come il linguaggio categoriale, per quanto molto astratto e generale, raggiunge un eccellente equilibrio tra astrazione e applicazione. La ragione per cui *non* è necessario verificare che la costruzione del gruppo libero sia funtoriale è dimostrata da 3.2(ii) ed è la *stessa* per cui il tensore di spazi vettoriali è funtoriale.

La nozione di aggiunzione (e di funtori aggiunti) appare realmente ubiqua in matematica, ma è importante notare che viene usata strumentalmente per determinare le corrette trasformazioni tra topos, si veda [1, 8, 9].

La vecchia denominazione della teoria delle categorie che la descriveva come "general abstract nonsense" ha perso qualunque connotazione derogatoria essa potesse avere: chi la usa apprezza in pieno le qualità che l'analisi categoriale offre al matematico—come ha detto Peter Freyd, «il suo scopo è di dimostrare come ciò che è ovvio sia ovviamente ovvio».

4. – Sul problema dei fondamenti

Mentre gli insiemi (meglio la teoria degli insiemi) offre una base sicura su cui formulare e costruire strutture astratte e dimostrare risultati riguardo ad esse, la teoria delle categorie offre un contenitore all'interno del quale cercare e modellare quelle particolari categorie di interesse per una specifica intuizione matematica. Esempi emblematici di questo sono i topos di Grothendieck, le categorie abeliane, le fibrazioni, le strutture di Quillen.

Perciò il problema dei fondamenti per la teoria delle categorie potrebbe essere confrontabile con il problema dei fondamenti per la teoria dei gruppi… Ma questo sarebbe una banalizzazione della questione: al momento odierno, la matematica si svolge serenamente basata sulla teoria degli insiemi ZFC, forse meglio sulla teoria delle classi NBG; all'interno della teoria NBG si riesce a sviluppare una ragionevole quantità di teoria delle categorie, come abbiamo visto considerando almeno un singolo livello di categorie grandi. È solo un piccolo sforzo quello richiesto per rafforzare la teoria NBG (e la teoria ZFC) a una teoria degli universi come proposto da Grothendieck dato che si può dimostrare un teorema di coerenza relativa, si veda [13, 19].

Ma l'osservazione cruciale è che tutte queste teorie, mentre sarebbero "fondazionali" per la teoria delle categorie nel senso di assicurare coerenza per la teoria (11), non sarebbero "fondazionali" nel senso di *spiegare* la natura profonda della teoria. (12) Inoltre, una tale fondazione dovrebbe riuscire in termini abbastanza semplici ed elementari, confrontabili con quelli della teoria presentata; in caso contrario andrebbe persa la natura stessa del carattere fondativo, limitandosi a spiegare una teoria semplice mediante una teoria complicata.

Il principale tentativo in questa direzione è sicuramente quello di Jean Bénabou, si veda [2], che descrive le proprietà cruciali delle categorie nel linguaggio delle fibrazioni. Una fibrazione è un funtore $F : C \to B$ che verifica una particolare proprietà di *sollevamento cartesiano* sicuramente di carattere elementare. Ma, indipendentemente dalla particolare proprietà, quel che Bénabou elabora—tra l'altro, con uno stile estremamente elegante—, è uno sviluppo molto esteso delle nozioni usuali in teoria delle categorie senza fare riferimento ad una teoria degli insiemi

(11) È a questo scopo che sono state utilizzate nelle sezioni precedenti.

(12) Le analisi fondazionali sviluppate per la teoria degli insiemi ottengono risultati che attaccano la natura profonda del concetto di insieme.

potente. I risultati di una tale ricerca hanno approfondito la comprensione della natura delle categorie, dimostrando ancora una volta quanto sia importante affrontare le questioni fondazionali.

Ringraziamenti. – Desideriamo ringraziare Ruggero Pagnan per alcuni suggerimenti importanti, Giulia Frosoni e Nicola Rebagliati per commenti su una versione preliminare.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] BARR, M., e WELLS, C. (1984), *Toposes triples and theories*, Springer, Berlin.
[2] BÉNABOU, J. (1985), 'Fibered categories and the foundations of naive category theory', *Journal of Symbolic Logic*, vol. 50, pp. 10–37.
[3] BORCEUX, F. (1995), *Handbook of categorical algebra*, 3 voll., Cambridge University Press, Cambridge.
[4] BOURBAKI, N. (1972), 'Appendice: Univers', In M. Artin *et al.*, *Théorie des topos et cohomologie etale des schémas*, vol. 1, Springer, Berlin, pp. 185–217.
[5] EILENBERG, S., e MAC Lane, S. (1945), 'General theory of natural equivalences', *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 58, pp. 231–294.
[6] FACCHINI, A., e LOLLI, G. (2010), 'Insiemi e classi', *La matematica nella società e nella cultura – Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, vol. 2, pp. 415–424.
[7] FREYD, P., e SCEDROV, A. (1991), *Categories, allegories*, North Holland, Amsterdam.
[8] GROTHENDIECK, A., e VERDIER, J. (1972), 'Théorie de topos', In M. Artin *et al.*, *Théorie des topos et cohomologie etale des schémas*, vol. 1, Springer, Berlin, pp. 299–518.
[9] JOHNSTONE, P. T. (2002), *Sketches of an elephant: A topos theory compendium*, 2 voll., Clarendon Press, Oxford.
[10] KAN, D. (1958), 'Adjoint functors', *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 87, pp. 294–329.
[11] LAMBEK, J., e SCOTT, P. (1986), *Introduction to higher order categorical logic*. Cambridge University Press, Cambridge.
[12] LEINSTER, T. (2014), *Basic Category Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
[13] LOLLI, G. (1977), *Categorie, universi e princìpi di riflessione*, Boringhieri, Torino.
[14] MAC LANE, S. (1971), *Categories for the working mathematician*, Springer, New York.
[15] MAC LANE, S. (1977), *Categorie nella pratica matematica*, Boringhieri, Torino.
[16] MAC LANE, S. (1998), *Categories for the working mathematician, Second edition*, Springer, New York.
[17] MARQUIS, J.-P. (2009), *From a geometrical point of view. A study of the history and philosophy of category theory*, Springer, New York.
[18] MCLARTY, C. (1995), *Elementary categories, elementary toposes*, Clarendon Press, Oxford.
[19] WILLIAMS, N. H. (1969), 'On Grothendieck universes', *Compositio Mathematica*, vol. 21, pp. 1–3.

Giuseppe Rosolini
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Genova
e-mail: rosolini@unige.it