ROSHDI RASHED

I problemi impossibili in numeri razionali e i problemi inaccessibili

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (2015), n.2, p. 279–312.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_2_279_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2015.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Agosto 2015, 279-312

I problemi impossibili in numeri razionali e i problemi inaccessibili (1)

Roshdi Rashed

1. – La scoperta dei problemi impossibili

C'è la consuetudine di insistere sull'importanza del ruolo dei problemi impossibili e dei problemi inaccessibili nello sviluppo di certi capitoli della matematica. Non è raro sentire citare nell'analisi diofantea l'esempio del teorema di Fermat e della sua storia fino alla sua recente dimostrazione. È noto infatti come, nel corso di tre secoli, questo teorema non abbia mai smesso di fecondare importanti capitoli delle matematiche. Ma sette secoli prima di Fermat, nel momento della nascita dell'analisi diofantea e in particolare dell'analisi diofantea intera, i matematici avevano scoperto molti problemi impossibili, tra cui proprio i due primi casi del teorema di Fermat [$n = 3, n = 4$]. Essi avevano anche sollevato altri quesiti alcuni dei quali rimasti aperti per molti secoli. Il problema è dunque sapere quando si sia cominciato a porsi tali domande, quando la nozione di « problema impossibile » sia diventata l'oggetto di una domanda alla quale poter dare una risposta positiva, in quali condizioni si sia arrivati a questa scoperta e cosa separi il contributo di questi primi matematici da quello di Fermat.

Per tentare di dare una risposta a queste domande occorre andare alle origini della ricerca sui problemi indeterminati, cioè ai triangoli rettangoli numerici e alle terne pitagoriche, e dunque, soprattutto alle *Aritmetiche* di Diofanto. Sappiamo che in Babilonia, in Egitto e altrove

(1) L'articolo è il testo della conferenza di Roshdi Rashed tenuta presso l'Accademia Nazionale dei Lincei a Roma il 29 Aprile 2014 nell'ambito del progetto *Con la mente e con le mani.* Si tratta di una rielaborazione del Capitolo 3 del libro di Rashed «*Histoire de l'Analyse Diophantienne Classique d'Abū Kāmil à Fermat*» Berlin, Walter de Gruyter, 2013. La traduzione è di Franco Ghione, Università di Roma "Tor Vergata".

ci si è occupati di questi triangoli e di queste terne. Ma mai, che io sappia, si è generalizzato lo studio dell'equazione $x^2 + y^2 = z^2$ in numeri razionali a potenze superiori – la terza per esempio – o si sono affrontati altri problemi indeterminati impossibili. In altre parole, porre l'impossibilità di risolvere l'equazione $x^3 + y^3 = z^3$ con numeri razionali non è mai stato, sia in queste matematiche che in quelle successive, l'effetto di una generalizzazione dell'equazione precedente. Questa è d'altronde la situazione nelle *Aritmetiche* di Diofanto.

Il caso di Diofanto è particolarmente importante, sia di per se stesso, sia per i legami storici che si sono intrecciati tra la sua analisi – « l'analisi di Diofanto » – e l'analisi diofantea, istituita molti secoli dopo di lui. Per dirla brevemente, questa analisi diofantea è stata elaborata inizialmente da Abū Kāmil (*ca* 830-900), indipendentemente dall'analisi di Diofanto, che sarà integrata nell'analisi diofantea un secolo più tardi ([2]).

Nel quarto libro delle *Aritmetiche,* nella versione araba, Diofanto studia i problemi aritmetici che fanno intervenire « tre specie di numeri » : lineari, quadrati, solidi. Egli procede in questo libro come negli altri, sistematicamente, con lo scopo di guidare il suo lettore «grado per grado». Si tratta di combinare le prime tre « specie » [x, x^2, x^3] in modo esaustivo secondo un ordine crescente di difficoltà. In questo quarto libro, Diofanto studia, nell'ordine, quattro problemi, che possiamo riscrivere in questo modo: $x^3 \pm y^3 = z^2, x^2 \pm y^2 = z^3$, in modo che ci si aspetti naturalmente di trovare anche i due problemi seguenti: $x^3 + y^3 = z^3$; ma non è così. Più avanti, in questo stesso libro, studia $x^4 \pm y^4 = z^3$, ma mai $x^4 \pm y^4 = z^4$ né $x^4 + y^4 = z^2$. È chiaro che queste assenze non sono l'effetto di una dimenticanza o del caso. Verosimilmente dopo aver enunciato i problemi nella forma: « trovare due cubi (o *quadrati-quadrati*) la cui somma (o differenza) sia un cubo (o un *quadrato-quadrato*) », Diofanto ha deciso di andare oltre non avendo trovato una soluzione razionale o delle terne di numeri razionali che gli permettessero di procedere all'inverso. È certo in ogni caso il fatto che

([2]) Da al-Karajī alla fine del x° secolo, vedi R. Rashed, *Histoire de l'analyse diophantienne classique : d'Abū Kāmil à Fermat*, Berlin, De Gruyter, 2013, cap. I.

lui non abbia affermato l'impossibilità di risolvere tali problemi con numeri razionali. In nessun momento Diofanto è stato tentato di enunciare la possibilità di studiare questioni impossibili, quando gli è capitato di incontrarle. Così nell'affrontare l'undicesimo problema del settimo libro nella traduzione araba perviene all'equazione $x^2 + y^2 = 3$, che oggi potremmo scrivere nella forma $x^2 + y^2 = 3 + 4n$. Si tratta di decomporre un numero primo della forma 3 (mod 4) nella somma di due quadrati; cosa impossibile. Ora, Diofanto avrebbe potuto dimostrare questa impossibilità a partire dai libri aritmetici degli *Elementi* di Euclide, che senza dubbio conosceva molto bene, e anche da altre proposizioni che da quelle possono ricavarsi ([3]) e che gli avrebbero permesso di arrivare alla soluzione. Invece ritorna al problema posto inizialmente per fare « quello che è possibile » ([4]) Si incontra la stessa situazione nei problemi V.9 e VI.14 (libri greci) ([5]).

Si constata come Diofanto eviti di enunciare un problema impossibile come $x^3 + y^3 = z^3$, o faccia marcia indietro quando, nel corso di una soluzione, si trova di fronte a un problema di quel tipo, anche quando sarebbe in grado di discuterne l'impossibilità. Sembra dunque che Diofanto passi intenzionalmente sotto silenzio questi problemi impossibili.

Ma Diofanto non è il solo in questa situazione. Notiamo anche che nessun matematico ellenistico noto, e questo per molti secoli ancora, ha affrontato problemi indeterminati impossibili da risolvere con numeri razionali. Sembra che un enunciato negativo non fosse accettabile e che la nozione di problema indeterminato impossibile fosse un enunciato negativo. Molte ragioni possono essere invocate per spiegare questa situazione: ad esempio l'assenza di mezzi tecnici matematici per dimostrare l'impossibilità. Ma questa ragione, senza dubbio valida, non è sicuramente la sola: noi vedremo infatti che nel X secolo i matematici

([3]) *Les Arithmétiques,* Testo stabilito e tradotto da R. Rashed, tome IV : *Livres V, VI, VII*, Collection des Universités de France, Paris, Les Belles Lettres, 1984, p. CXV-CXVII.

([4]) R. Rashed, *Les Arithmétiques*, tomo IV, p. 105.

([5]) R. Rashed et Ch. Houzel, *Les* Arithmétiques *de Diophante : lecture historique et mathématique*, Berlin, Walter de Gruyter, 2013, vedere i commenti ai Libri V e VI.

affronteranno questi problemi impossibili senza avere i mezzi matematici necessari. È anche importante una ragione sicuramente presente alla radice della matematica di quei tempi: la ragione ontologica. Per questi matematici, infatti, un problema senza soluzione, secondo il detto tipo di impossibilità, sarebbe senza oggetto, privo di realtà ontologica, sia che lo si affronti secondo la dottrina aristotelica dell'astrazione o secondo quella delle idee di Platone. A questo ostacolo si sovrappone la difficoltà metodologica maggiore ricordata precedentemente: la mancanza dei metodi matematici richiesti per dimostrare l'impossibilità.

Le cose non sono cambiate fino alla fine del nono secolo. Quattro eventi successivi hanno reso possibile la scoperta e lo studio dei problemi impossibili, e anche l'enunciazione di problemi « inaccessibili » nel campo dell'analisi diofantea e più in generale nell'algebra.

Il primo evento è la nascita dell'algebra come disciplina matematica, allo stesso tempo dimostrativa e algoritmica con al-Khwārizmī verso l'anno 830. Ne è nata una nuova organizzazione dell'ontologia: ormai l'oggetto matematico – la cosa o l'incognita – non si riferisce più a un ente particolare, a una realtà unica, che sia aritmetica o geometrica, ma a un oggetto generale, suscettibile di assumere le determinazioni più diverse. « La cosa » direbbero i teologi e i filosofi, è più generale dell'esistente. Da quel momento in poi le tecniche algebriche operano su oggetti generali e i risultati cui esse arrivano valgono nello stesso modo sugli interi, sui razionali e sugli irrazionali. In effetti queste tecniche potranno applicarsi su un corpo numerico qualsiasi. Nel quadro di una tale organizzazione ontologica, nulla impedisce di operare su degli enti dei quali non si è ancora stabilita l'esistenza – i numeri irrazionali – e sui dei « non-enti » – gli impossibili.

Il secondo evento è l'opera di Abū Kāmil [6]. Si tratta della costruzione dell'analisi diofantea razionale come capitolo dell'algebra. Contrariamente all'analisi di Diofanto, questa analisi diofantea è nata tra gli algebristi. Le equazioni possono avere una infinità di soluzioni razionali, come possono avere un numero finito di soluzioni, even-

[6] Vedere *Abū Kāmil. Algèbre et analyse diophantienne*, édition, traduction et commentaire par R. Rashed, Berlino / New York, Walter de Gruyter, 2012.

tualmente una sola, o non averne alcuna, e in questo caso l'insieme delle soluzioni può essere vuoto. Abū Kāmil introduce non solo determinati metodi per ottenere queste soluzioni, ma anche, almeno implicitamente, la nozione di calcolabilità del numero di soluzioni; nozione che non sfuggirà ai suoi successori, come al-Samaw'al (morto nel 1175).

Il terzo evento non tarderà a venire: nel corso della prima metà del X secolo, in effetti, si va formando l'analisi diofantea intera, elaborata da matematici quali al-Khujandī e al-Khāzin. Conoscendo la traduzione araba dei sette libri delle *Aritmetiche* di Diofanto, questi matematici hanno utilizzato le tecniche algebriche che avevano trovato per cercare delle soluzioni in numeri interi delle equazioni diofantee. In più, essi intendevano dimostrare la validità delle loro soluzioni con l'aiuto dell'aritmetica degli interi rappresentati con dei segmenti, cioè a dire l'aritmetica euclidea. Per i fondatori dell'analisi diofantea intera, non solamente sono ammissibili gli enunciati dei problemi impossibili, ma, ben di più, la nozione stessa di impossibilità diventa una nozione positiva poiché essa è ormai oggetto di dimostrazione. Così dimostrano, tra l'altro:

- Non esiste alcuna coppia di interi quadrati e dispari, la cui somma sia un quadrato.
- $2n$ (n intero > 0) non può essere la somma di due quadrati interi primi tra loro, cioè se $(x, y) = 1$ allora $x^2 + y^2 = 2n$ è impossibile ([7]).

Sono i matematici di questa tradizione che enunciano i due primi casi ([8]) del teorema di Fermat – $n = 3, 4$ – e provano, naturalmente senza riuscirci, a dimostrare il primo caso. Enunciano anche altri problemi impossibili tra cui la celebre proposizione che Fermat dimostrerà più tardi col metodo della discesa infinita:

([7]) Vedere R. Rashed, « L'analyse diophantienne au X^e siècle : l'exemple d'al-Khāzin », *Revue d'histoire des sciences*, 32, 1979, pp. 193-222 ; ripreso in *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Collection Sciences et philosophie arabes - Études et reprises, Paris, Les Belles Lettres, 1984, vedere in particolare pp. 202-203.

([8]) *Ibid.*

Non esiste alcun triangolo rettangolo numerico di area quadrata (9).

Il fatto di enunciare problemi impossibili come tali e cercare di dimostrali colpisce l'immaginazione a tal punto che un filosofo famoso come Avicenna lo menziona nella sua opera magistrale *al-Shifa'* (10).

È verso la fine del X secolo che si verifica il quarto evento quando al-Karajī concepisce il calcolo polinomiale e lo estende agli irrazionali algebrici. Erede d'Abū Kāmil, al-Karajī estende l'analisi diofantea razionale, la organizza secondo le forme polinomiali e vi integra i problemi di Diofanto. A sua volta scopre altri problemi impossibili, come (11)

$$y^2 = 10 + x^4.$$

I successori d'al-Karajī, come al-Samaw'al e al-Zanjānī, incontreranno anch'essi dei problemi impossibili e dei problemi che loro non potevano risolvere e che resteranno aperti per secoli. Il primo, per esempio, prende in esame l'equazione

$$y^3 = ax^2 + bx$$

che definisce una curva di genere 1 (12); il secondo, considera il primo caso del teorema di Fermat (13).

Così, a partire dal X secolo, i teorici dei numeri, quelli cioè che si occupano di analisi diofantea intera, enunciano dei problemi impossibili e dei problemi « inaccessibili »; gli algebristi aritmetici, il cui dominio è l'analisi diofantea razionale, incontrano costantemente dei problemi effettivamente impossibili e altri « inaccessibili » cioè tali che la loro impossibilità è conseguenza dello stato degli strumenti matematici del tempo. Tra questi ultimi problemi ve ne sono alcuni impossibili nel caso generale, ma possibili per valori particolari dei

(9) Vedere R. Rashed, *Histoire de l'analyse diophantienne classique*, cap. IV.

(10) Vedere Ibn Sīnā, *al-Shifā'*, *al-Manṭiq*, vol. V : *al-Burhān*, éd. A. 'Afīfī, introduit et révisé par I. Madkūr, Il Cairo Imprimerie nationale, 1956, pp. 194-195.

(11) Vedere R. Rashed, *Histoire de l'analyse diophantienne classique: d'Abū Kāmil à Fermat*. Note complémentaire [1], p. 311-316.

(12) Vedere R. Rashed, *Histoire de l'analyse diophantienne classique*, cap. I, p. 75 e Note complémentaire [1], p. 317.

(13) *Ibid.*, cap. I, p. 38.

coefficienti. Il campo dei problemi impossibili diventa molto vasto ma eterogeneo perché vi si trovano alla rinfusa molte classi di problemi. Gli algebristi hanno allora cercato di compilare degli elenchi di tali problemi e di segnalarli nei loro trattati di algebra aritmetica riservando loro un capitolo particolare. Ma poiché questi problemi erano molto eterogenei, li hanno raggruppati sotto il titolo di « problemi inaccessibili » (*musta ʿṣiyya*), cioè problemi difficili per i quali non c'è dimostrazione né positiva né negativa.

Il primo matematico che ha redatto tali elenchi è Ibn al-Khawwām nel suo libro *al-Fawā ʿid al-Bahā ʾiyya fī al-qawā ʿid al-ḥisābiyya* scritto nel 1277 ([14]). Si tratta di un'opera compilativa scritta da un matematico non al livello degli inventori. Si può d'altronde pensare che qu'Ibn al-Khawwām, sia stato preceduto da matematici, ancora sconosciuti, della tradizione di al-Karajī, anch'essi interessati a questi problemi. Comunque sia Ibn al-Khawwām, propone un elenco di trentatré problemi, una sfida per i matematici e un incitamento alla ricerca. Descrive questi problemi come « quelli dei quali non se ne può risolvere alcuno »; sottintendendo con i metodi dell'algebra aritmetica e con numeri razionali. Prosegue: « non pretendiamo di dare la dimostrazione della loro impossibilità, ma diciamo semplicemente che non possiamo risolverli » ([15]). La sfumatura è importante perché Ibn al-Khawwām sapeva dai suoi predecessori che un certo numero di questi problemi era impossibile, ma mancava ancora una dimostrazione convincente della loro impossibilità e anche un algoritmo per

([14]) ʿAbd Allāh ibn Muḥammad ibn al-Khawwām al-Baghdādī (1245-1324) è allievo di Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (597/1201-672/1274) e il professore di Kamāl al-Dīn al-Fārisī (m. 1319). È stato giurista e matematico e ha insegnato a Isfahan, poi a Bagdad, fino alla sua morte. È a Isfahan dove ha scritto il suo libro *al-Fawā ʾid al-Bahā ʾiyya*, prima di partire per Bagdad (cf. per esempio Ibn Ḥajar al-ʿAsqalānī, *al-Durar al-kāmina fī a ʿyān al-mi'a al-thāmina*, vol. V, ed. Jād al-Ḥaq, Le Caire, 1966). Il libro ci è pervenuto in numerosi manoscritti, ma non è ancora stato oggetto, a nostra conoscenza, di una edizione critica. Ci riferiamo qua al manoscritto di Londra, British Library, Or. 5615, in particolare folio 43v- 45v, datata dal mese di Shaʿbān 675H/ gennaio 1277. Si troverà in appendice una edizione critica del capitolo *Faṣl fī dhikr al-masā ʾil allatī lā yumkin an yu ʾta bi-jawāb wāḥida minhā*. « Capitolo sulla esposizione dei problemi dei quali nessuno può essere risolto ».

([15]) Ms. Londra, British Library, Or. 5615, fol. 43v.

decidere effettivamente se certuni di questi problemi sono o non sono risolubili. In ogni caso queste affermazioni di Ibn al-Khawwām, confermano a loro volta che l'impossibilità era per i matematici del XIII secolo, oggetto di una dimostrazione. Essi indicano d'altra parte i limiti delle conoscenze matematiche dell'epoca nel campo dell'analisi indeterminata e, più in generale, in quello dell'algebra aritmetica. Ci suggeriscono pertanto di tentare di individuare i punti, dove nascono le difficoltà che hanno ostacolato questi matematici impedendo loro di distinguere fra queste differenti classi di problemi e di dimostrare l'impossibilità di gran parte di loro. Questi punti costituiscono una parte importante della storia dell'analisi diofantea e di quella dell'algebra. Ma per trovarli occorre evidentemente uno strumento matematico molto più potente di quello di cui disponevano i matematici dell'epoca.

2. – Problemi impossibili e problemi inaccessibili

La lista di problemi fornita da Ibn al-Khawwām, ha attraversato i secoli: Kamāl al-Dīn al-Fārisī (morto nel 1319) ne riporta alcuni nel suo trattato d'algebra, *Asās al-Qawā'id fī uṣūl al-fawā'id* (16), e, molto più tardi, al-'Āmilī (1547-1622), in *Khulāṣāt al-ḥisāb* (17), ne propone sette, sempre a titolo di sfida. È attraverso questo libro che gli storici hanno potuto conoscere alcuni dei quesiti dell'elenco di Ibn al-Khawwām. Ma ne l'uno ne l'altro dei due autori propone metodi che avrebbero permesso di andare più lontano. Bisognerà aspettare Fermat che ne ripropone un certo numero, alcuni dei quali con dimostrazioni. Notiamo infine, prima di esaminare i problemi di questa lista, che quasi la metà di essi è di fatto impossibile.

– 1 – « Trovare due numeri quadrati la cui somma e differenza sia un numero quadrato. »

$$x_1^2 + x_2^2 = y^2, x_1^2 - x_2^2 = z^2.$$

(16) Al-Fārisī, *Asās al-Qawā'id fī uṣūl al-fawā'id*, éd. M. Mawaldi, Institute of Arab Manuscripts, Le Caire, 1994, p. 603.

(17) Stabilito da Jalāl Shawky, *Mathematical Works of Bahā' al-Dīn al-'Āmilī*, Alep, 1976.

Se si moltiplicano queste equazioni otteniamo $x_1^4 - x_2^4 = y^2 z^2$, equazione della forma $x_1^4 - x_2^4 = t^2$. Si sa che questa equazione non ha soluzioni eccetto $x_1 = \pm 1, x_2 = \pm 1, t = 0$ e $x_1 = \pm 1, x_2 = 0, t = \pm 1$ ([18]). Questo si dimostra usando la discesa infinita, metodo sconosciuto all'epoca.

– **2** – « Trovare tre numeri quadrati la cui somma sia un numero quadrato e tali che la somma di due qualunque di loro sia uguale al quadrato del terzo. »

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y^2, x_1^2 + x_2^2 = x_3^4, x_2^2 + x_3^2 = x_1^4, x_1^2 + x_3^2 = x_2^4$$

Se si sommano le ultime tre equazioni si ottiene $x_1^4 + x_2^4 = x_3^4 = 2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^4\right)$. Ora, per ogni numero a, si ha $a^4 \equiv a^2 \pmod 8$; l'equazione precedente, presa *modulo* 8, si scrive $y^2 \equiv 2y^2 \pmod 8$, e questo esige che y sia pari, e di conseguenza che x_1, x_2, x_3 e y siano pari. Poniamo dunque $x_1 = 2k\xi_1, x_2 = 2^k\xi_2, x^3 = 2^k\xi_3$ e $y = 2^k\eta$ dove $k \geq 1$ e uno almeno dei numeri ξ_1, ξ_2, ξ_3 sia dispari. Si ha

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \eta^2, \xi_1^2 + \xi_2^2 = 2^{2k}\xi_3^4, \xi_2^2 + \xi_3^2 = 2^{2k}\xi_1^4, \xi_1^2 + \xi_3^2 = 2^{2k}\xi_2^4$$

se si addizionano di nuovo le tre ultime equazioni, si ottiene

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 2^{2k-1}\left(\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4\right)$$

da cui $\eta^2 \equiv 2^{2k-1}\eta^2 \pmod 8$. Dunque η è pari poiché $2k - 1 \geq 1$, e di conseguenza anche ξ_1, ξ_2, ξ_3 sono pari, cosa assurda. Il sistema è dunque impossibile per ragioni legate alle congruenze mod 8.

– **3** – « Trovare un triangolo rettangolo i cui lati siano uguali a un numero quadrato. »

Si tratta di trovare una terna pitagorica (x,y,z) tale che $x = \xi^2$, $y = \eta^2$ e $z = \zeta^2$ siano dei quadrati. Si ha dunque

$$\xi^4 + \eta^4 = \zeta^4$$

([18]) Cf. Fermat, *Observation* 45. Frenicle (1676) dimostra l'impossibilità del sistema. Cf. L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, 3 vol., Washington, Carnegie Institution of Washington, 1919-1923.

e si sa che questa equazione non ha che soluzioni banali in cui uno dei numeri ξ, η è nullo (Fermat, *Observations* 33 e 45). Questo si dimostra con la discesa infinita ([19]).

– **4** – « Dividere dieci in due parti uguali tali che se si aggiunge a ciascuna di loro la propria radice e se si moltiplica la somma ottenuta dall'una con la somma ottenuta dall'altra, si ha come prodotto un numero dato. »

$$x + y = 10, (x + \sqrt{x})(y + \sqrt{y}) = a \text{ (supposto intero).}$$

È un problema determinato, la cui difficoltà (per l'epoca) proviene dalla presenza dei radicali. Si ha $xy + x\sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{xy} = a$; ora se x e y sono dei numeri razionali che non sono proporzionali a dei quadrati di numeri razionali, i numeri 1, $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ e $\sqrt{xy}$, sono linearmente indipendenti su $\mathbf{Q}$. La seconda equazione del problema esige allora che $x = \xi^2$ e $y = \eta^2$ siano dei quadrati, di conseguenza l'equazione diventa $\xi\eta(\xi + 1)(\eta + 1) = a$; e la prima equazione $\xi^2 + \eta^2 = 10$. Poniamo $\xi + \eta = s$ e $\xi\eta = p$; il sistema diventa

$$s^2 - 2p = 10$$

$$p(p + s + 1) = a.$$

Se si elimina s da queste due equazioni si trova $p^4 - (2a + 9)p^2 - 2ap + a^2 = 0$; se a è intero, questa equazione mostra che p, supposto razionale, è pure intero. L'equazione $s^2 - 2p = 10$ mostra che $s = 2t$ è un intero pari. Si ha $(\xi - \eta)^2 = 10 - 2p = 4u^2$ quadrato pari, dunque $p = 5 - 2u^2$, dove u è un intero; così $s^2 = 10 + 2p = 4(5 - u^2)$ e $5 = u^2 + t^2$. Dato che u e t sono interi e $2u^2 < 5$, $(t, u) = (2, 1)$; si ha quindi

$$p = 3,\ s = 4 = \xi + \eta,\ \xi - \eta = \pm 2.$$

Possiamo sempre supporre che $\xi \geq \eta$, e cambiando, se necessario, i ruoli di x e di y, troviamo $\xi = 3$, $\eta = 1$, $x = 9$, $y = 1$, $a = 3 \cdot 8 = 24$. Il sistema proposto ha dunque una soluzione razionale solo nel caso

([19]) Vedere R. Rashed, *Histoire de l'analyse diophantienne classique*, cap. IV, p. 263 e segg.

$a = 24$; questa soluzione è intera: $x = 9$, $y = 1$. Ora nel caso $a = 24$ è facile trovare questa soluzione; l'analisi del caso in cui a è qualunque necessita la conoscenza del fatto che 1, $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ e $\sqrt{xy}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{Q}$ quando $\sqrt{x}$ e $\sqrt{xy}$ non sono proporzionali a dei numeri razionali.

– **5** – « Dividere dieci in due parti tali che, se si divide ciascuna di loro per l'altra, e se si addizionano i quozienti e si moltiplica la somma perse stessa e per una delle due parti di 10, si abbia un numero dato. »

$$x + y = 10, \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 x = a.$$

Questo problema è ancora determinato; la seconda equazione si scrive $(x^2 + y^2)^2 = axy^2$ e si ha $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 100 - 2p$ ponendo $p = xy$. Si ha dunque $(100 - 2p)^2 = apy$ e $100 - 4p = 4u^2$ dove $u = \dfrac{x-y}{2}$; così

$$x = 5 + u, y = 5 - u = \frac{4(25 + u^2)^2}{a(25 - u^2)}.$$

Il parametro razionale u deve dunque essere una radice dell'equazione di quarto grado $a(5 - u)(25 - u^2) = 4(25 + u^2)^2$, cioè

$$4u^4 - au^3 + 5u^2(a + 40) + 25au - 125(a - 20) = 0.$$

Dato che u è razionale e a è supposto intero, $2u$ deve essere intero e dividere $125(a - 20)$; in più, $2u = x - y < 10$. Si verifica che i valori $u = 1, 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, e $\frac{9}{2}$ non producono per a un valore intero. La sola possibilità è dunque $u = 0$, $a = 20$, che porta a $x = y = 5$. Ibn al-Khawwām, non dà questa soluzione evidente perché pare sottintenda che x e y debbano essere distinti. Vediamo dunque, come per il problema 4, che questo problema non ha soluzioni che per un particolare valore di a, peraltro escluso se si impone $x \neq y$. Ma questa volta, la dimostrazione di impossibilità non richiede conoscenze radicalmente fuori portata all'epoca.

– 6 – « Dividere dieci in due parti tali che se si moltiplica ciascuna di loro per la propria radice e se si addizionano i prodotti, si abbia una numero dato. »

$$x + y = 10,\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = a.$$

Come per il problema 4, si vede intanto che $x = \xi^2$ e $y = \eta^2$ sono quadrati e il sistema diventa $\xi^2 + \eta^2 = 10$, $\xi^3 + \eta^3 = a$. Poniamo $\xi + \eta = s$, $\xi\eta = p$ si ha $s^2 - 2p = 10$, $s^3 - 3sp = a$. Si elimini p tra queste due equazioni : $s^3 - 30s + 2a = 0$, equazione che mostra che, se a è intero e s razionale, s è intero.

Si ha $(\xi - \eta)^2 = 10 - 2p = 20 - s^2 = u^2$ quadrato intero, cioè $s^2 + u^2 = 20$; le soluzioni sono $(s, u) = (4, 2)$ perché $s = \xi + \eta > u = \xi - \eta$ (si suppone $x > y$). Così $s = 4$, $p = 3$ e $\xi - \eta = 2$, ciò comporta $\xi = 3$, $\eta = 1$ e $a = 28$, poi $x = 9$, $y = 1$. Come nel caso del problema 4, Ibn al-Khawwām, poteva trovare questo valore particolare, ma non poteva stabilire l'impossibilità per $a \neq 28$.

– 7 – « Trovare un numero quadrato di lato quadrato tale che se si aggiunge al suo lato un *dirham*, la somma sia un numero quadrato. »

$$x^4 + x^2 + 1 = y^2.$$

Questa equazione definisce una curva ellittica con i punti razionali evidenti $(x, y) = (0, \pm 1)$. Ci si riduce alla forma canonica di Weierstrass ponendo $y = \frac{u}{2} - x^2$; si trova $x^4 + x^2 + 1 = x^4 - ux^2 + \frac{u^2}{4}$, cioè $4(u + 1)\, x^2 = u^2 - 4$. Questa equazione non può avere una radice x razionale tranne se $(u + 1)(u^2 - 4) = v^2$ è un quadrato; si ha allora

$$x = \frac{v}{2(u+1)},\ y = \frac{u}{2} - \frac{u^2 - 4}{4(u+1)} = \frac{u^2 + 2u + 4}{4(u+1)}$$

e inversamente

$$u = 2(y - x^2), v = 2x(2y - 2x^2 + 1).$$

La curva definita dal problema è dunque birazionalmente equivalente alla curva di equazione

$$v^2 = u^3 + u^2 - 4u - 4,$$

di discriminante 84 e invariante $j = \frac{1}{84}$. La ricerca dei punti razionali su una tale curva è difficile anche oggi; in ogni caso fuori dalla portata dei matematici dell'epoca.

– 8 – « Trovare tre numeri quadrati proporzionali la cui somma sia un quadrato. »

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2}{z^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = w^2.$$

Questo sistema si riduce a $xz = y^2$, $x^2 + xz + z^2 = w^2$. La seconda equazione definisce un cono quadratico; si può parametrizzarlo facilmente con il metodo della corda: si taglia il cono con un piano che passa per la generatrice $x = 0$, $w = -z$, di equazione $w = \frac{u}{2}x - z$. Questo fornisce l'equazione

$$x^2 + xz + z^2 = z^2 - uxz + \frac{u^2}{4}x^2,$$

da cui $(u^2 - 4)x = 4(u + 1)z$; si ha

$$x = 4m(u + 1), \quad z = m(u^2 - 4) \ \text{ e } \ w = m(u^2 + 2u + 4),$$

dove u, m sono dei parametri razionali. Ci resta da scegliere u, m in maniera che

$$xz = 4m^2(u + 1)(u^2 - 4)$$

sia un quadrato. Si deve dunque imporre che $(u + 1)(u^2 - 4) = v^2$ sia un quadrato e si ritrova la stessa curva ellittica del caso precedente.

– **9** – « Trovare due numeri quadrati tali che il prodotto di uno di essi per la loro somma sia il quadrato dell'altro numero. »

$$x^2(x^2 + y^2) = y^4.$$

Questa equazione si scrive $y^4 - x^4 = (xy)^2$ e si sa che è impossibile (Fermat, *Observation* 45). La abbiamo già incontrata nel problema 1.

– **10** – « Trovare quattro numeri quadrati tali che se si moltiplica il primo per se stesso e il prodotto per il secondo, e ciò che si ottiene per il terzo e poi ancora ciò che si ottiene per il quarto, si ritrovino i quattro numeri. »

$$x^4y^2z^2w^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

Questa equazione definisce una ipersuperficie di grado 10 in uno spazio di dimensione 4; ha un piano quadruplo all'infinito nello spazio di coordinate (x, y, z). Possiamo intersecare la superficie con il piano $x = m$, $y = n$ (costanti) e si ha:

$$(m^4n^2z^2 - 1)w^2 = z^2 + m^2 + n^2,$$

equazione della curva intersezione, che è una quartica di genere 1. Se poniamo

$$\left(m^4n^2z^2 - 1\right)w = \frac{u}{2m^2n} - m^2nz^2,$$

si ottiene

$$\left(m^4n^2z^2 - 1\right)\left(z^2 + m^2 + n^2\right) = \left(m^2nz^2 - \frac{u}{2m^2n}\right),$$

sia $(u + m^6n^2 + m^4n^4 - 1)z^2 = \dfrac{u^2}{4m^4n^2} + m^2 + n^2$; questa equazione ammette una soluzione razionale se

$$(u + m^6n^2 + m^4n^4 - 1)(u^2 + 4m^6n^2 + 4m^4n^4) = v^2$$

è un quadrato. Si ha allora

$$z = \frac{v}{2m^2n(u + m^6n^2 + m^4n^4 - 1)}, \quad w = \frac{u^2 - 2m^6n^2 - 2m^4n^4 - 2}{m^2n(u - 2)^2}$$

e, inversamente,

$$u = 2m^2n(m^4n^2z^2w - w + m^2nz^2),$$
$$v = 2m^2nz(2m^6n^3z^2w - 2m^2nw + 2m^4n^2z^2 + m^6n^2 + m^4n^4 - 1);$$

la curva intersezione col piano $x = m$, $y = n$ è dunque birazionalmente equivalente alla cubica

$$u^3 + (m^6n^2 + m^4n^4 - 1)u^2 + 4m^4n^2u(m^2 + n^2) +$$
$$+ 4m^4n^2(m^2 + n^2)(m^6n^2 + m^4n^4 - 1) = v^2.$$

Si tratta ancora di una curva di genere 1 e la ricerca dei suoi punti razionali è difficile anche oggi.

– 11 – « Dividere 10 in due parti quadrate tali che se aggiungiamo a ciascuna di esse la sua radice, la somma sia un quadrato. »

$$x^2 + y^2 = 10,\ x^2 + x = t^2,\ y^2 + y = z^2$$

Poniamo $t = ux$ e $z = vy$; si trova

$$x = \frac{1}{u^2 - 1},\ t = \frac{u}{u^2 - 1},\ y = \frac{1}{v^2 - 1},\ z = \frac{1}{v^2 - 1}$$

e resta da verificare che

$$\frac{1}{(u^2 - 1)^2} + \frac{1}{(v^2 - 1)^2} = 10,$$

cioè

$$10u^4v^4 - 20u^4v^2 - 20u^2v^4 + 9u^4 + 40u^2v^2 + 9v^4 - 18u^2 - 18v^2 + 8 = 0,$$

equazione di una curva di grado 8 nelle coordinate (u, v).

– 12 – « Trovare un cubo tale che, se gli aggiungiamo un *dirham*, la somma sia un cubo. »

$$x^3 + 1 = y^3.$$

Se rendiamo omogenea questa equazione otteniamo $x^3 + z^3 = y^3$, la cui impossibilità è nota (Fermat la enuncia come problema nella lettera a Digby del 15 agosto 1657 e Euler ne dimostra l'impossibilità ([20])). L'impossibilità deriva da una discesa infinita.

– **13** – « Trovare due cubi tali che, se dividiamo ciascuno di loro per l'altro e se addizioniamo i quozienti si abbia un numero quadrato. »

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} = z^2.$$

Questa equazione definisce una superficie di grado 8 : $x^6 + y^6 = x^3y^3z^2$. La superficie ha un punto multiplo di ordine 6 nell'origine; se la si interseca con una retta che passa per questo punto di equazioni $x = \lambda z$, $y = \mu z$, si trova l'equazione $\lambda^6 + \mu^6 = \lambda^3\mu^3z^2$ che non ha soluzioni razionali tranne se $\lambda\mu(\lambda^6 + \mu^6) = v^2$ è un quadrato. Supponiamo che $\lambda = \frac{p}{q}$, $\mu = \frac{r}{q}$, $v = \frac{s}{q}$, dove q è il minimo denominatore comune; se p e r hanno un fattore comune d, questo è primo con q e se ne deduce che d^4 divide v in modo che si può semplificare l'equazione per d^8 e ridursi al caso in cui $(p, r) = 1$. Allora $p^6 + r^6$ è anche primo con p e con r e l'equazione $pr(p^6 + r^6) = (q^3s)^2$ mostra che $p = m^2$, $r = n^2$ e $p^6 + r^6 = m^{12} + n^{12}$ sono quadrati; ora questo è impossibile dato che $(m^3)^4 + (n^3)^4$ non è mai un quadrato (Fermat, *Observation* 45). L'equazione non ha dunque soluzioni (discesa infinita).

– **14** – « Trovare due numeri quadrati tali che, se dividiamo ciascuno di loro per l'altro, addizioniamo i quozienti e moltiplichiamo la somma per uno di essi, si abbia un numero quadrato. »

$$x^2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) = z^2.$$

Questa equazione si scrive $x^4 + y^4 = (yz)^2$, impossibile (Fermat, discesa infinita).

([20]) Cf. Euler, *Élémens d'Algèbre*, Nouvelle édition, revue et augmentée de notes, par J. G. Garnier, 2 vol., Paris, 1806-7.

– 15 – « Dividere dieci in due parti tali che, se noi dividiamo la più piccola per la più grande e aggiungiamo il quoziente alla più grande, poi moltiplichiamo la somma per la più piccola ([21]), si abbia un numero dato. »

$$x + y = 10, \left(\frac{x}{y} + y\right)x = a \text{ e } x < y.$$

Questo problema è determinato; la seconda equazione si scrive $x^2 + xy^2 = ay$ e, poiché $x = 10 - y$, si ha $y^3 - 11y^2 + (a + 20)y - 100 = 0$. Se y è razionale, è intero e divide 100 (supponiamo ovviamente a intero) e si ha $a = \frac{100}{y} - 20 + 11y - y^2$. Affinché sia $a > 0$, si deve prendere $y > 0$; la condizione $y > 10 - y$ esige d'altra parte che sia $y > 5$, e il solo divisore di 100 utile sarà $y = 10$, ma questo dà $x = 0$ e $a = 0$. Il problema è dunque impossibile con numeri razionali positivi. La dimostrazione dell'impossibilità riposa ancora una volta sul carattere integralmente chiuso di $\boldsymbol{Z}$.

([21]) Nel manoscritto, fol. 44[v], si legge: « poi moltiplichiamo la somma per la più grande ».

تريد أن نقسم عشرة بقسمين إذا قسمنا أقلهما على الأكثر وزدنا ما خرج من القسمة على الأكثر، ثم ضربنا المجتمع في الأكثر، يكون ذلك عددا مفروضا.

In questo caso il problema si scrive:

$$x + y = 10, \left(\frac{x}{y} + y\right)x = a$$

e la soluzione è immediata: si ha $x + y^2 = a$, dunque $y^2 - y + 10 - a = 0$, equazione quadratica di discriminate $4a - 39$, che deve essere quadrato. Questo implica che a sia della forma $k^2 + k + 10$, dove k è intero. Così abbiamo

$$(x, y) = (9 - k, k + 1) \text{ se } k \geq 0 \text{ e } (x, y) = (10 + k, -k) \text{ se } k < 0.$$

Queste soluzioni sono una soluzione perché possiamo trasformare la prima nella seconda ponendo $k = -k' - 1$. È evidente che questo problema avrebbe potuto essere facilmente risolto all'epoca. Bisognerà quindi leggere « la più piccola » affinché il problema trovi un suo posto in questa collezione. Dunque si scrive come abbiamo detto e siamo chiaramente in presenza di un errore del copista.

– **16** – « Trovare un numero quadrato tale che se lo si sottrae da dieci sue radici e dieci *dirham*, il resto sia un quadrato.»

$$10x - x^2 + 10 = y^2$$

sia

$$(x - 5)^2 + y^2 = 35.$$

Se x e y sono razionali li scriviamo $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{q}$, dove $(p, q, r) = 1$. Si ha dunque

$$(p - 5q)^2 + r^2 = 35q^2.$$

Questa equazione considerata modulo 4 implica che $p - 5q$, r e q siano pari. Ora questo contraddice l'ipotesi secondo la quale $(p, q, r) = 1$. Il problema è dunque impossibile.

– **17** – « Si lascia in eredità a Zayd dieci *dirham* meno la radice del lascito di ʻAmr e a ʻAmr cinque *dirham* meno la radice del lascito di Zayd. »

Supponiamo che il lascito di ʻAmr sia x^2; quello di Zayd è dunque $10 - x$; quello di ʻAmr è dunque $x^2 = 5 - \sqrt{10 - x}$; da cui

$$x^4 - 10x^2 + x + 15 = 0.$$

Le soluzioni razionali dovranno essere degli interi che dividono 15: si verifica che questo è impossibile. L'equazione ha delle radici irrazionali; è un problema determinato impossibile da risolvere con numeri razionali.

– **18** – « Trovare un numero che abbia una radice tale che, se noi gli aggiungiamo dieci *dirham*, la somma abbia una radice, e se gli leviamo dieci *dirham* il resto abbia una radice. »

$$x^2 + 10 = y_1^2, \; x^2 - 10 = y_2^2.$$

Si tratta di sapere se 10 è un numero congruente; si sa che questo non è il caso ([22]).

([22]) L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, t. II, Washington 1920, cap. XVI.

– **19** – « Un quadrato ha una radice. Se tu gli aggiungi la sua radice e due *dirham* la somma avrà una radice; e se tu gli togli la sua radice e due *dirham* il resto avrà una radice. »

$$x^2 + x + 2 = y_1^2, x^2 - x - 2 = y_2^2.$$

Il metodo di Diofanto della doppia equazione porta a fare la differenza delle due equazioni:

$$2(x + 2) = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2),$$

e a porre

$$y_1 + y_2 = \lambda(x + 2), y_1 - y_2 = \frac{2}{\lambda};$$

si ha allora

$$y_1 = \frac{\lambda x}{2} + \lambda + \frac{1}{\lambda},\ y_2 = \frac{\lambda x}{2} + \lambda - \frac{1}{\lambda}.$$

Se si riporta nella prima equazione il valore di y_1 così ottenuto si trova una equazione quadratica in x:

$$x^2 + x + 2 = \frac{\lambda^2 x^2}{4} + \left(\lambda^2 + 1\right)x + \lambda^2 + 2 + \frac{1}{\lambda^2},$$

cioè $\lambda^2 x^2(\lambda^2 - 4) + 4\lambda^4 x + 4\lambda^4 + 4 = 0$. Il discriminate di questa equazione è uguale a $4\lambda^2(4\lambda^4 - \lambda^2 + 4)$ e dobbiamo dunque imporre che $4\lambda^4 - \lambda^2 + 4 = \mu^2$ sia un quadrato, di modo che

$$x = 2\frac{\mu - \lambda^3}{\lambda\left(\lambda^2 - 4\right)},\ y_1 = \frac{2\lambda\mu - \lambda^4 - 3\lambda^2 - 4}{\lambda\left(\lambda^2 - 4\right)},\ y_2 = \frac{2\lambda\mu - \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4}{\lambda\left(\lambda^2 - 4\right)};$$

inversamente,

$$\lambda = \frac{y_1 + y_2}{x + 2},\ \mu = \frac{y_1 + y_2}{(x + 2)^2}\left(y_1 y_2 - 3x^2 - 8x\right).$$

Così la curva definita dalle equazioni del problema è birazionalmente equivalente alla curva ellittica di equazione

$$4\lambda^4 - \lambda^2 + 4 = \mu^2;$$

i punti $(\lambda, \mu) = (0, \pm 2), (\pm 2, \pm 8)$ danno dei valori infiniti a x, y_1, y_2 e i punti $(\lambda, \mu) = (\pm 2, \pm 8)$ sono dei punti fondamentali della trasformazione birazionale. Se si pone $\lambda = \pm 2$ nell'equazione in x, troviamo $x = -\frac{17}{16}$, $y_1 = \pm\frac{23}{16}$, $y_2 = \pm\frac{7}{16}$.

Per costruire gli altri punti razionali, si trasforma la curva di grado 4 in (λ, μ) in una cubica: si pone $\mu = \frac{u}{4} - 2\lambda^2$, da cui $-\lambda^2 + 4 = -u\lambda + \frac{u^2}{16}$, cioè $16(u-1)\lambda^2 = u^2 - 64$; affinché λ sia razionale imponiamo che $(u-1)(u^2-64) = u^3 - u^2 - 64u + 64 = v^2$ sia un quadrato e si ha $\lambda = \frac{v}{4(u-1)}$, $\mu = \frac{u^2-2u+64}{8(u-1)}\lambda = \frac{v}{4(u-1)}$, da cui si ricavano x, y_1 e y_2 in funzione di u e di v. Inversamente, $u = 4(2\lambda^2 + \mu)$, $v = 4\lambda(8\lambda^2 + 4\mu - 1)$.

Si possono costruire dei punti della cubica con il metodo della tangente o il metodo della corda partendo da $(u, v) = (0, \pm 8)$ e da $(u, v) = (64, \pm 504)$ che corrispondono ai punti noti $(\lambda, \mu) = (\pm 2, \pm 8)$; la tangente in $(0, \pm 8)$ ha per equazione $v = \mp 4(u-2)$ e interseca la curva $(u, v) = (17, \mp 60)$, dove $(\lambda, \mu) = \left(\pm\frac{15}{16}, \frac{319}{128}\right)$, poi $x = \frac{13583}{11985}$ o $-\frac{6833}{11985}$, $y_1 = \frac{791809}{191760}$ o $-\frac{179329}{191760}$, $y_2 = -\frac{381521}{191760}$ o $-\frac{229759}{191760}$ a seconda del segno scelto. Se si congiungono tra loro i punti $(u, v) = (0, \pm 8)$, $(64, \pm 504)$ e $(17, \mp 60)$, si costruiscono dei nuovi punti sulla cubica e delle nuove soluzioni razionali del problema.

Studiamo ora il problema in numeri interi. Si ha

$$2x^2 = y_1^2 + y_2^2 \text{ e } 2(x+2) = y_1^2 - y_2^2.$$

Queste equazioni mostrano che y_1 e y_2 sono della stessa parità. Si sa che la prima equazione non è possibile tranne nel caso $x^2 = y_1^2 = y_2^2$.

Abbiamo allora $x = -2$ dalla seconda equazione. La sola soluzione intera è dunque

$$x = 2, y_1 = \pm y_2 = \pm 2.$$

– **20** – « Trovare un numero quadrato tale che, se lo moltiplichiamo per se stesso e se aggiungiamo al prodotto dieci delle sue radici e dieci *dirham*, la somma abbia una radice. »

$$x^4 + 10x + 10 = y^2.$$

Se si pone $y = x^2 - u$, si ha

$$(1) \qquad 2ux^2 + 10x + 10 - u^2 = 0;$$

questa equazione di secondo grado deve avere un discriminate $\Delta = 2u^3 - 20u + 25$ uguale a un quadrato. Siamo dunque ricondotti all'equazione

$$(2) \qquad 2u^3 - 20u + 25 = v^2.$$

Abbiamo allora $x = \dfrac{v-5}{2u}$, $y = \dfrac{(v-5)^2}{4u^2} - u$, e inversamente $u = x^2 - y$ e $v = 2x^3 - 2xy + 5$.

La curva cubica definita dall'equazione (2) è dunque birazionalmente equivalente alla curva del problema definita dall'equazione (1). L'equazione (2) ha una soluzione evidente, $u = 0, v = 5$; la tangente alla curva per questo punto ha equazione $v = 5 - 2u$ e reincontra la curva in $u = 2$, $v = 1$, che dà $x = -1$, $y = 1$. Dato che questa soluzione non è positiva, si applica il metodo della tangente una seconda volta: la tangente in (2, 1) ha per equazione $v = 2u - 3$, e reincontra la curva in $(u, v) = (-2, -7)$, che porta a $(x, y) = (3, 11)$. La difficoltà proviene dal fatto che non si può applicare il metodo della tangente alla quartica; per fare questo si deve passare all'equazione (2) ([23]).

([23]) Se per « dieci delle sue radici», si intende la radice di x^4, cioè x^2, che è veramente una forzatura, si ha l'equazione $x^4 + 10x^2 + 10 = y^2$.

L'equazione di questo problema definisce una curva di genere 1; la si trasforma in una cubica ponendo $y = \frac{1}{2}u - x^2$. Si trova $10x^2 + 10 = \frac{1}{4}u^2 - u^2$, cioè $(u + 10)x^2 = \frac{1}{4}u^2 - 10$; si pone

$$v^2 = (u + 10)(u^2 - 40)$$

per ricavare

$$x = \frac{v}{2(u+10)}, \quad y = \frac{u^2 + 20u + 40}{4(u+10)}.$$

Inversamente, $u = 2(x^2 + y)$ e $v = 4x(x^2 + y + 5)$; la curva definita dal problema è dunque birazionalmente equivalente a una cubica definita dall'equazione $u^3 + 10u^2 - 40u - 400 = v^2$. Questo non conduce a soluzioni evidenti.

– **21** – « Trovare un numero quadrato tale che, se da esso togliamo la sua radice e poi moltiplichiamo il resto per la radice, si trova un quadrato (*mal*). »

$$(x^2 - x)x = y^2.$$

L'equazione del problema definisce una cubica con un punto doppio nell'origine; il metodo della corda porta a porre $y = ux$ e si trova $x = u^2 + 1$, $y = u^3 + u$, parametrizzazione razionale. Ci si può meravigliare che Ibn al-Khawwām, non abbia visto questa soluzione. I matematici che coltivavano l'analisi diofantea come Abū Kāmil o il suo successore al-Karajī, potevano risolvere perfettamente questo problema.

– **22** – « Trovare due numeri la cui differenza sia uguale a dieci volte la radice del più piccolo e tali che, se dividiamo ciascuno di loro per l'altro e addizioniamo i quozienti, la somma sia uguale alla radice del più piccolo. »

$$y - x = 10\sqrt{x},\ \ \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \sqrt{x}\ (y > x).$$

Queste equazioni mostrano che $x = \xi^2$ è un quadrato se x e y sono razionali. Abbiamo dunque $y = \xi^2 + 10\xi$ e $1 + \frac{10}{\xi} + \frac{\xi}{\xi + 10} = \xi$, cioè

$$\xi^3 + 8\xi^2 - 20\xi - 100 = 0.$$

Se ξ è razionale, è un divisore di 100. Sia $\xi = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20, \pm 25, \pm 50$. Si verifica che nessuno di questi valori funziona.

– **23** – « Trovare un numero cubico tale che la differenza tra esso e il suo quadrato sia quadrato. »

$$(x^3)^2 - x^3 = y^2.$$

Poniamo $z = x^3$; l'equazione diventa $z^2 - z = y^2$, facile da parametrizzare. Basta porre $y = z - u$ e si trova $z = \frac{u^2}{2u - 1}$, $y = \frac{u - u^2}{2u - 1}$. Resta da risolvere l'equazione $x^3 = \frac{u^2}{2u - 1}$; si pone dunque $v^3 = u^2(2u - 1)^2$ per dedurne $x = \frac{v}{2u - 1}$.

Inversamente, $u = x^3 - y$ e $v = x(2x^3 - 2y - 1)$; la curva di grado 6 definita dall'equazione del problema è dunque equivalente alla quartica di equazione $v^3 = 4u^4 - 4u^3 + u^2$. Quest'ultima ha due punti doppi ordinari $(u, v) = (0, 0)$ e $(½, 0)$, è dunque di genere 1. Poniamo $tv = 2u(2u - 1)$; si ha $8u(2u - 1) = t^3$, equazione quadratica in u di discriminate $16(t^3 + 1)$. Poniamo dunque $t^3 + 1 = s^2$ di modo che

$$u = \frac{s+1}{4},\ v = \frac{s^2-1}{4t},\ x = \frac{s+1}{2t},\ y = \frac{(s+1)(3-s)}{8(s-1)};$$

inversamente,

$$t = \frac{2u(2u-1)}{v} = 2\frac{x^3-y}{x} \text{ e } s = 4u - 1 = 4x^3 - 4y - 1.$$

Si sa che le sole soluzioni razionali dell'equazione $t^3 + 1 = s^2$ sono $(t, s) = (0, \pm 1), (-1, 0)$ e $(2, \pm 3)$; con l'elemento neutro all'infinito, queste formano un gruppo ciclico d'ordine 6 ([24]). Ecco la tavola dei valori corrispondenti per (u, v) e per (x, y)

(t,s)	$(0,1)$	$(0,-1)$	$(-1,0)$	$(2,3)$	$(2,-3)$	(∞,∞)
(u,v)	$(^1/_2,1)$	$(0,0)$	$(^1/_4,^1/_4)$	$(1,1)$	$(-^1/_2,1)$	(∞,∞)
(x,y)	(∞,∞)	$(0,0)$	$(-^1/_2,-^3/_8)$	$(1,0)$	$(-^1/_2,^3/_8)$	(∞,∞).

Sull'ultima riga si vede che il problema non ha soluzioni razionali positive.

– 24 – « Dividere un cubo in due parti cubiche. »

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

Questo problema è impossibile per il teorema di Fermat per l'esponente 3 (cfr. problema 12).

([24]) Cf. L. J. Mordell, *Diophantine Equations*, Londra / New York, Academic Press, 1969, cap. 26, th. 5, p. 247.

– **25** – « Dividere un numero dato in due parti tali che se lo si divide per ciascuna di esse e per la loro differenza e si addiziona il tutto, la somma sia un numero dato. »

$$x + y = a, \;\; \frac{a}{x} + \frac{a}{y} + \frac{a}{x-y} = b.$$

La seconda equazione si scrive $a(x^2 + xy - y^2) = bxy(x - y)$ e questa definisce una cubica con un punto doppio nell'origine. Se si pone $y = tx$, si trova la parametrizzazione

$$x = \frac{a}{b}\,\frac{1+t-t^2}{t(1-t)}, \;\; y = \frac{a}{b}\,\frac{1+t-t^2}{1-t};$$

resta da imporre $x + y = a$, cioè $(1 + t)(1 + t - t^2) = bt(1 - t)$. Si deve dunque risolvere l'equazione cubica $t^3 - bt^2 + (b - 2)t - 1 = 0$; se questa ha una radice razionale, questa deve essere intera (il numero b si suppone intero) ed uguale a ± 1. Il valore $t = 1$ non va bene e il valore $t = -1$ impone $b = 0$, e dunque è anche da respingere. Il problema è impossibile. Notiamo che se $b = 0$, siamo condotti all'equazione $x^2 - 3ax + a^2 = 0$, che non ha radici razionali.

– **26** – « Dividere un numero dato in due parti una cubica e l'altra quadrata. »

$$x^3 + y^2 = a.$$

Questa equazione definisce una cubica di genere uno ; può possedere o meno un punto razionale secondo i valori di a. Se si conosce un punto razionale $(x, y) = (\alpha, \beta)$, se ne deduce un altro col metodo della tangente: questa ha equazione $3\alpha^2 x + 2\beta y = \alpha^3 + 2a$ e reincontra la curva nel punto $x = -\frac{\alpha}{4\beta^2}\left(\alpha^3 + 8a\right),\; y = \frac{8a^2 + 20a\alpha^3 - \alpha^6}{8\beta^3}$, e possiamo iterare il procedimento. Per esempio, se $a = 2$, possiamo partire da $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ e ottenere $x = -\frac{17}{4},\; y = \frac{71}{8}$. Se $a = 3$, si può partire da $(\alpha, \beta) = (-1, 2)$ e ottenere $x = \frac{23}{16},\; y = \frac{11}{64}$.

Questa equazione viene studiata nella forma $(-x)^3 + a = y^2$ nel capitolo 26 del libro di Mordell. Egli enuncia, ad esempio, nel suo teorema 7 (p. 250) delle condizioni su a che implicano la non esistenza di soluzioni razionali; queste condizioni si applicano a $a = 7$ e a $a = 14$.

Quando $a = 2, 5$ o 10 ..., le soluzioni evidenti non potevano sfuggire a Ibn al-Khawwām; ma in ogni caso non disponeva di metodi che gli avrebbero permesso di studiare il caso con a qualunque.

– **27** – « Dividere un numero dato in due parti cubiche. »

$$x^3 + y^3 = a.$$

Si tratta di rappresentare il dato numero a come somma di due cubi; sappiamo che questo non è sempre possibile. In particolare è impossibile quando a è un cubo come conseguenza del teorema di Fermat. Mordell (cap. 24, p. 227) fornisce la soluzione seguente, nella quale si suppone a senza fattori cubici: supponiamo che $a = \alpha\beta\gamma$ dove α, β, γ sono degli interi primi tra loro a due a due e $2 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$; se l'equazione $\alpha\xi^3 + \beta\eta^3 + \gamma\zeta^3 = 0$ ha una soluzione (ξ, η, ζ), allora

$$x = \frac{\left(\alpha\xi^3 - \beta\eta^3\right)\left(\beta\eta^3 - \gamma\zeta^3\right)\left(\gamma\zeta^3 - \alpha\xi^3\right) - 9\alpha\beta\gamma\xi^3\eta^3\zeta^3}{6\xi\eta\zeta\left(\alpha\beta\xi^3\eta^3 + \beta\gamma\eta^3\zeta^3 + \gamma\alpha\zeta^3\xi^3\right)},$$

$$y = -\frac{\left(\alpha\xi^3 - \beta\eta^3\right)\left(\beta\eta^3 - \gamma\zeta^3\right)\left(\gamma\zeta^3 - \alpha\xi^3\right) + 9\alpha\beta\gamma\xi^3\eta^3\zeta^3}{6\xi\eta\zeta\left(\alpha\beta\xi^3\eta^3 + \beta\gamma\eta^3\zeta^3 + \gamma\alpha\zeta^3\xi^3\right)}.$$

è una soluzione del problema proposto.

– **28** – « Trovare un quadrato tale che, se si toglie da esso la sua terza parte e la sua radice e si prende 10 volte la radice di quello che resta, si ottiene ciò che si è tolto. »

$$10\sqrt{x^2 - \frac{1}{3}x^2 - x} = \frac{1}{3}x^2 + x.$$

Se si elevano al quadrato i due membri dell'equazione e si divide per x si ottiene:

$$x^3 + 6x^2 - 591\,x + 900 = 0.$$

Questa equazione dimostra che, se x è razionale, è un intero che divide 900; si vede dunque che $x = 3\xi$ è un multiplo di 3, e si ha

$$3\xi^3 + 6\xi^2 - 197\xi + 100 = 0$$

dove ξ è un intero positivo che divide 300; di più, 3 non divide ξ perché non divide 100. Si verifica che l'equazione in ξ ha una radice tra 0 e 1 e una radice tra 5 e 6. Il problema è dunque impossibile.

– **29** – « Trovare [il numero] di vestiti il cui prezzo totale è un dato numero di *dirham* e tale che , se si aggiunge il prezzo di un vestito alla radice del numero di vestiti si ha il numero dato. »

Se x è il prezzo di un vestito e y il numero dei vestiti, il problema si esprime con le equazioni $xy = a$, $x + \sqrt{y} = b$, dove a e b sono numeri dati (che si suppongono interi). Si ha

$$y = (b - x)^2,$$

da cui l'equazione

$$(1) \qquad x^3 - 2bx^2 + b^2x - a = 0,$$

dove $0 < x < b$, x deve essere intero e deve dividere a dato che le soluzioni razionali di (1) sono degli interi che dividono a.

Sappiamo che il polinomio $x^3 - 2bx^2 + b^2x - a$ è una funzione crescente di x quando $0 \leq x \leq \frac{b}{3}$, poi decresce quando $\frac{b}{3} \leq x \leq b$. Poniamo $x = \frac{b}{3}$, si ottiene il valore $\frac{4b^3}{27} - a$; e per $x = b$, si ottiene il valore $-a < 0$. Quindi quando $\frac{4b^3}{27} < a$, il polinomio resta negativo e non ci sono radici nell'intervallo $[0, b]$. Se al contrario $\frac{4b^3}{27} \geq a$, ci sono due radici (coincidenti in $\frac{b}{3}$ se $\frac{4b^3}{27} = a$). Una è $\leq \frac{b}{3}$ e l'altra tra $\frac{b}{3}$ e b. Resta da precisare i valori di a per i quali le radici siano intere.

– **30** – « Trovare tre numeri cubici tali che se si moltiplica il primo di essi per il secondo e poi il prodotto per il terzo si abbia un numero dato. »

$$x^3y^3z^3 = a.$$

Occorre ovviamente che a sia il cubo di un numero razionale xyz; se a è intero, è il cubo di un numero intero α e si ha $xyz = \alpha$. Possiamo scegliere arbitrariamente x e y e si ha $z = \frac{\alpha}{xy}$. La condizione di solubilità è evidente e non si capisce perché tale problema figuri nella lista; è verosimilmente apocrifo.

– **31** – « Un impiegato il cui salario mensile è un numero incognito di *dirham* ha lavorato in questo mese un numero di giorni uguale alla radice del numero incognito di *dirham* e ha ottenuto come salario un numero dato di *dirham.* »

Se il numero di giorni lavorati è x, il salario al giorno è $\frac{x^2}{30}$ e la somma totale $\frac{x^3}{30} = a$, a dato. Si tratta dunque dell'equazione $x^3 = 30a$, da risolvere con numeri interi. Questa è irrisolvibile tranne nel caso in cui a è il cubo di un intero diviso per 30. Ci si può domandare se non si tratti ancora di un problema apocrifo.

– **32** – « Dividere dieci in due parti in modo che, se dividiamo ciascuna parte per l'altra e addizioniamo i due quozienti, la somma sia uguale a una delle due parti di dieci. »

$$x + y = 10,\ \ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = x \text{ o } y.$$

La seconda equazione si scrive $x^2 + y^2 = x^2y$, nell'ipotesi che il suo secondo membro sia x; questa definisce una curva cubica con un punto doppio isolato nell'origine e quindi di genere 0. Poniamo $y = ux$ e troviamo $x = u + \frac{1}{u}$, $y = u^2 + 1$. Ci resta da risolvere l'equazione $u^2 + u + 1 + \frac{1}{u} = 10$, cioè $u^3 + u^2 + u - 9 = 0$; se u è razionale è un intero che divide 9. Abbiamo dunque $u = \pm 1, \pm 3$ o ± 9; si vede facilmente che nessuno di questi valori verifica l'equazione e quindi il problema è impossibile.

– **33** – « Abbiamo diviso dieci in due parti; abbiamo diviso la più grande per la più piccola e moltiplichiamo il quoziente per la più grande. Dividiamo poi la più piccola per la più grande e moltiplichiamo il quoziente per la più piccola. Sottraiamo il più piccolo risultato dal più grande; resta un numero dato di *dirham.* »

$$x + y = 10,\ \frac{x}{y}x - \frac{y}{x}y = a\ (x > y).$$

La seconda equazione si scrive $x^3 - y^3 = axy$; questa definisce una cubica con un punto doppio nell'origine. Poniamo $y = ux$ e si trova $x = \frac{au}{1-u^3}$, $y = \frac{au^2}{1-u^3}$. Resta da verificare che $\frac{au + au^2}{1-u^3} = 10$, cioè che:

$$10u^3 + au^2 + au - 10 = 0.$$

Questa equazione ha una radice razionale solamente se $a = 10\,\frac{1-u^3}{u(1+u)}$.

Questa collezione di problemi raccolti da Ibn al-Khawwām a metà del XIII[e] secolo testimonia il livello della ricerca condotta dai suoi predecessori e dai suoi contemporanei in algebra e in analisi diofantea razionale o intera. I trentatré problemi che la compongono si dividono in più gruppi: il primo gruppo comprende diciotto problemi diofantei di cui nove – 1, 3, 9, 12, 13, 14, 16, 18 e 24 – sono impossibili e gli altri nove – 7, 8, 10, 11, 19, 20, 23, 26 e 27 – sono inaccessibili. I problemi 21, 29 e 33 avrebbero potuto essere risolti dai predecessori di Ibn al-Khawwām come Abū Kāmil o al-Karajī. I problemi diofantei inaccessibili consistono tutti, abbiamo visto, nel ricercare dei punti razionali su delle curve cubiche, e anche di grado più alto. Per dimostrare i problemi impossibili di questo elenco, si è dovuto aspettare l'invenzione del metodo della discesa infinita e la capacità di applicarlo. È stato poi possibile risolvere i problemi inaccessibili con altri metodi di geometria algebrica come quello della secante e della tangente. Abbiamo sottolineato come alcuni di questi problemi rimangano difficili da risolvere anche ai nostri giorni.

Il secondo gruppo comprende dieci problemi determinati, di cui sette impossibili da risolvere con numeri razionali – 2, 15, 17, 22, 25, 28, 32 –, e tre – 4, 5, 6 – problemi che sono possibili per particolari valori dell'incognita, ma che non lo sono nel caso generale. In effetti per dimostrare l'impossibilità nel caso generale, sono necessari altri strumenti matematici che vedranno la luce molto più tardi. Quanto ai due problemi che restano, 30 e 31, essi sono quasi certamente apocrifi.

Notiamo che i problemi determinati che figurano in questa lista sono traducibili in equazioni polinomiali di grado $n \geq 3$, per i quali si cercano delle soluzioni razionali. Tutto quello che si può dire è che la quasi totalità di questi problemi, ancora aperti all'epoca di Ibn al-Khawwām, lo resteranno a lungo. Ibn al-Khawwām come i matematici dell'epoca, era intimamente convinto che i nove problemi diofantei impossibili lo fossero effettivamente, ma non avevano ancora i mezzi per dimostrare questa impossibilità. Senza dubbio avevano intuito che gli altri problemi indeterminati erano pure impossibili. Ma, mancando la dimostrazione, non potevano isolare rigorosamente l'" impossibile " dall'inaccessibile.

Sono stati così raggruppati problemi indeterminati e problemi determinati che non potevano essere risolti con numeri razionali. È evidente il criterio logico che ispira il raggruppamento di questi problemi. Successori di al-Khayyām e di Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, Ibn al-Khawwām non ignoravano sicuramente che certi problemi potevano essere risolti con soluzioni reali, intersecando due coniche. Sappiamo anche che molti problemi di questa raccolta saranno ritrovati da Fermat e dai suoi successori. Altri dovranno attendere ancora molto tempo per essere risolti. Per avere maggiori informazioni basta consultare il libro di L. E. Dickson ([25]).

Tra questi problemi il diciannovesimo ha avuto una storia particolare e, a più riprese, è stato oggetto di ricerche a partire dalla metà del secolo XIX. Abbiamo già citato all'inizio del paragrafo la presenza di sette problemi di questa raccolta nel libro di aritmetica *Khulāṣāt al-ḥisāb* ([26]) di Bahā' al-Dīn al-'Āmilī. Tra questi problemi figura il diciannovesimo. *Khulāṣāt al-ḥisāb* è stato tradotto in tedesco nel 1843 ([27]), poi in francese tre anni più tardi

([25]) Vedere nota 18.

([26]) Vedere nota 17.

([27]) G. F. Nesselmann, *Essenz der Rechenkunst von Mohammed Beha-eddin ben 'Alhossain aus Amul, arabisch und deutsch herausgegeben*, Berlin, 1843.

nel 1846 [28]. Alcuni matematici hanno recuperato il problema 19 e lo hanno studiato dal punto di vista logico, ad esempio E. Lucas [29]. Recentemente è stato ripreso con altri metodi, per esempio da H. Zimmer [30]. Lo storico C. Scriba [31] ha raccontato le diverse tappe di questo problema dopo al-ʿĀmilī.

3. – Analisi diofantea e analisi logico-filosofica

Una delle conseguenze delle ricerche in analisi diofantea e dello studio dei problemi indeterminati impossibili e dei problemi inaccessibili, è stata la rinascita a un altro livello, delle questioni logico-filosofiche relative alla classificazione dei problemi e delle proposizioni matematiche; anche queste hanno contribuito al rinnovamento della teoria della dimostrazione. In effetti divenne necessario tener conto, nella classificazione, dei problemi impossibili e anche dei problemi per i quali mancava ancora una dimostrazione, come pure del numero di soluzioni: infinito, finito, una sola, nessuna. Quanto alla riflessione sulla dimostrazione questa deve considerare anche la dimostrazione di proposizioni negative, che non si basano su una riduzione diretta all'assurdo, ma esigono tutta una costruzione prima che intervenga l'argomentazione apagogica.

Nel contesto generale dello studio dell' « analisi e della sintesi » i matematici dei secoli X, XI e XII hanno ripreso lo studio della classificazione dei problemi e della dimostrazione, temi ai quali hanno dedicato voluminosi trattati. Il primo matematico che ha iniziato queste

(28) A. Marre, « Khélasat al-Hisáb ou Essence du calcul de Behâ-eddin Mohammed ben al-Hosaïn al-Aamouli ». Tradotto dalla versione tedesca di Nesselmann pubblicata a Berlino nel 1843, in *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1ère serie, t. 5, 1846, p. 263-323.

(29) E. Lucas, « Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure », *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 10, aprile e maggio 1877, pp. 129-193, 239-293.

(30) H. G. Zimmer, « On the problem of Behæ Eddin 'Amuli and the computation of height functions », in *Lecture Notes in Computer Science*, 162, Computer Algebra, Eurocall 83, Londra, marzo 1983, pp. 180-193.

(31) C. J. Scriba, *Zur Geschichte der Bestimmung rationaler Punkte auf elliptischen Kurven : das Problem von Beha-Eddin Amuli*, Hamburg, 1984.

ricerche è Ibrāhīm ibn Sinān [32] (909-946), seguito da al-Sijzī [33] (seconda metà del X secolo) poi da Ibn al-Haytham [34] (morto dopo il 1040) e anche da molti altri. Di tutti questi sostanziali lavori citerò un solo esempio, quello di un successore di questi matematici, che era anche un algebrista. Si tratta di al-Samaw'al (morto nel 1175), che illustra perfettamente questo rinnovamento nello studio delle questioni logico-filosofiche, sollevate, almeno in parte, dalle ricerche in analisi diofantea. Al-Samaw'al era un successore di al-Karajī, e anch'egli ha redatto un commentario delle *Aritmetiche* di Diofanto, e un libro sulla «analisi e la sintesi» entrambi perduti. Ci è invece pervenuto il suo grande trattato di Algebra – *al-Bāhir* [35] – dove tratta l'algebra dei polinomi e l'analisi diofantea. Questi titoli indicano chiaramente gli assi della ricerca teorica di al-Samaw'al: i rapporti tra i temi generali dell'analisi e della sintesi e l'algebra dei polinomi sviluppata da al-Karajī; il ruolo dell'analisi di Diofanto nell'analisi diofantea degli algebristi e la generalizzazione di quest'ultima; e, infine, la classificazione dei problemi e delle proposizioni algebriche. Per questo matematico del XII secolo « l'arte dell'algebra è una parte dell'arte dell'analisi » [36] mentre « nell'arte della geometria è possibile determinare l'incognita senza analizzare le cose note nei loro singoli elementi », [37] è possibile cioè procedere direttamente attraverso la sintesi. Questa differenza dipende dal fatto che in algebra

> [...] se si vuole trovare una qualsiasi cosa richiesta, o dimostrare una qualsiasi proposizione, si pone la cosa richiesta come data e si esaminano le conseguenze necessarie che ne derivano, e la conseguenza di queste conse-

[32] R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e siècle*, Leyde, E.J. Brill, 2000.

[33] R. Rashed, *Œuvre mathématique d'al-Sijzī*, vol. I: *Géométrie des coniques et théorie des nombres au X^e siècle*, Les Cahiers du Mideo, 3, Louvain-Paris, Éditions Peeters, 2004.

[34] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. IV: *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, Londres, 2002.

[35] *al-Bāhir en Algèbre d'As-Samaw'al*, edizione, note e introduzione di S. Ahmad e R. Rashed, Damas, Presses de l'Université de Damas, 1972.

[36] *Ibid.*, p. 73.

[37] *al-Bāhir*, p. 74.

> guenze necessarie, fino a quando si arriva a cose note semplici. Se queste sono vere, allora si procede alla sintesi di quello che si è analizzato cominciando da dove siamo arrivati. Se queste cose note semplici sono false, si constata l'impossibilità della cosa richiesta e la si abbandona ([38]).

L'analiticità dell'algebra risiede dunque nel fatto che si può procedere per equivalenze senza che ci sia bisogno di costruzioni ausiliarie.

In questo contesto generale, come distinguere tra i diversi problemi e le proposizioni al fine di guidare l'analisi e arrivare a delle dimostrazioni nei vari casi?

Per rispondere a questa domanda al-Samaw'al, ispirato dallo studio di d'Ibrahim ibn Sinan, propone una classificazione dei problemi nella lingua delle "modalità", esprimendo tuttavia un contenuto diverso da quello della logica tradizionale. Al-Samaw'al distingue dunque tra tre classi di problemi: necessari, possibili e impossibili.

La classe di problemi necessari comprende quattro sottoclassi: le identità o «quei (problemi) per i quali ogni numero risponde alla domanda»; i problemi indeterminati, quelli «che hanno un numero infinito di soluzioni»; i problemi indeterminati che hanno un numero finito di soluzioni e, infine, i problemi determinati. A questa classificazione dei problemi necessari se ne sovrappone un'altra, ma questa volta secondo il numero di condizioni richieste perché si possa garantire la verità della soluzione. In effetti ci sono quelli che esigono molte condizioni e quelli che esigono che una sola sia verificata.

Al-Samaw'al illustra ogni caso con un esempio. Così per i problemi indeterminati con una infinità di soluzioni dà l'esempio di un sistema di numeri congruenti; per quelli che hanno un numero finito di soluzioni propone un sistema di equazioni lineari indeterminate, che ammette 6 soluzioni intere preso da Abū Kāmil. Per i problemi che esigono molte condizioni considera un sistema di 210 equazioni lineari a 10 incognite e dimostra che occorrono 504 condizioni affinché il sistema sia compatibile.

Osserviamo che la classificazione dei problemi necessari è stata fatta per tener conto dei problemi dell'analisi diofantea distinguendoli dalle identità e introducendo due nuovi criteri: la calcolabilità del numero di

([38]) *Ibid.*, p. 73.

soluzioni e quella del numero di condizioni. Così la nozione di necessità, improntata alla logica tradizionale è stata indirizzata verso quella di calcolabilità matematica. Un problema necessario è quello per cui l'insieme delle soluzioni non è vuoto e se ne possono calcolare gli elementi. È stato necessario aspettare molti secoli prima di andare più avanti.

Al-Samaw'al passa in seguito ai problemi detti « possibili », ma, questa volta, senza dare alcun esempio, cosa che rende il suo pensiero difficile da capire. Egli scrive:

> Ogni proposizione e ogni problema che l'aritmetico o il geometra esamina, cercandone la soluzione porterà a dimostrare la sua esistenza, e in questo caso chiamerà la soluzione necessaria o la sua inesistenza, e in questo caso chiamerà il problema non risolvibile, inaccessibile e impossibile; ove non trovi una dimostrazione né della sua esistenza né della sua inesistenza e quindi della sua impossibilità, lo ignora e lo chiama dunque possibile, perché non ha dimostrato né la sua esistenza né la sua inesistenza, poiché questo porterebbe a che l'esistente sia inesistente e il necessario inaccessibile, cosa impossibile ([39]).

Secondo al-Samaw'al, si può dunque dire che una proposizione o un problema è possibile se e soltanto se non c'è una dimostrazione di esistenza o inesistenza di quello che si enuncia. La nozione di « possibile » riguarda enunciati esistenziali e sarebbe inesatto ridurla a quella di problema aperto.

Per capire meglio il testo di questo matematico, ricordiamo che, una volta data la sua definizione di problema possibile, egli critica una opinione diffusa alla sua epoca secondo la quale sarebbero possibili i problemi indeterminati e i problemi ai quali mancano delle ipotesi. Scrive

> Questa opinione è debole, perché il possibile è quello la cui esistenza o inesistenza non è impossibile, mentre l'inesistenza dei problemi indeterminati è impossibile ([40]).

Quanto alle proposizioni e ai problemi impossibili, se si suppongono esistenti, la loro esistenza conduce a una impossibilità ([41]). Se dunque il

([39]) *Al-Bāhir*, p. 249.
([40]) *Ibid.*
([41]) *Ibid.*, p. 250.

necessario e l'impossibile non presentano difficoltà per chi vuole cogliere il significato espresso da al-Samaw'al, il possibile, mancando di esempi è delicato da interpretare.

Tutto sommato, in questa classificazione dei problemi e delle proposizioni di tipo esaustivo, dove l'autore tratta di enunciati di esistenza e procede a calcolare il numero di soluzioni e il numero di condizioni, il « possibile » si presenta come la categoria del logicamente indecidibile. In effetti i problemi « possibili » sono secondo al-Samaw'al, dei problemi simultaneamente indimostrabili e irrefutabili, cioè logicamente indecidibili. Quando al-Samaw'al afferma che « lo ignora » intende infatti che, davanti a questa alternativa indecidibile, non può prendere una decisione con i mezzi dell'inferenza matematica di cui dispone.

Sarebbe un'ovvietà ricordare che non si parla qui d'indecidibilità matematica, ma di una indecidibilità logica che riguarda l' esistenza o la non esistenza della dimostrazione, senza tuttavia disporre di alcun algoritmo per prendere una qualunque decisione.

Nel contesto dell'epoca, e nella tradizione dell'analisi diofantea e dell'algebra, che è stata quella di al-Samaw'al, è facile da capire. Questi problemi possibili non erano, in effetti, che i problemi inaccessibili per i quali non c'era una dimostrazione di esistenza e che non offrivano ai matematici possibilità alcuna di una qualunque congettura sul loro esito. Dato che erano mischiati a dei problemi dei quali si poteva enunciare l'impossibilità senza poterla dimostrare rigorosamente, non si poteva congetturare a priori se essi fossero necessari o impossibili.

Si vede dunque che la ricerca in analisi diofantea, così come lo studio di problemi impossibili e di problemi inaccessibili, ha stimolato i matematici a ripensare al quadro logico-filosofico delle modalità, per integrare questi problemi in una classificazione sistematica. Ma questo risultato sembra essere sfuggito ai filosofi dell'epoca.

Roshdi Rashed
Université Paris Diderot – CNRS
Laboratoire SPHERE
Sciences, Philosophie, Histoire – UMR 7219
E-mail: rashed@paris7.jussieu.fr