BRUNO DE FINETTI

L'apprendimento della matematica

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (2015), n.3 (*Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica. «Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà», a cura di Giuseppe Anichini, Livia Giacardi, Erika Luciano)*, p. 409–423.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_3_409_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2015.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 409-423

L'apprendimento della matematica (*)

BRUNO DE FINETTI

Nel momento attuale, di fronte all'esigenza di una sempre più vasta diffusione di conoscenze che il progredire delle scienze rende sempre più complesse e l'evolversi della civiltà rende sempre più indispensabili per ogni attività, i problemi dell'educazione, dell'insegnamento e dell'apprendimento, occupano un posto preminente tra le sfide che la società deve affrontare.

Si tratta di problemi che hanno molte dimensioni e molti aspetti, a cominciare, naturalmente, da quelli sociali e organizzativi; ma il punto preliminare è necessariamente la riflessione sulle finalità da prefiggersi e l'analisi delle possibilità di realizzarle seguendo questo o quel criterio pedagogico (o questa o quella successione di criteri in corrispondenza all'età o altre caratteristiche). Ciò è pregiudiziale anche per orientarsi riguardo a soluzioni di portata organizzativa fondamentale, come ad esempio l'adozione (su scala più o meno generalizzata) dei metodi di istruzione programmata.

Ed effettivamente i problemi psicologico-pedagogici-didattici sono da qualche tempo oggetto di rinnovata attenzione e di un approfondimento adeguato alla gravità degli impegni derivanti dal salto qualitativo e quantitativo nelle esigenze dell'istruzione (anche se purtroppo un certo disdegno accademico verso la didattica sembri tuttora duro a morire). L'urgenza di riforme radicali nella scuola, a tutti i livelli, è troppo impellente per poter non essere avvertita anche dai più sordi, ed una salutare riforma implica soprattutto che si riconosca la necessità di eliminare quanto è superato e superfluo e di condensare sottolineandovi l'essenziale quanto va troppo rapidamente crescendo, il bisogno di creare esseri vivi aperti alle novità del futuro anziché fossilizzati depositari di idee e nozioni recepite dal passato.

(*) Pubblicato in: *La Riforma della Scuola*, 4, 1969, 11-17.

* * *

In questa prospettiva, è naturale che gli studi psicologico-pedagogico-didattici debbano porsi in una visuale più elevata ed attingere una concretezza più specifica: guardare cioè non all'effetto banale (magari mnemonico, per lo più transeunte) di recepire date cose bensì all'effetto durevole che esse devono avere sulla capacità di affrontare questioni e situazioni nuove e imprevedibili; e teorizzare non genericamente sull'apprendimento in termini metafisici o pseudometafisici ma concretamente e specificamente (pur senza rinunciare a un quadro d'insieme unitario) sull'apprendimento delle singole discipline e parti di esse e secondo questo o quel modo di intenderne e presentarne l'assenza e la struttura e gli scopi.

Il caso della matematica è, fortunatamente, oggetto di particolare attenzione da parte di numerosi studiosi ed anche di lavoro e studio da parte di commissioni; a volte è considerato isolatamente, altre volte in nesso coll'insegnamento delle altre scienze e discipline. Vi sono, certamente, molte ragioni per concentrare sul caso della matematica uno speciale interessamento, sia per la proverbiale avversione che l'insegnamento della matematica provoca nei più (e che, come da più parti è stato affermato, a mio avviso giustamente, è colpa non della matematica ma del modo in cui viene insegnata), sia per la posizione particolare della matematica nei riguardi delle altre coscienze e per le differenze d'impostazione che se ne possono preferire a seconda di tale inquadramento e di ulteriori tendenze (ad es. circa il grado e il modo di ricorso all'assiomatizzazione).

* * *

Due recenti libri (1) sono atti a suscitare considerazioni e riflessioni su importanti aspetti del problema. Il libro di Jerome S. Bruner, lo psicologo cui tanto devono gli studi sui processi di apprendimento, mette il dito sulla piaga che a suo (e mio) avviso costituisce la fondamentale deficienza e causa di funzionamento a vuoto degli sforzi per l'istruzione, in ispecie in matematica. Il difetto sta nel trascurare gli aspetti di pertinenza della «mano sinistra» (fantasia, intuizione) disseccando tutto nella mera sistemazione razionale (di pertinenza della «mano destra»). Ed è notevole merito del Bruner di aver

(1) J. S. BRUNER, *Il Conoscere: Saggi per la mano sinistra*; ed. Armando, Roma, 1968.
Z. P. DIENES, *Uno studio sperimentale sull'apprendimento*, trad. ital. con prefazione di A. Pescarini, ed. Feltrinelli, Milano, 1968.

acutamente ravvisato nella matematica, e nell'insegnamento e apprendimento della matematica, il campo ove l'intervento della «mano sinistra» sarebbe particolarmente vivificatore ed è invece pressoché totalmente assente.

Il libro di Dienes riferisce su esperimenti da lui suggeriti, ed eseguiti personalmente o seguiti, attinenti a metodi — e in particolare «giochi» escogitati per introdurre certi tipi di nozioni e strutture matematiche. Il collegamento con l'argomento precedente sta nel fatto che lo stesso Bruner si è interessato attivamente a questi esperimenti (e ha scritto la prefazione a Dienes, per l'edizione inglese). Ciò dà il modo di controllare la connessione (più o meno stretta, come diremo) tra gli esperimenti di Dienes e le vedute di Bruner (o la loro interpretazione da parte di chi scrive), e di esaminarne le possibili conclusioni sotto un punto di vista più significativo.

* * *

Vediamo anzitutto di chiarire un po' più, citando o riassumendo alcune frasi di Bruner (pp. 23-31 e 44-47), il significato che egli attribuisce ai simboli della «mano destra» e «sinistra», l'apporto che ciascuna «mano» dovrebbe dare nell'insegnamento e per l'apprendimento, e in particolare tali apporti nel caso della matematica.

La destra è l'ordine e la legalità, le droit. Le sue bellezze sono quelle della geometria e delle rigide connessioni. Cercare la conoscenza con la mano destra è coscienza. Eppure, dire soltanto ciò della scienza significa trascurare alcune delle sue fonti, poiché le grandi ipotesi della scienza sono doni che giungono dalla mano sinistra.

Non riusciamo ad esplorare tutte le vie di accesso alla psiche: una di esse resta inesplorata, ed è una via di accesso il cui mezzo di comunicazione sembra essere la metafora, cioè lo strumento conoscitivo offerto dalla «mano sinistra». È una via che consente felici ipotesi e fortunate intuizioni e si traduce nell'attività unificatrice, nelle sintesi operate dal poeta e dal negromante, che guardano obliquamente piuttosto che direttamente. Le loro intuizioni generano una grammatica del tutto particolare, proprio cercando connessioni, suggerendo similitudini e intrecciando con scioltezza idee di una trama empirica.

Forse quello attuale è il momento più favorevole alla mano sinistra, a una mano sinistra che possa incitare la destra verso nuove direttive, così come accade nelle scuole d'arte, quando bisogna trovare i mezzi per in-

fondere nuova vita ad una mano che è divenuta troppo adusa alla tecnica, ai processi formalizzati, e troppo poco vicina all'occhio indagatore.

Lo scienziato e il poeta non vivono agli antipodi. La separazione artificiosa dei due modi di conoscenza impedisce all'intellettuale contemporaneo di essere un efficace creatore di miti per il suo tempo. Il feticismo della cosiddetta oggettività ci impedisce di richiamarci a tutto quel lavoro preparatorio di natura intellettuale ed emotiva che è in fondo la base di ogni nostro sforzo di carattere più formale o scientifico. Gli studi sulla conoscenza sono diventati troppo asettici e formalizzati.

Nel tentativo di formulare alcuni schemi di una «teoria dell'istruzione», cercando il caso meravigliosamente più semplice, decisi di studiare l'insegnamento e l'apprendimento della matematica. Ma ben presto mi fu chiaro che il cuore dell'apprendimento matematico era piuttosto rivolto dalla parte sinistra.

L'origine di una scoperta o creazione è una *sorpresa produttiva* (*effective surprise*) che, nella matematica (con riferimento a G. H. Hardy e ad H. Poincaré), *consiste particolarmente nel creare un ordine fra elementi diversi, in modo da poter vedere relazioni che prima non erano evidenti, raggruppamenti che prima non erano presenti, connessioni che non erano a portata di mano: sistematicità, profondità di relazioni, armonia ne sono il risultato*. Si tratta di una *attività combinatoria*, da non confondere però *con la capacità di miscelare zone o aspetti noti dell'esperienza, con il ricorso a strani algoritmi, in una ridda di permutazioni: creare consiste nel non fare combinazioni inutili e nel fare quelle utili, che sono una piccola minoranza; invenzione è discernimento e scelta. Si tratta di una azione euristica, di una sensibilità emozionale*, guidata dal *sentimento della bellezza matematica, dell'armonia dei numeri e delle forme, dell'eleganza geometrica*. L'apporto necessario della sensibilità emozionale viene sottolineato dai versi di Yeats: *Iddio mi guardi da quei pensieri / che l'uomo pensa solo con la mente; / quegli che canta un canto duraturo / pensa con ogni fibra del suo essere*.

* * *

Le conclusioni tratte magistralmente osservando da questo punto di vista i consueti difetti dell'insegnamento matematico sono esposte nel capitolo *Sull'apprendimento della matematica* (pp. 133-150). È un peccato dover scegliere poche tra le molte frasi azzeccate, ma basteranno a render chiaro il pensiero di Bruner al riguardo.

Mi oppongo all'uso prematuro del linguaggio matematico, al suo formalismo da prodotto finito, che fa sembrare la matematica una cosa del tutto nuova anziché già nota al bambino. In quel modo *noi impediamo al bambino di rendersi conto che egli ha sempre implicitamente pensato in termini di matematica, col risultato di non fargli avere più fiducia nelle proprie capacità di capirla.*

Se invece lo studente viene obbligato a controllare ogni banalità, per lui già ovvia e chiara, *attraverso rigorosi e ormai classici passaggi* costituenti «*prove formali*», egli *si forma l'idea che questo e soltanto questo sia realmente la matematica*, ed inevitabilmente *arriva alla conclusione che la matematica non è cosa per lui*.

Al contrario, *è essenziale permettere al bambino di usare i suoi naturali e intuitivi modi di pensare, anzi incoraggiarlo a fare così e lodarlo quando ottiene buoni risultati*. Non occorre *insegnargli ciò;* basta *porre fine al nostro costume di inibirgli il pensiero intuitivo e trovare i modi adatti per aiutarlo a sviluppare questo tipo di pensiero*.

Comprendere bene una cosa significa capirla nella sua elementarità; per spiegarla ad un'altra persona occorre *trovare il linguaggio e le idee che questa persona potrebbe usare se dovesse spigarci la stessa cosa. L'idoneità, cioè, dipende non tanto dalla maturità del discente quanto dalle nostre intenzioni e dalla nostra capacità di tradurre le idee nel linguaggio e nei concetti di quell'età al livello della quale stiamo insegnando.*

Ciò è conforme, del resto, a una *coraggiosa affermazione di una Conferenza dell'Acc. Naz. di Scienze* (U.S.A.; Woods Hole, 1959) *sul programma dell'insegnamento scientifico: ogni argomento può venire insegnato a chicchessia e a qualsiasi età, purché in una forma che sia chiara ed onesta.*

Circa la questione di scegliere quali cose siano *degne di esser conosciute*, Bruner afferma di conoscere *soltanto tre criteri, due buoni ed uno mediocre*: 1) *accertarsi se la conoscenza dia un senso di godimento;* 2) *vedere se conceda il dono di un'apertura intellettuale oltre l'informazione data, se cioè contenga in sé le basi di una futura generalizzazione;* 3) *stabilire se la conoscenza sia utile*.

Secondo tali linee, chiedendoci *cosa vogliamo che sappia un uomo dei nostri tempi*, si risponde che egli *debba avere almeno il senso di che cosa sia la conoscenza nei tanti campi di ricerca, e capirla nelle sue connessioni e nei suoi rapporti con altri campi, e sapere come storicamente sia stata acquistata*; in tale senso, *è possibile portarlo abbastanza lontano, così che egli stesso possa vedere quanta strada ha fatto e con quali mezzi*. Il mezzo consiste nell'ispirarsi fondamentalmente alla massima (che Bruner sostiene *come psicologo, come studioso dei processi del pensiero*) che *il godimento intellettuale è prodotto dalla riduzione di ciò che è sorprendente e complesso in qualcosa di prevedibile e di semplice*. Su questa base si può *fondare il programma a spirale; i grandi temi strutturali dell'apprendimento si prestano proprio a processi di questo tipo, in cui le idee siano dapprima presentate in una certa forma e in un certo linguaggio afferrabile dal bambino, riconsiderate più tardi con maggiore incisività e precisione, per far raggiungere infine la soddisfazione della completa padronanza della materia*.

* * *

E passiamo ora al libro del Dienes. Esso intende descrivere un'indagine sperimentale, diretta dal Dienes e dal Bruner assistiti da altri collaboratori, denominata «Mathematics-Learning Project» e facente capo al Harvard University Center for Cognitive Studies.

Gli esperimenti vennero operati su cinque gruppi di alunni di scuole elementari, composti di pochissimi soggetti (A: 4; B: una classe, a volte in gruppi di 7; C: 4; D: 6; E: 14; sempre metà maschi e metà femmine) e assistiti da un «osservatore» (uno per gruppo, e in qualche caso uno per alunno). Ad ogni gruppo era stato affidato un argomento di sperimentazione e disponeva di adatto materiale matematico. Ecco gli argomenti di ciascun gruppo: A: Il gruppo delle costruzioni; B: Il gruppo dell'aritmetica; C: Il gruppo dei logaritmi e degli esponenti; D: Il primo gruppo dei giochi; E: Il secondo gruppo dei giochi.

Esperimenti su scala così ridotta hanno il vantaggio di poter seguire passo passo l'attività di ogni singolo e l'interazione con quella degli altri ma non possono portare a conclusioni legittimamente generalizzabili. E infatti è detto che (p. 1) *il nostro studio è stato intrapreso più per indurre i ricercatori a formularsi domande di qualche interesse piuttosto che a rispondervi in modo sicuro; in effetti, noi offriamo risposte plausibili stabilite per via sperimentale, che dovrebbero però venir verificate con esperimenti suscettibili di controllo*.

Chi volesse interessarsi ai temi dei singoli gruppi e alle osservazioni sul loro svolgimento dovrebbe necessariamente consultare il libro. Potrà trovare istruttivo e divertente leggere i «protocolli» di alcune esperienze, ove è descritto passo passo e tentativo per tentativo il lavoro di un allievo e il colloquio con l'osservatore, incluse interiezioni come

Hmmm, Ohh, Bom Bom e indicazioni come «(alquanto aggressivo)», «(si mette il pollice in bocca, molto felice)». Solo così si potrà constatare su quale tipo di osservazioni particolareggiate si basano le conclusioni generali proposte come conclusione (e giudicare se e fino a che punto appaiano convincenti e sufficientemente suffragate). Un riassunto non direbbe nulla. Diciamo solo che s'incontrano questioni interessanti e variate, spesso però (a mio avviso) prospettate in forme sostanzialmente più complicate e artificiose del necessario, anche se forse attraenti in quanto concepite sotto la veste di «giochi».

Informiamo infine che esperimenti simili, in collaborazione con Dienes, hanno luogo anche in Italia, e precisamente presso l'Istituto di Psicologia dell'Università di Firenze (da Gina Ferrara Mori e Francesca Morino Abbele, sotto la direzione del prof. Alberto Marzi). Ne è dato in appendice (pp. 192-195) un breve cenno sull'attività per il periodo 1958-61.

Più significativo può risultare un cenno sintetico sulle conclusioni — sia pur dichiaratamente solo plausibili — suggerite dai risultati dell'esperimento. Come impressione personale generica premetterei che esse, pur sempre interessanti e in genere più specificamente attinenti a problemi particolari, appaiono meno coordinatamente ispirate a una unica chiara visione, quale quella di Bruner cui tuttavia nel complesso aderiscono. Talora qualche (apparente?) contraddizione lascia perplessi, come quando proprio Bruner nella prefazione dice (p. XXI) che il dottor *Dienes diffida del* «formalismo» *molto più di noi* (mentre i moniti più decisi contro il formalismo sembrano quelli sopra citati dal libro di Bruner).

Forse la differenza sta in una maggiore insistenza (in Dienes, p. XXII) *sul fatto che i simboli matematici debbono innanzi tutto avere un fondamento empirico per evitare il pericolo di cadere in un formalismo non sufficientemente connesso alla realtà.*

Dice infatti Dienes (pp. 53, 54, 57): *Soprattutto non vanno perse di vista le applicazioni. Essenzialmente esse costituiscono un tentativo di trovare la schematizzazione più conveniente del mondo sensibile e dei fenomeni che si svolgono intorno a noi mediante le strutture matematiche che abbiamo acquisito. Se è giusto introdurre il simbolismo in certi casi e non in altri, è probabile che l'introduzione poco oculata di più simboli, per volta confonda tragicamente le idee dei bambini portando a un "macello mentale": ed è proprio ciò che avviene. Il simbolismo non sarà completamente operativo se le situazioni reali che esso descrive non possono essere date.*

Viene appropriamente esaminata (p. 154) la questione di *come trovare il momento migliore per introdurre i simboli. Se lo si fa troppo presto si rischia di togliere al simbolismo medesimo ogni contenuto*, riducendosi *all'apprendimento di determinate regole secondo cui questi segni possono essere trattati e allo studio di situazioni in cui essi siano applicabili*. D'altronde, l'introduzione del simbolismo non va neppure *procrastinata troppo*, perché, *quando un bambino ha acquistato familiarità con una struttura matematica, ha bisogno di un linguaggio per indicarla e pensare su di essa*.

La conclusione può riassumersi con una risposta che, a mio avviso, potrebbe enunciarsi come norma pedagogica fondamentale: ogni cosa va data al momento in cui il discente, interessato a penetrare e risolvere uno o più problemi cui vien posto di fronte, ne sente il bisogno e può apprezzarne il senso e l'utilità.

L'esempio più espressivo al riguardo, negli esperimenti di Dienes, riguarda *l'introduzione della notazione matriciale per descrivere la struttura delle regole di un gioco* (cioè: prodotti in un gruppo; cfr. pp. 154 84, ecc.); essa *fornì ai bambini capaci di usarla un'arma molto potente per attaccare i problemi connessi a strutture di quel tipo, e, forse, per completare il processo di astrazione rendendoli perfettamente consapevoli delle effettive caratteristiche comuni a due giochi apparentemente diversi*.

Queste ed analoghe frequenti osservazioni conducono a diverse importanti considerazioni di carattere generale. Anzitutto confermano le conclusioni concordemente raggiunte da altri autori di esperimenti del genere, secondo cui (p. 148) *molte parti della scienza matematica sono accessibili a bambini piuttosto piccoli*, anche di quella che *è stata sempre considerata "matematica superiore" e per questa ragione difficile. Abbiamo seriamente sottovalutato il livello di conoscenza matematica raggiungibile ed apprezzabile da parte di bambini*. Per utilizzare appropriatamente queste possibilità, la via perseguita dal Dienes (e che anche a mio avviso è quella indovinata) consiste (pp. XXI e XXIII) nel *rendere chiara e razionale la circostanza che ordine, numero, funzione, identità e gli altri concetti fondamentali della matematica non sono arbitrari, ma piuttosto riducibili all'uso del pensiero*, e nel *concretizzare concetti matematici in convenienti visualizzazioni alla portata della mente del bambino*.

Occorre però pervenire all'astrazione, pur dovendosi rifuggire da ogni sua imposizione aprioristica e formalistica. Occorre quindi (pp. 152-3) evitare l'associazione troppo univoca di un concetto astratto ad una medesima concretizzazione, col rischio di *far attribuire importanza a caratteristiche della concretizzazione per nulla pertinenti alle strutture matematiche da rappresentare*. Ciò avvenne nel Gruppo A, causa l'*aver lavorato troppo a lungo su una medesima concretizzazione*, mentre negli altri il principio di *presentare ai soggetti strutture matematiche in molteplici concretizzazioni* è stato meglio attuato presentandole in una *mescolanza immediata*. Da badare anche in questo caso che non si presenti qualche *particolare percettivo pittorico comune* atto a rimanere impresso più della comune struttura ([2]).

Il discorso sull'astrazione (e sulla capacità di astrazione) va però ripreso in un senso e in un contesto anche più ampio, e cioè riferendosi non alla fase preliminare della formazione dei concetti bensì a quella costruttiva e perenne della loro effettiva utilizzazione di fronte a tutti i problemi e le circostanze che si potranno presentare, nella scuola e più ancora nella vita.

Il simbolismo (p. 57) *traduce effettivamente un'astrazione se è introdotto come mezzo per esprimere proprietà comuni di diversi tipi di situazioni della stessa struttura; la misura in cui si considera astratta una situazione dipendente dalla quantità di cose superflue eliminate, cioè, se e in quale misura si pensa che la situazione sia il modello di una classe di situazioni da cui il superfluo è parzialmente stato eliminato*. Tale facoltà di astrazione e generalizzazione dovrebbe divenire *parte funzionale del pensiero di una persona*, per il che gioverebbe saper svolgere *con sufficiente elasticità anche il processo inverso, ossia la particolarizzazione o restrizione*.

Molto probabilmente (p. 162) *la prontezza nell'astrarre è intimamente connessa con la ricchezza d'immaginazione di cui una persona è dotata e con la capacità di usufruirne rapidamente: egli deve possedere una buona scorta di immagini su cui operare una scelta. Chi riesce ad astrarre bene sa come scegliere le immagini pertinenti che collimano con l'esperienza in atto e procedere così ad una soddisfacente classificazione delle sue esperienze. Si spera che l'uso di concretizzazioni multiple aiuti ad arricchire la quantità di immagini di chi astrae con lentezza*. Solo con tali attitudini o abitudini è possibile riuscire (come ai bambini del Gruppo B, in un esempio citato a p. 78) a *cogliere il dato fondamentale* per un certo problema, e *così evitare l'uso di raffigurazioni ingombranti*.

Ciò porta a riflettere sul valore del ragionamento costruttivo in confronto a quello analitico. Un difetto (ben noto) di chi ha subito l'indot-

([2]) Vedi nota 1.

trinamento scolastico è descritto come segue, e contrapposto a un successo del Gruppo C (p. 108). *Molti adulti, posti di fronte a una data situazione, vi si accostano subito in modo analitico, senza prima valutarla meno superficialmente e vedere in cosa consista. Essi costruiscono le situazioni in base a idee preconcette, e l'analisi potrà funzionare solo in casi relativamente comuni. Ecco perché il pensatore costruttivo è di solito quello più creativo ed originale: il suo pensiero raggiunge buoni risultati anche nelle situazioni nuove ed insolite.*

Il processo costruttivo (p. 86) *ha luogo quando si ha di mira un certo insieme di requisiti e si cerca di costruire una struttura* (o una raffigurazione) *che soddisfi ad essi* (in genere), *senza essere consapevoli di tutte le complicazioni che interverranno*. Esso è di tipo artistico. *Un artista pensa essenzialmente in questo modo; egli non sa esattamente che quadro dipingerà finché non lo avrà ultimato, ma ne possiede un'idea ispirata al genere di dipinto cui anela.*

Passando, infine, agli aspetti più propriamente scolastico-didattici, sembra importante segnalare subito la seguente affermazione (p. 163): *Le ricerche sulla possibilità di estensione del curriculum* (cioè: *dei «programmi»*) *dovrebbero assolutamente affiancarsi a quelle sui metodi*. È un monito su cui si dovrebbe particolarmente riflettere in Italia dove, secondo vetuste consuetudini, si ritiene di potere e dover precisare in ogni dettaglio ciò che si deve insegnare tacendo sul *come* (salvo platoniche «avvertenze»). D'accordo col lasciare un grado sufficiente di libertà e responsabilità all'insegnante, ma sarebbe meno grave permettere varianti di programmi purché usando metodi idonei all'età e preparazione dei ragazzi piuttosto che viceversa.

Nello stesso ordine di idee, si dovrebbe riflettere su quest'altra affermazione (p. 147): *Sembra che si dovrebbe ridurre la quantità di matematica impartita ai bambini o almeno spiegare un po' meglio il perché essi la debbano imparare*. Senza vedere un «perché» non si può imparare ma solo ingombrare la mente di cose che rimangono indigeste e controproducenti; meglio imparare poco che ingombrarsi molto, ma del resto, se si riesce a far vedere il «perché», anche imparare moltissimo sarà più facile che l'attuale ingombrare molto.

Il «perché», possono aiutare a farlo comprendere parole dell'insegnante, ma soprattutto lo si penetra *facendo*, cioè *costruendo*, la matematica, nel senso (se necessariamente, in dettaglio, nei modi) del Dienes. Dei suoi gruppi sperimentali è detto (p. 110): *Era proprio chiaro che tutti i bambini avevano operato e goduto di esperienze di vera ricerca ma-*

tematica ed ora attendevano che i loro insegnanti li guidassero verso nuovi orizzonti.

Una questione delicata, di dosaggio che probabilmente non può venir prescritto con una conclusione univoca, sta nell'alternativa tra (p. 110) *spingere i bambini lungo vie obbligate o concedere loro una maggiore libertà di procedimento. Si devono fare molte ricerche sugli effetti che derivano ai processi conoscitivi da un atteggiamento di libertà o di costrizione*. (Alcuni spunti pp. 167, 151, 159): *Se il cammino è troppo rigidamente prospettato la scoperta può facilmente ridursi a una contraffazione di ciò che era progettato. Se, d'altro canto, la situazione viene lasciata troppo libera, nessuna conoscenza con uno scopo potrà mai avvenire. La funzione dell'insegnante dovrebbe essere quella di guidare e di fornire l'opportunità di fare scoperte, piuttosto che di insegnare direttamente. Ma fino a qual limite possiamo permetterci di "perdere tempo", come dice qualche insegnante, permettendo ai bambini di muoversi alla cieca, di cercare da soli il risultato, quando sarebbe molto più semplice dire loro come procedere?* Si risponde che *il tempo concesso per riflettere* non dovrebbe considerarsi *sprecato* neppure se *si vogliono insegnare delle tecniche*, ma tanto meno *se ci si prefigge di ampliare la personalità di chi impara con l'integrazione di un determinato stralcio di viva esperienza matematica*. E si potrà, in compenso, poi, *"forzare" i bambini oltre la loro capacità, sia intellettualmente sia emotivamente?* Ciò tende a creare una *resistenza*, un *meccanismo di difesa*, salvo se si riesce a creare (come nel Gruppo E) *un'atmosfera di lavoro, di indagine, da cui nessuna fuga era desiderata: quindi non era necessaria alcuna difesa. È importante domandarsi quali condizioni (forse, la varietà delle rappresentazioni) permetteranno questo tipo di apprendimento altamente stimolato che mantiene sempre viva la sua vivacità.*

Anche osservazioni su questioni didattiche di dettaglio hanno a volte un valore illuminante. Viene rilevato ad es. in due occasioni (p. 94 e 161) un difetto nelle procedure seguite: la mancanza di ricorso al *contrasto*, che è *uno stimolante molto potente del pensiero*. Infatti, *tutte le ipotesi avanzate risultarono alla fine confermate; non si verificarono mai eccezioni atte a mettere i bambini in guardia contro generalizzazioni affrettate, anche se corrette. Parte delle difficoltà che i bambini incontravano forse erano dovute alla mancanza di situazioni contrastanti che avrebbero loro consentito di riconoscere in modo più chiaro le relazioni in studio. La maggior parte di giochi teorici di gruppo erano "giochi buoni", e quindi erano esempi e non controesempi relativi a gruppi matematici.*

Cosi ad es. nozioni quali la proprietà commutativa e quella distributiva appaiono ovvie e pleonastiche finché non si danno dei controesempi (anche scherzosi: *non si ha il medesimo risultato aprendo la finestra e poi sporgendo la testa o viceversa; cuore un amalgama di uova latte e farina darà una focaccia, ma un risultato ben diverso si ottiene cuocendo gli stessi ingredienti separatamente e poi mescolandoli*). In genere, proprietà «semplici» non acquistano rilievo se non attraverso una effettiva conoscenza e «sensazione» di cosa siano le complicazioni da escludere (per es. le discontinuità per capire la continuità); è questa una verità troppo spesso ignorata o trascurata. Spesso hanno origine da ciò vere storture mentali, come l'idea (più diffusa di quanto si possa immaginare, almeno al livello del subcosciente, e forse favorita dalla posizione speciale data alle nozioni algebriche) che funzione crescente o decrescente significhi proporzionalità diretta o inversa. Vedansi considerazioni a pp. 84-85.

Osservazioni del genere, sia quelle a carattere generale che quelle di dettaglio, sono dunque altrettanto essenziali per tentar di delineare (p. 165) *una teoria generale sull'apprendimento, che spieghi le situazioni che si presentano nelle aule mentre si impara. Una siffatta teoria dovrebbe alla fine risultare dagli sforzi concertati di sperimentatori pratici, affiancati eventualmente da un gruppo di teorici consci dei successi e dei fallimenti dei primi. Questo resoconto* — conclude Dienes — *è un tentativo di stabilire un modello teorico che speriamo possa rivelarsi di qualche valore in quanto insieme di previsioni.*

* * *

L'importanza di questi problemi trascende il campo della matematica e dell'insegnamento della matematica, in quanto si tratta di componenti essenziali per la formazione culturale dell'uomo, sempre ma in particolare più ancora in relazione alle esigenze del mondo di oggi e di domani. Dice bene Angelo Pescarini, nella sua prefazione all'edizione italiana, che (p. XIX) *a noi spetta il compito veramente difficile di tradurre in termini pedagogici e culturali quelle indicazioni che ci vengono oggi da un mondo in grande travaglio perché alla ricerca di rinnovate prospettive ideali e sociali. La crisi drammatica della scuola in tanti paesi è il segno di un'inadempienza clamorosa dei suoi istituti, dei suoi compiti, dei suoi ideali.*

In questa prospettiva, è chiaro che il problema va affrontato col massimo impegno, non solo nella molteplicità dei suoi aspetti quali emergono da scritti e ricerche come quelli di Bruner e Dienes, ma anche con riferimento ai diversi tipi e livelli d'insegnamento ed alle peculiari situazioni nei diversi paesi.

In Italia la situazione è particolarmente precaria per la scarsa risonanza delle poche voci di persone consapevoli di ciò che la matematica dovrebbe contare nel complesso della cultura; vorrei menzionare due nomi: Massimo Bontempelli e Guido Calogero. I matematici difficilmente sanno liberarsi del tutto dalla deformazione professionale che tende a far identificare il pensiero matematico coi formalismi e i tecnicismi della matematica; i profani, per l'opposto motivo della loro ignoranza, accettano ovviamente questa medesima posizione traendone la coerente conclusione che la pretesa dei matematici di far studiare a tutti questa matematica è irragionevole. Occorre per prima cosa, quindi, precisare gli scopi culturali dell'insegnamento matematico nei vari ordini di scuole.

La risposta data da Bruner e già riportata (penultimo capoverso del n. 5) mi sembra ottima e detta nel miglior modo possibile; comunque concorda perfettamente col mio punto di vista. Si tratterebbe solo di esaminare come andrebbe applicata e adattata in relazione alle specifiche esigenze dei diversi livelli e tipi di scuole. A mio avviso le differenze dovrebbero essere soltanto quantitative, nel senso che le esigenze psicologico-didattico-culturali (ricorso all'intuizione, partenza dal concreto, legami con tutte le altre scienze e con le applicazioni, visione storica — e, meglio ancora, genetica — dello sviluppo della matematica) hanno sempre validità e importanza essenziale, ma richiedono paziente insistenza ai primi livelli d'insegnamento e per scuole a indirizzo non specificamente scientifico, mentre basteranno in genere rapidi cenni per mantener viva la consapevolezza di tali aspetti in coloro che via via più si specializzano in matematica o campi affini.

* * *

E passiamo rapidamente in rassegna i singoli casi.

Per la scuola media (dell'obbligo), già rinnovata, si tratterà forse solo di proseguire nella via già imboccata dall'inizio, perfezionando i concetti informatori ed eliminando le cause estrinseche di disfunzione.

Principale: la mancanza di insegnanti preparati specificamente per tale scuola (e ne parleremo).

Per le scuole medie superiori la situazione è tragica, dato che sopravvivono le superatissime strutture dopo anni da che vi affluiscono alunni provenienti dalla rinnovata scuola media. Situazione che (chiudendo un occhio su deficienze contingenti) può definirsi come «immettere in una scuola da medioevo i prodotti di una scuola del 2000». Proposte di programmi per la matematica ne sono state fatte (Un. Mat. Ital., dopo studio della Comm. It. Insegn. Mat.), ma sono sempre allo stadio di mere proposte, ed anche l'approfondimento degli aspetti didattici si è ridotto a pochi tentativi più o meno isolati. Ed incombe sempre il pericolo che il numero di ore per la matematica (ora vergogna di primato negativo per l'Italia) rimanga insufficiente dopo l'attesa riforma.

Per l'Università pure il problema va affrontato (si pensi all'ecatombe nel I° anno e allo scarso risultato finale denunciato dalla «prova di cultura»: qualcosa non va), ma c'è solo un aspetto che merita qui un cenno specifico: la preparazione degli insegnanti. Si tratta di compito difficile e delicatissimo, e nessuno sembra porvi attenzione. Appena da pochi anni esiste la laurea «a indirizzo didattico», ma di didattico c'è poco o nulla forché il nome, mentre occorrerebbe insistere con netta prevalenza su ciò che concorre alla formazione dell'insegnante (prima che del matematico, o fisico, o letterato, e via dicendo).

Una possibilità di creare persone qualificate in tal senso dovrebbe presentarsi ora, con l'istituzione di corsi di laurea abilitanti all'insegnamento di Matematica e osservazioni scientifiche nella scuola media (istituzione contemplata nella legge istitutiva dell'Università della Calabria, e valida per tutte le altre sedi). Vi sono tendenze favorevoli e sfavorevoli sull'«abbinamento» di matematica e osservazioni scientifiche; io sono favorevole, e comunque ritengo assurdo negare che si possa felicemente affidare tale insegnamento abbinato ad un unico insegnante espressamente formato finché un tentativo di formarlo non sia stato fatto. Un tal corso di laurea potrebbe costituire il banco di prova ideale per un superamento in blocco delle lamentate deficienze: dovrebbe caratterizzarlo un insegnamento nettamente orientato verso la «mano sinistra» (secondo Bruner), verso le finalità pedagogico-didattiche, verso una sintetica ed ampia visione culturale aliena da specializzazioni. Se, come è da auspicare, tale esperimento riuscirà, balzerà probabilmente agli occhi l'opportunità di differenziare e ristrutturare in modo analogamente orientato (anche se meno radicalmente lontano dalla specializzazione) anche i corsi di laurea per la matematica a indirizzo didattico.

E qualche briciola (non trascurabile) di tale evoluzione, in direzione dalla «mano sinistra», dovrebbe penetrare dovunque portando una ventata d'aria respirabile nella matematica di tutti gli indirizzi, anche applicativo, anche generale, e più ancora per i non matematici (fisici, chimici, naturalisti, economisti, statistici, ecc.).

II lettore che avesse interesse a conoscere più da vicino le idee e tendenze dell'autore del precedente articolo potrebbe vedere le seguenti pubblicazioni:

Libri

B. de F., *Matematica logico-intuitiva*, III ed. Cremonese, Roma, 1959 (a livello universitario).

B. de F. & F. Minisola, *La matematica per le applicazioni economiche*, ed. Cremonese, Roma, 1961 (a livello Ist. Tecn. Comm.).

B. de F., *Il «saper vedere» in Matematica*, ed. Loescher, Torino, 1967 (a livello integrativo per scuola media).

Articoli

B. de F., *Le proposte per la matematica nei nuovi licei*, «Periodico di matematiche» (Zanichelli, Bologna), 1967; parecchi altri sono indicati in un elenco in quest'ultimo.