*La Matematica nella Società e nella Cultura*

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Carla Rossi

# La probabilità per tutti seguendo l'insegnamento creativo, i suggerimenti e l'esempio di Bruno de Finetti

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **8** (2015), n.3 (*Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica. «Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà», a cura di Giuseppe Anichini, Livia Giacardi, Erika Luciano)*, p. 73–108.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_3_73_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2015.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 73-108

# La probabilità per tutti seguendo l'insegnamento creativo, i suggerimenti e l'esempio di Bruno de Finetti

CARLA ROSSI

*La matematica richiede anzitutto immaginazione e interesse per* vedere direttamente i problemi, *e allora è istruttiva e anche divertente. Perché i giovani se ne persuadano, e conservino anche da grandi il vantaggio di sapersi regolare in ogni circostanza afferrando gli aspetti matematici e logici dei problemi che dovranno affrontare nella vita, basta che si abituino a riflettere, a rendersi conto del valore e dell'utilità di ciò che fanno. La matematica sembra e diventa arida e odiosa soltanto se, lasciando in ombra gli scopi cui risponde, si riduce a passiva accettazione di nozioni, metodi, formalismi.*

*Giova soprattutto riflettere su esempi, imparare a riflettere su esempi svariati ed a modificarli e costruirsene di nuovi, e riuscire così sempre meglio a capire e scoprire ciò che occorre* saper vedere *per dominare un problema.*

(de Finetti L 1967, p. 1)

## 1. – Premessa: ricchezza e complessità della personalità di de Finetti; matematica, probabilità, didattica

De Finetti è stato definito da tantissimi ricercatori, noti e non, "matematico, economista, filosofo, precursore" (Rossi 2001) e, invero, la sua curiosità intellettuale e operativa non aveva limiti e la sua intuizione e le sue capacità anche tecniche erano grandissime in molti campi. Ma soprattutto era, ed è tuttora, impressionante la sua propensione a trarre spunti di riflessione da una qualsiasi questione per riutilizzarli in un'altra, nonché la capacità di guardare lo stesso fenomeno sotto angolazioni e con lenti diverse: il suo "fusionismo", come lo chiamava mutuando il termine da Felix Klein; un fusionismo che talvolta sconcertava l'interlocutore.

De Finetti, nato da una famiglia di ingegneri, trasse verosimilmente da quelle radici la sua visione operativa ai problemi. Aveva anche dimestichezza con il mondo dell'arte, suo zio era pittore, lui stesso disegnava molto bene e fu in contatto con il grande architetto Luigi Moretti.

Sotto un profilo più tecnico, la sua *forma mentis* trasse anche molto dalla "nuova" fisica del primo Novecento; da lì desunse l'importanza dei concetti di "relatività", "osservabilità" e "verificabilità"; anche la biologia lo occupò: quasi incidentalmente, ma con esiti rilevanti.

Un campo che profondamente lo interessò e influenzò fu l'economia, intesa come problematica delle scelte preferibili in relazione allo scopo da conseguire, soprattutto in condizioni di **incertezza**; da lì possiamo vedere l'origine del suo orientamento anche teorico verso la "decisione", più che verso la conoscenza meramente speculativa. Il campo della decisione non ha praticamente limiti, giacché ovunque si pongono questioni di "convenienza": dalla vita di ogni giorno alla grande politica, dalle arti alle scienze, non esclusi la matematica, il diritto, l'etica stessa. Dal campo della finanza (lavorò per lunghi anni alle Assicurazioni Generali) de Finetti trasse spunti di carattere generale sui rischi e la loro diversificazione, per i quali, ormai è ampiamente accettato e sostenuto, avrebbe meritato il premio Nobel.

De Finetti conosceva la filosofia e ne criticava soprattutto l'oscurità di tante sue parti; nella sua visione di tipo pragmatista, attaccò le illusioni del "razionalismo" (esistono verità immutabili che trascendono i fenomeni, raggiungibili con il puro ragionamento) e del "realismo" (una proprietà del mondo osservata fin qui senza eccezioni costituisce un immutabile fatto di natura). Dalle più elevate dottrine morali, politiche e religiose trasse la tensione ideale e la spinta pratica ad operare per il bene collettivo, che lo portarono anche ad azioni assai "costose" sul piano personale.

De Finetti scelse consapevolmente di dedicare la sua vita alla matematica e si considerò sempre un matematico. Dalla prassi della matematica trasse certo l'importanza della "coerenza" come premessa normativa all'analisi e alla decisione; conseguentemente ne fece il criterio che impronta tutta la sua teoria delle probabilità. Tuttavia egli diede soprattutto rilievo alla capacità, che per lui era l'essenza della matematica, di immaginare traduzioni di questioni pratiche in schemi mentali, conferendo dunque un primato all'intuizione e alla comprensione dei meccanismi essenziali dei fenomeni: la creatività, caratteristica umana per eccellenza, in qualsiasi campo. Ciò non toglie che fosse disposto a introdurre lui stesso tecnicismi matematici anche spinti, quando lo riteneva necessario (es.: la "complicazione" teorica dovuta all'uso dell'assioma di additività solo finita delle probabilità).

La sua decisione di passare dallo studio dell'ingegneria a quello della matematica è così evidenziata in una lettera alla madre in cui spiega le sue motivazioni:

> *E se vuoi allargare un po' lo sguardo, dimmi di quanti ingegneri è passato alla Storia il nome, in confronto a tanti matematici che – da Pitagora ad Einstein – vivranno in eterno nelle loro concezioni superbe. Perché non è vero nemmeno che la Matematica sia ormai un campo esplorato da imparare e tramandare ai posteri tale e quale. Progredisce, si arricchisce, si snellisce, è una creatura viva, vitale, in pieno sviluppo, e solo perciò la amo, la studio, e voglio dedicarle la mia vita.* (F. de Finetti 2000, p. 733)

La matematica, disciplina che informa di sé tutti i campi della scienza, era il terreno ideale per il suo fusionismo. Il calcolo delle probabilità, naturale strumento per inquadrare questioni dei campi più svariati, tutti quelli in cui si presenta l'incertezza e la logica induttiva, fu per lui un terreno di elezione, quello adatto a fondare la logica dell'intera Scienza.

Dalla matematica, suprema "arte dell'imparare", e dalla sua propensione al bene di tutti trasse il suo impegno nella didattica e nella vita collettiva. Di questo si occupa principalmente questo articolo senza pretesa e neppure volontà di tracciare un unico rigoroso percorso, bensì inteso a esemplificare i mille rivoli di un pensiero dal quale abbiamo ancora moltissimo da trarre.

In particolare è interessante citare come per la definizione della probabilità de Finetti sia partito, in un suo corso a Trieste nel 1932/33, da un esempio tratto dalla vita collettiva.

## 2. – Della nozione di probabilità

*Che cos'è la probabilità?*

*Dice un'antica sentenza latina, "tot capita, tot sententiae"; in nessun campo essa è tanto vera quanto nella teoria delle probabilità, e fin dai principi, fin da questa stessa domanda sul significato della probabilità. Tuttavia, fra un matematico che la definisca come rapporto tra il numero di casi favorevoli e possibili, uno statistico che la interpreti come un valore più o meno ideale della frequenza, e l'uomo della strada che dica "è la sensazione che mi guida in tutta la vita", non esito a dire che la risposta migliore, più completa, più sensata, è proprio quella dell'uomo della strada.* (de Finetti L 1933, p. 1)

Come si vede, già a 26 anni, de Finetti esprime la sua nozione di probabilità, in modo ampio, coerente e completo, con un esempio comprensibile a tutti, facendo riferimento anche alle decisioni cui si dedicherà moltissimo.

## 3. – Complessità di de Finetti: interesse per la creatività, il benessere collettivo, la didattica, la matematica come terreno di creatività, impegno politico

Per cercare di capire l'approccio di de Finetti all'insegnamento della matematica e, in particolare, del calcolo delle probabilità (per qualunque ordine di studi, e per chiunque) occorre tenere presente la vastità e varietà dei suoi interessi e la sua capacità di collegarli. ll fusionismo e, in particolare, il legame fra intuizione e logica ritornano sempre nei suoi scritti, come nelle lezioni che teneva. La personalità di de Finetti non può essere descritta a partire da aspetti particolari, ma solo complessivamente, approfondendo poi, di volta in volta, un tema specifico, ma solo per ragioni pratiche di brevità.

Nel suo scritto intitolato *Chi sono io?*, elaborato nel 1981, in occasione del convegno "International Conference on Exchangeability in Probability and Statistics", organizzato dal 6 al 9 Aprile 1981 presso l'Accademia dei Lincei per il suo 75esimo compleanno, dice:

*Chi sono?, la prima cosa che mi sembra di dover dire come punto di partenza è che di me stesso, come persona qualunque, m'importa assai di meno che di ciò che attiene al benessere collettivo, all'equilibrio ecologico secondo la linea*

> *tenacemente difesa da Aurelio Peccei, al progresso sociale e civile secondo la linea ispirata a Lelio Basso (membro tra l'altro del tribunale Russell); linea cui vorrei che tutti mirassero per aver diritto a goderne quanto a ciascuno può ragionevolmente spettare. Uno per tutti e tutti per uno, senza eccessive differenze o rivalità tra individui o classi o nazioni: rivalità utili soltanto se mirano a migliorare ovunque il benessere collettivo anziché curarsi soltanto di quello egoisticamente (e miopemente) individuale o settoriale o classista.*
> (si veda nel presente volume l'Appendice 1.8)

Ne deriva l'interesse per la didattica, in particolare per la matematica e il calcolo delle probabilità, ma non solo, per mettere a disposizione di tutti la propria conoscenza ed elaborarla con tutti. Ne deriva, soprattutto, la sua attenzione ai "profani", così chiamati da lui in un articolo importante di cui si parlerà dopo, e agli studenti che a lezione, ma non solo, cercava di coinvolgere anche su argomenti almeno in parte nuovi e non trattati esplicitamente nei suoi scritti e nelle precedenti lezioni.

Il nome di de Finetti è ora conosciuto in tutto il mondo, non solo per la matematica, in particolare la probabilità, ma, ancor più, per l'economia. Non è troppo sorprendente, essendo vissuto in un'epoca in cui in matematica prevaleva l'impostazione formalista. Anche in campo economico tuttavia, il suo contributo è stato compreso con notevole ritardo, anche perché molti suoi lavori giovanili importanti e pionieristici furono scritti in italiano e pubblicati su riviste italiane.

Secondo Franco Modigliani, che nel 1961 lo propose come Fellow dell'Econometric Society dove risultò eletto al primo scrutinio, per i suoi studi in campo economico, de Finetti avrebbe meritato il premio Nobel, come accadde ad altri matematici: John Nash, Robert Aumann, Lloyd Shapley. Il Nobel Harry Markowitz riconobbe che un lavoro di de Finetti del 1940 (*Il problema dei pieni*, de Finetti A 1940, http://www.brunodefinetti.it/Opere/Il%20problema%20dei%20pieni.pdf), di cui venne a conoscenza solo molto tardi, anticipava i suoi risultati degli anni '50 sulle "scelte di portafoglio", per i quali gli fu attribuito il Nobel nel 1990!

Il 21 maggio del 1967 de Finetti intervenne pubblicamente contro la dittatura instaurata in Grecia. In una lettera aperta a *L'Espresso*, insieme agli economisti Federico Caffè, Siro Lombardini, Luigi Pasinetti, Antonio Pedone e Luigi Spaventa, espresse solidarietà ad Andreas

Papandreu riportando le parole da questi espresse proprio durante la lezione tenuta nel 1966 al Centro Internazionale Matematico Estivo (*CIME*) ([1]). Vicino per vari anni alla sinistra cattolica di Livio Labor, simpatizzò anche per il Partito Radicale di Pannella e il 5 ottobre 1972 divenne addirittura direttore responsabile di *Notizie Radicali*, malgrado non fosse iscritto all'Ordine dei giornalisti, in deliberata violazione dell'obbligo previsto dalla legge.

Proprio per avere pubblicamente sostenuto, dalle pagine di *Notizie Radicali*, i diritti degli obiettori di coscienza, nel novembre 1977 fu clamorosamente incluso, assieme ad altre 89 persone, in un mandato di cattura con l'accusa di "associazione a delinquere, attività sediziosa, istigazione verso i militari a disobbedire alle leggi". Avvertito del mandato di cattura, fece sapere che si sarebbe fatto arrestare a Roma di fronte alla sede dell'Accademia Nazionale dei Lincei, alle ore 11, alla fine della seduta inaugurale del nuovo anno accademico. E così fu: alla fine dell'adunanza fu arrestato e, seguito da un folto corteo di radicali e giornalisti, fu condotto nel carcere romano di Regina Coeli, che si trova proprio a poche decine di metri, e lì attese la revoca del provvedimento che, fortunatamente, era già stata diramata. Raccontava poi a noi allievi di aver chiesto di entrare almeno in una cella, ma che non gli fu permesso e attese in "anticamera".

Quel giorno dovetti sostituirlo io nella seduta di Laurea ([2]).

## 4. – Il coinvolgimento degli studenti: il mio esame

L'interesse e la capacità didattica di de Finetti si manifestavano attraverso il coinvolgimento degli studenti in discussioni su svariati temi a partire da esempi concreti e curiosi della vita di ogni giorno.

([1]) Importante iniziativa sull'Economia organizzata da de Finetti inizialmente a Villa Falconieri (Frascati) e poi a Urbino ogni estate. La prima edizione si tenne all'Aquila con la presenza di premi Nobel.

([2]) Era previsto l'esame di uno studente, con media molto alta, che avevo seguito anche io nel preparare la tesi. Ricordo che la madre dello studente mi telefonò molto preoccupata che io non fossi all'altezza di far avere la lode al figlio, il quale l'avrebbe avuta comunque solo per la sua media alta, come in effetti è avvenuto.

Posso metterli in luce raccontando come si svolse il mio esame e come cambiò la mia vita "pubblica", tenendo presente l'affermazione educativa "*scatenare l'intelligenza, non soffocarla*".

Il suo modo di procedere risultava in realtà frustrante per molti, che non riuscivano a interpretare i suoi suggerimenti e a interagire "naturalmente" con lui.

Eravamo solo due ragazze a dover sostenere l'esame di calcolo delle probabilità; l'altra aveva paura di essere interrogata da de Finetti, e preferì essere interrogata dall'assistente Giandomenico Majone. L'esame, che si teneva alla lavagna, era comunque alla presenza del professore, che mi invitò a sedere vicino a lui per aspettare il mio turno e assistere **attivamente,** insieme a lui, all'interrogazione dell'altra allieva, chiedendomi se ero disponibile a commentarla con lui. Naturalmente uno studente il giorno dell'esame dice di sì a qualunque richiesta del professore, anche se un po' "nuova" e inaspettata. Va considerato che io avevo seguito pochissime lezioni del suo corso e mi ero preparata quasi solo sul suo testo *Teoria delle probabilità* (1970), appena uscito; de Finetti non mi conosceva affatto.

Da una domanda, con risposta corretta da parte dell'altra studentessa, sulle funzioni di ripartizione in due dimensioni derivò, per de Finetti e per me, una divagazione/discussione molto ampia. Quando mi chiese come avrei fatto a dare un'immagine geometrica delle varie proprietà delle funzioni in modo da poterle rappresentare nel piano, io dissi che avrei riferito le proprietà alle curve di livello della funzione e cominciai a evidenziare l'andamento ammesso per le curve, derivandolo dalle proprietà analitiche della funzione. La discussione durò più di mezz'ora, ma le persone presenti chiaramente non potevano seguire perché parlavamo piano per non disturbare l'interrogazione dell'altra studentessa, che il professore seguiva contemporaneamente, mentre nessuno poteva seguire la mia. Conclusosi l'esame della mia collega, fui invitata da de Finetti a ripetere alla lavagna tutto quello che avevo derivato nella nostra chiacchierata, come fosse un seminario per tutti i presenti, mentre invece era la mia interrogazione ufficiale. Erano emerse alcune proprietà, non ancora trattate geometricamente, delle funzioni di ripartizione in due dimensioni "leggendo" le note proprietà analitiche con approccio "visuale" ("saper vedere" in matematica! Fondamentale, per de Finetti).

Sostenuto l'esame, ho comunque seguito il suo successivo corso (dove introdusse anche le proprietà geometriche emerse dalla mia interrogazione); mi fu utilissimo, perché con il suo modo di insegnare non si finiva mai d'imparare e maturare interessi di varia natura, soprattutto perché i suoi esempi riguardavano applicazioni in vari campi e nella vita di tutti i giorni.

## 5. – Presentare la matematica e la probabilità in modo rispondente alle esigenze del profano

Per spiegare l'approccio di de Finetti all'insegnamento della probabilità, basta illustrare il suo pensiero sull'insegnamento in generale e su quello della matematica in particolare. Se interessa specificamente l'insegnamento del calcolo della probabilità, basta sostituire probabilità a matematica nella maggior parte dei testi di de Finetti.

Vale la pena di riportare una sintesi da *Programmi e criteri per l'insegnamento della matematica alla luce delle diverse esigenze* (de Finetti A 1965a) che suggerisco di leggere completamente perché, purtroppo, è attuale anche oggi nelle sue critiche:

> [...]. *In succinto la tesi è questa: se c'è, come purtroppo indubbiamente c'è, un atteggiamento d'incomprensione e d'ostilità quasi generale dei profani verso la matematica, la colpa è nostra, dei matematici, perché non vogliamo o non cerchiamo o non sappiamo presentare la matematica in modo rispondente alle esigenze del profano. La miope e autolesionista visione specialistica ci induce a vantare come un pregio la possibilità di presentare la matematica come un campo reso autonomo e staccato da ogni nesso colle altre scienze grazie alla completa astrattizzazione, mentre sarebbe essenziale superare questa visione ristretta e caricaturale affermando la posizione della matematica nel tutto che è la scienza e quella della scienza nel più grande tutto unitario che sarebbe la cultura* [...]. *La situazione derivante da tale lacerazione della cultura, in umanistica contro scientifica, e poi perfino tra i vari campi della scienza, dovrebbe essere più generalmente sentita come fonte di angosciosa preoccupazione.* (de Finetti A 1965a, p. 120)

Per dire dell'attualità della sua preoccupazione: alla fine di gennaio 2015 ho seguito diverse conferenze nell'ambito del "Festival della Scienza" (Tema: *L'ignoto - La scienza e l'importanza del non sapere*), organizzato presso l'Auditorium di Roma. Un importante conferenziere, forse solo per semplificare, sostenne che la scienza si impara dopo il linguaggio e, quindi, la cultura umanistica nascerebbe prima di quella scientifica, anche parlando di preistoria e di popolazioni antiche. Basta però tenere presente che, per "sopravvivere" alla vita di ogni giorno, anche per i neonati, è necessario possedere una *forma mentis* di impronta "scientifica" e un approccio alla conoscenza basato sulla logica induttiva. Credo che ciò sia evidente per chi, come i neonati, impara il linguaggio in modo "sperimentale". Ma anche per l'evoluzione stessa del linguaggio ci sono prove di uno sviluppo su base induttiva: si può parlare di induzione nella scienza egizia pre-ellenica, con concomitante creazione di linguaggio adeguato, a partire da problemi della vita; ci sono prove di pratica induttiva nell'evoluzione tecnica durante la preistoria; per non dire di quanto emerge dall'osservazione del comportamento animale. Naturalmente, la scienza moderna, come già quella antica, è essa stessa uno sviluppo del linguaggio; a conferma dell'inammissibilità della "lacerazione" fra cultura umanistica e scientifica (totale approccio fusionista anche qui).

Prosegue de Finetti:

> *Principalmente responsabile di tale lacerazione è la malintesa deleteria aspirazione al purismo, all'autonomia, alla specializzazione, all'isolamento. Per il profano, come per ogni altra persona normale, il pregio di ogni cosa deriva dalla sua collocazione, utile o necessaria, nel più vasto tessuto di interessi e di conoscenze capace di attirarne l'attenzione, ed è questo l'aspetto della matematica che va sottolineato in primo luogo; l'eventuale ricorso all'astrattizzazione può essere giustificato solo se e quando, in un secondo momento, tale espediente tecnico si possa dimostrare apportatore di ulteriore utilità come economia e potenza di pensiero, come creatore di nuove facoltà di visione delle cose prima e più ancora che come strumento formale per dominarle* [...].
>
> *Queste esigenze, illustrate per riguardo al profano, sussistono anche nel caso opposto, e cioè per la preparazione dei futuri specialisti, ossia di coloro che in vario senso e misura, avranno bisogno di sviluppare gli studi matematici e di utilizzare effettivamente la matematica nel corso della loro vita* [...].
>
> *La risposta alla domanda costituente il titolo della relazione sarebbe quindi: programma sostanzialmente unico, salvo differenziazioni marginali* [...] *la stessa risposta va data anche per riguardo ai criteri e metodi di inse-*

> *gnamento, e forse anzi in modo ancora più reciso, perché l'incomprensione che potrebbe derivare da diversità del campo delle conoscenze è meno profonda di quella cui darebbe luogo una frattura tra i modi di vedere le stesse impostazioni di partenza.* (de Finetti A 1965a, pp. 120-122)

L'articolo poi sviluppa ampiamente il tema; credo che sia utilissimo che gli insegnanti di ogni ordine e materia lo leggano con la massima attenzione.

### 5.1 – *Valore degli esempi: il panettone di Poisson*

Quello che de Finetti credeva fondamentale per lo sviluppo della scienza lo pensava tale anche per l'approccio didattico; molti spunti li ha forniti nei suoi scritti e possiamo elencarli e ampliarli con esempi concreti trattati nelle sue lezioni o in discussioni con i suoi allievi:

> [...] *le esemplificazioni pratiche più semplici (ridotte magari a cenni)* – afferma de Finetti – *devono precedere ogni teorizzazione per creare anzitutto una motivazione, atta a predisporre all'accettazione di astrazioni che appaiono giustificate, ed evitare così la reazione di rigetto che la via opposta spesso produce, non del tutto ingiustificatamente.* (de Finetti A 1974a, p. 31; si veda nel presente volume l'Appendice 1.6)

Un esempio tratto dalla vita comune gli servì per parlare, in una lezione nel dicembre del 1969, della distribuzione di Poisson in modo concreto e intuitivo, introducendo addirittura la nozione di *scomponibilità* e di *indefinita scomponibilità* di distribuzioni, poi naturalmente delineata anche in modo più formale e lasciata da approfondire per proprio conto agli studenti.

Poiché era dicembre inoltrato ed erano già in vendita i panettoni, spiegò che il numero (aleatorio!) di canditi e chicchi di uvetta in un panettone di prefissati peso e marca seguiva la distribuzione di Poisson; spiegava poi come doveva essere trattato lo stesso problema per una *fetta* con un peso dato, riportando la media del numero di chicchi alla frazione di peso. La somma di numeri aleatori poissoniani indipendenti è ancora poissoniana, e, viceversa, qualunque distribuzione poissoniana è scomponibile in una convoluzione di poissoniane.

Questo esempio non solo permetteva di parlare della distribuzione di Poisson, ma introduceva direttamente un processo fatto di *eventi rari* (la comparsa di chicchi) nell'ambito di una grandezza (la massa pastosa) con un *peso* unitario (o *fetta* unitaria). Avendo compreso la distribuzione di Poisson dall'esempio del panettone, il passaggio a concepire un **processo aleatorio**, dove la grandezza in cui sono immersi gli eventi rari diventa il *tempo* risulta facile; e così lo è l'ulteriore generalizzazione che si ha passando al piano, allo spazio e ad altri ambienti.

### 5.2 – *Contro la mania del rigore: dimostrare in modo intuitivo e comprensibile, sui casi principali; solo dopo affinare e generalizzare; processo Testa e Croce, approssimazione di distribuzioni a varianza finita; teorema centrale*

> *Il rigore è indubbiamente necessario, ma la mania del rigore è spesso controproducente. Una dimostrazione ineccepibilmente logica, valida sotto condizioni estremamente generali, è in genere complicata e priva di prospettiva, nascondendo il concetto intuitivo essenziale nella foresta di minuzie occorrenti solo per includere o casi marginali o estensioni smisurate.*
> (de Finetti A 1974a, p. 34; si veda nel presente volume l'Appendice 1.6)

È una critica costruttiva della base astratta dell'insegnamento della matematica. I libri di de Finetti di *Teoria delle probabilità* (1970) evitano le lunghe dimostrazioni matematiche di molte proprietà, utilizzando molto più l'approccio diretto e intuitivo a partire da esempi e problemi, che, comunque, pongono le basi per la dimostrazione che viene spesso accennata o trattata dopo. Per esempio, rappresentando geometricamente, se possibile con l'utilizzo della funzione di ripartizione, il numero standardizzato di successi nel caso binomiale, si vede, al crescere di $n$, la tendenza alla distribuzione normale standardizzata. Naturalmente de Finetti era bravissimo nel fare grafici, come si vede dai suoi scritti; ora è molto più facile procedere con Excel in aula, utilizzando esempi statistici adeguati. Un esempio è dato dalle distribuzioni di caratteri biometrici quantitativi dovuti al contributo additivo di molti geni (per esempio l'altezza), come evidenziato nel 1846

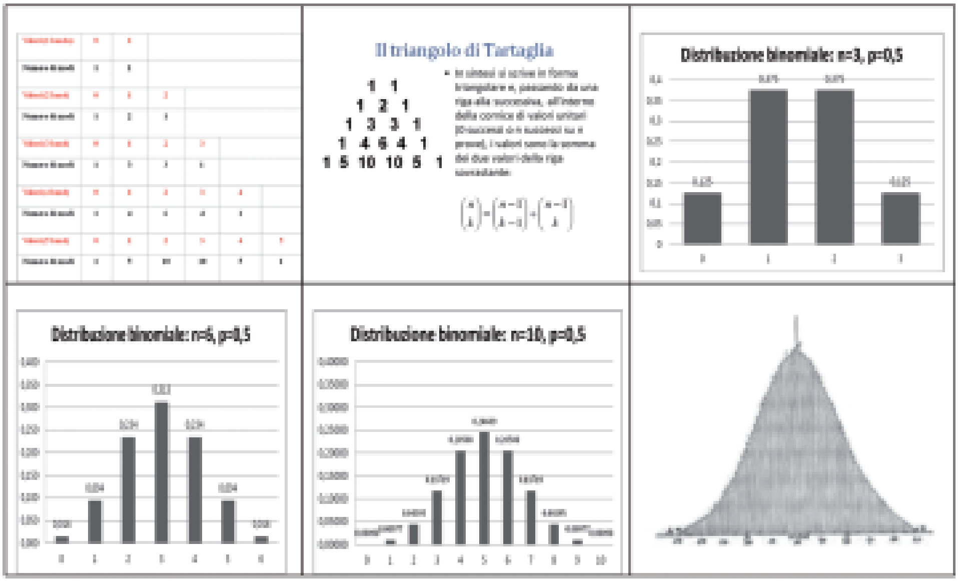


Figura 1. Esempi didattici sul Teorema Centrale: Testa e Croce (T-C), con tendenza alla forma a campana fin da $n$ abbastanza limitato, e grafico di Quételet (Quételet 1846, p. 103) che riporta la distribuzione normale suggeritagli dall'osservazione delle tavole relative alle misure toraciche di 5.738 soldati scozzesi, distribuite intorno alla media con un andamento simile alla legge degli errori

da L.A.J. Quételet che, essendo astronomo, matematico, statistico e sociologo, conosceva la distribuzione gaussiana e evidenziò l'adattamento a tale distribuzione teorica dell'altezza dei coscritti scozzesi (fusionismo!). La Figura 1 è tratta da una mia lezione sulla binomiale, utilizzando da un lato l'esempio definettiano del processo di "Testa e Croce" (T-C), con tendenza alla forma a campana fin da $n$ abbastanza limitato, e dall'altro il grafico di Quételet che riporta la distribuzione normale relativa a misure corporee (Quételet 1846). Quételet illustra come, in una popolazione omogenea, i caratteri dei singoli si distribuiscano secondo un istogramma, avente ordinate proporzionali ai successivi termini dello sviluppo del binomio di Newton, e conclude che i caratteri umani si possono studiare con il calcolo delle probabilità e che per essi vale l'approssimazione con i minimi quadrati già formulata da Gauss e Legendre per trattare le discordanze tra diverse misure di un fenomeno fisico.

Bruno de Finetti usava ampiamente il processo Testa e Croce (T-C). Chiariva anche (ma forse senza la necessaria enfasi ...) che qualunque processo a varianza finita è approssimabile con esso, almeno asintoticamente. Una distribuzione con varianza finita si può approssimare con una semplice coppia di masse concentrate a distanza $\sigma$ dalla media, conservandone le caratteristiche del second'ordine. Con una semplice trasformazione affine (cambio di origine e di unità di misura) ci si può addirittura ridurre al caso di media pari a 0 e varianza pari a 1 (standardizzazione). Se si suppone di sommare un gran numero di numeri aleatori, indipendenti e le cui distribuzioni, diverse, siano però identiche quanto a caratteristiche di media e varianza, ecco che appare il processo T-C; e, su un gran numero di numeri aleatori, appare la inevitabile tendenza alla "campana"; e, su un numero ulteriormente ampliato di numeri aleatori, il processo diventa quello di Wiener-Lévy ([3]).

Naturalmente poi nel suo libro, già citato, *Teoria delle probabilità* si trovano anche dimostrazioni rigorose del "teorema centrale". La più semplice e interessante utilizza la funzione caratteristica (trasformata di Fourier); funzione su cui de Finetti aveva dato anche contributi importanti fin dagli anni giovanili (de Finetti A 1930-1931). In questo scritto si trova anche la prima versione del risultato noto in tutto il mondo come "teorema di de Finetti", di cui parleremo in seguito.

## 5.3 – *Dall'astratto al concreto: un contributo suggerito da de Finetti il cui interesse si manifesta, fuori Italia, più di 40 anni dopo*

> [...] *il significato degli assiomi* – scrive de Finetti – *non è "astratto" se non nel senso di "multiconcreto": esprime e idealizza proprietà riscontrabili in svariati casi e che è ragionevole prevedere troveranno analoga applicazione in molte altre applicazioni più o meno analoghe.* (de Finetti A 1974a, p. 32; si veda nel presente volume l'Appendice 1.6)

([3]) Il cambio di origine e di unità di misura, di cui de Finetti faceva uso continuo e estremamente disinvolto, molto spesso risulta ostico perfino a studenti di matematica del terz'anno, che pure hanno frequentato fior di corsi di geometria. Questo perché spesso tali corsi presentano le varie trasformazioni (metriche, affini, proiettive) in modo completamente astratto, trascurando di far comprendere con adeguati esempi quali situazioni reali (fisiche, sociali) possano essere così trattate e quale sia il senso delle invarianze sottostanti.

De Finetti era in grado di intuire la potenza applicativa di talune costruzioni astratte (assiomatiche o no), che magari sfuggiva ad altri, matematici o specialisti. Ne ho avuta una conferma recentemente.

Le proprietà geometriche delle superficie di ripartizione, di cui parlai con de Finetti nel corso del mio esame, le ho poi formalizzate, ulteriormente sviluppate e pubblicate sul *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari* (Rossi 1973); rivista dove anche de Finetti ha pubblicato vari lavori importanti, conosciuti ora, con molto ritardo, anche a livello internazionale. Essendomi poi occupata di altro, non ho più continuato su quel tema e avevo quasi dimenticato il lavoro. Mi sono molto sorpresa quando, all'inizio degli anni '90, mi ha cercato la ricercatrice di Torino Luisa Tibiletti per chiedermi una copia del lavoro. Ma ciò che mi ha sorpreso molto di più è stata la richiesta dello stesso lavoro fatta alla fine del 2014 da un ricercatore russo (Victor Mingazov), attualmente in Germania a Ulm per un master in finanza; ho avuto qualche problema ad inviarlo, perché, a 41 anni dalla pubblicazione, non ne avevo copia digitale, né cartacea. Il motivo della richiesta era la citazione di quel lavoro italiano in un articolo internazionale (Cousin e Di Bernardino 2013), che tratta di applicazioni in finanza matematica, con riferimento anche a diversi articoli di Luisa Tibiletti, oltre al mio. Come si vede, dalla mia dimostrazione di proprietà geometriche, ispirata da de Finetti, si è passati poi ad un utilizzo molto applicativo.

### 5.4 – *Concreto vs. astratto; intuizione vs. logica; fusionismo vs. purismo*

Precisiamo ora quanto accennato sopra relativamente al rapporto fra concreto e astratto, partendo dalle parole stesse di de Finetti in proposito:

> *Quanto detto, sia pur succintamente, contro la contrapposizione fra concreto e astratto, conduce in modo naturale, e analogamente, a rivalutare gli aspetti più attivi, più creativi (ma anche, e proprio per ciò, più avventurosi, fantasiosi, soggettivi) del nostro modo di pensare. Il rigido e impeccabile ragionamento deduttivo non può (né dovrebbe; altrimenti esorbiterebbe dal campo su cui si estende il suo diritto di sovranità) condurre a nessuna*

*conclusione "nuova", cioè non già implicitamente contenuta nelle premesse.* (de Finetti A 1974a, p. 32; si veda nel presente volume l'Appendice 1.6)

*Ho sempre indicato nel fusionismo il principale concetto di base per il miglioramento dell'insegnamento e della comprensione della matematica. Nel senso più specifico, in cui fu introdotto da Felix Klein, il fusionismo consiste nella fusione dello studio di geometria da una parte e di aritmetica, analisi ecc. dall'altra; più in generale si tratta di fondere in modo unitario tutto ciò che si studia (anche interdisciplinarmente), mentre le tendenze antiquate predicavano il «purismo».* (de Finetti A 1981b; si veda nel presente volume l'Appendice 1.8)

Un approccio fusionista non disdegna l'intuizione, pur non contrapposta al rigore:

*Un altro preconcetto e movente del ragionare in astratto è per molti la preoccupazione di 'bandire l'intuizione, perché talvolta induce in errore'. La preoccupazione può essere giustificata in delicate questioni di critica dei principi; ma fuori di tali situazioni eccezionali è ben maggiore il rischio di errare per mancanza dell'intuizione. Volerla bandire sarebbe come cavarsi gli occhi perché esistono le 'illusioni ottiche' senza sospettare che la cecità abbia pure qualche inconveniente.* (de Finetti A 1965a, p. 133)

I punti trattati fin qui compaiono espressamente anche in *Chi sono io ?*:

*Quanto al mio modo di pensare, di prospettarmi i problemi ed esporre le mie tesi, dirò che cerco sempre di rendere quanto più possibile chiari e semplici e "naturali" e "intuitivi" – magari presentandoli in modi concreti e divertenti – i concetti e i ragionamenti in ogni campo, soprattutto in quello della probabilità che particolarmente mi interessa, e che è, purtroppo, una delle nozioni più esposte al rischio di velleitari fraintendimenti e distorsioni e addirittura travisamenti di ogni peggiore specie.* (de Finetti A 1981b; si veda nel presente volume l'Appendice 1.8)

## 5.5 – *Insegnamento tramite esperimenti; Previsione vs. "Tirare a indovinare"; Concorso pronostici calcistici e diagramma ternario*

Per quanto riguarda la comprensione della probabilità, l'insegnamento di de Finetti comprendeva veri e propri "esperimenti" comportamentali. Uno di questi, che era in atto quando studiavo, era il "concorso pronostici" sulle partite di calcio di serie A. Così egli ne parla in *Chi sono io?*:

> [...] *Col medesimo intento di imparare ad usare valutazioni di probabilità, di abituare le persone a pensare e ragionare (e conseguentemente, comportarsi) in base a valutazioni (ragionate, ma naturalmente soggettive) di probabilità, è stato ripetuto per diversi anni all'Università di Roma un esperimento di pronostici probabilistici con riferimento ai risultati delle partite del campionato di calcio* [...] *secondo il mio punto di vista l'esperienza era educativa perché non solo non era basata sul banale e anti-educativo malvezzo del "tirare a indovinare" (come al Lotto e al Totocalcio), ma, al contrario,* ***obbligava a indicare la probabilità*** [dei diversi possibili risultati] ***numericamente*** [$p_1$, $p_2$, $p_x$]. (de Finetti A 1981b; si veda nel presente volume l'Appendice 1.8)

La classifica dei partecipanti era basata sulla funzione di penalizzazione ottenuta da ciascuno, per ciascuna partita, come una distanza euclidea al quadrato tra la valutazione di probabilità espressa (coerente secondo la definizione di de Finetti: $0 \leq p_i \leq 1$ e $p_1 + p_2 + p_x = 1$) e il risultato osservato (1,0,0 = vittoria della squadra 1; $0, 1, 0$ = vittoria della squadra 2 e 0,0,1 = pareggio); essa si può rappresentare geometricamente sul triangolo (Figura 2), ormai denotato "di de Finetti" in gran parte della letteratura, essendo stato da lui usato nel primo lavoro pubblicato quando aveva 20 anni (de Finetti A 1926). La **previsione** (altra parola chiave che ritorna nel ragionamento sull'induzione) relativa al risultato di una partita da parte di un partecipante all'esperimento, si rappresenta geometricamente come un punto P all'interno di un triangolo equilatero di altezza pari a 1, in modo che le lunghezze dei segmenti uscenti da P e perpendicolari ai lati, PA, PB e PC siano uguali ai tre valori delle probabilità, mentre i risultati possibili sono rappresentati dai tre vertici del triangolo. La funzione di penalizzazione è la lunghezza al quadrato del segmento che unisce P al vertice che si è verificato, per esempio $0, 1, 0$. Emerge sempre il saper vedere in matematica. Naturalmente è possibile dimostrare che "tirare a indovinare" (cioè, assegnare probabilità 1 a un risultato, e 0 agli altri due) ha una penalità *media* maggiore che non l'esprimere la probabilità che si attribuisce ai tre risultati (Rossi 1999). Per praticità, nel concorso pronostici che si svolse dal 1961 al 1969, si usava valutare la

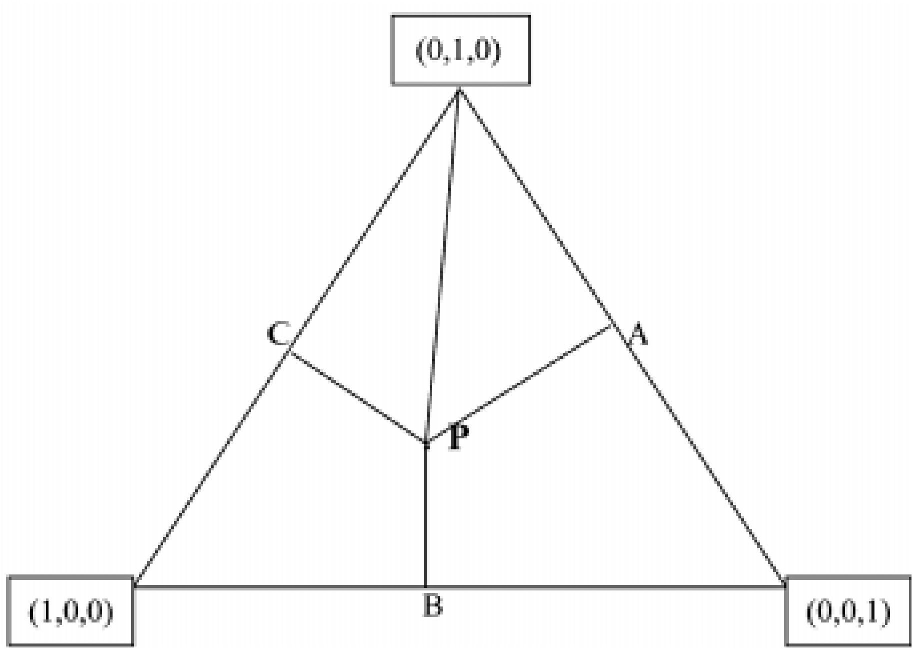


Figura 2. Triangolo di de Finetti per i pronostici calcistici in forma geometrica

probabilità in forma percentuale, come si può verificare nell'ampia documentazione relativa (http://digital.library.pitt.edu/u/ulsmanuscripts/pdf/31735033466487.pdf).

L'esperimento permetteva di far toccare con mano diversi aspetti fondamentali della probabilità e della sua valutazione. In particolare, questo esperimento esemplifica bene ciò che per de Finetti caratterizza la probabilità:

– la probabilità è *soggettiva* (ciò non toglie che una valutazione di probabilità possa essere anche ampiamente intersoggettiva); il soggetto che la valuta ha a disposizione alcune regole di *coerenza*, contravvenendo alle quali incorre in perdite certamente superiori al minimo possibile;
– ogni valutazione di probabilità dipende dall'*informazione* che si possiede; in altre parole è una "probabilità condizionata", concetto fondamentale;

- l'acquisizione di notizie (nell'esempio: quelle dovute ai risultati delle partite già effettuate; ma anche altre) fornisce ulteriori informazioni e permette di modificare la valutazione delle probabilità sugli eventi futuri; lo strumento analitico per questi calcoli è il teorema di Bayes; si possono anche efficacemente introdurre la probabilità a priori e la funzione di verosimiglianza;
- ogni nuova informazione (sulle partite effettuate, sulle squadre) influisce non solo insieme alle altre (alla fine del campionato; ovvero quando la ricerca è conclusa), ma anche singolarmente e dinamicamente, mediante il calcolo della sua verosimiglianza da combinare con la probabilità a priori (qui si ritrovano le basi teoriche per l'induzione e l'approccio bayesiano all'intera statistica!);
- una considerazione diversa, ulteriormente istruttiva, riguarda l'ordine di acquisizione delle informazioni sui risultati delle partite: per taluno può essere influente ai fini della valutazione delle probabilità per la prossima partita; per talaltro invece può non esserlo. Questo secondo caso corrisponde alla situazione di "scambiabilità" (inizialmente chiamata "equivalenza" da de Finetti), che, se verificata, agevola fortemente molte valutazioni di inferenza statistica. Infatti l'informazione globale che si possiede non dipende dall'ordine con cui si sono ottenute le singole informazioni dello stesso tipo che la costituiscono.

## 6. – Probabilità condizionate e induzione; centralità del concetto di evento contro la riduzione a aggregato di "casi elementari", che tali non sono mai; diagrammi di Venn

Il concetto di probabilità condizionata, centrale nel calcolo delle probabilità, è quello che lo caratterizza in modo specifico nell'approccio di de Finetti, rispetto a una pura e semplice branca della teoria della misura.

La probabilità, come qualsiasi altro concetto matematico, è uno strumento particolarmente utile a misurare le variazioni di una quantità in ragione delle variazioni di altre. Nel nostro caso: la variazione del grado di fiducia nel verificarsi di un evento in ragione delle variazioni dei nostri elementi conoscitivi e psicologici. L'induzione altro non è che il calcolo delle variazioni di probabilità.

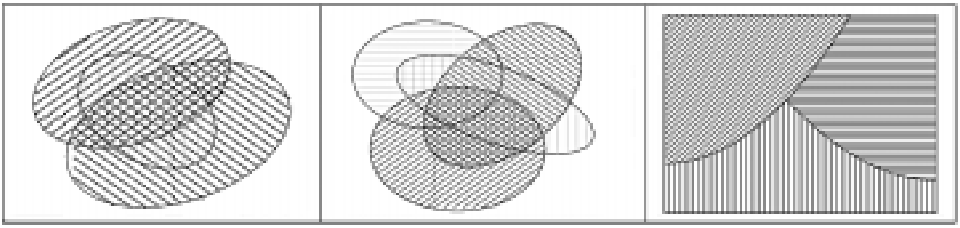

Figura 3. Diagrammi di Venn per l'unione e l'intersezione di più eventi e la scomposizione dell'evento certo nei costituenti (de Finetti L 1986)

Per capire la differenza fra l'approccio al calcolo delle probabilità di de Finetti e quello, tuttora più diffuso, basato sull'assiomatica di Kolmogorov (e conseguente riconduzione a teoria della misura), si possono utilizzare i "diagrammi di Venn" a cui de Finetti era affezionato e che usava sempre a lezione. Consideriamo i diagrammi in cui si rappresentano l'intersezione e l'unione di eventi e la scomposizione dell'evento certo nei costituenti, fondamentali da illustrare e capire bene (Figura 3).

Attraverso i primi due diagrammi è facile illustrare le proprietà base della probabilità a cominciare dall'unione di due o più eventi, la cui probabilità è data dalla somma di quelle dei singoli eventi sottratta la probabilità dell'intersezione di due, aggiungendo l'intersezione di tre. Ciò permette di definire esattamente la probabilità dell'intersezione come probabilità condizionata ad A di B, moltiplicata per la probabilità di A prima del suo verificarsi, sicché non risulta necessario introdurre una "autonoma" definizione di probabilità condizionata, formale ma senza un significato costruttivo, tramite l'espressione analitica

$$P(B \mid A) = P(AB)/P(A).$$

Una tale definizione fornita come se fosse autonoma dal resto impedisce agli studenti di capire fino in fondo il significato fondamentale dell'evento condizionante e della stessa probabilità condizionata, e anche quello di indipendenza.

Se, guardando i diagrammi di Venn, si interpreta la probabilità come area, è immediato anche derivare la formula suddetta. Analogamente si ricava subito la formula della probabilità dell'unione per casi diversi.

Per quanto riguarda gli eventi costituenti, de Finetti insisteva molto su di essi, perché sono utilissimi per la probabilità totale, per il teorema di Bayes e le applicazioni statistiche. È sempre fondamentale esplicitarli per evidenziare la necessità di considerare tutte le possibilità osservabili per un evento di interesse abbastanza complesso. Questo succede per esempio nelle decisioni diagnostiche. Si sente, ahimé, parlare di errori medici dovuti ad eventualità trascurate.

La teoria delle probabilità condizionate e il teorema di Bayes hanno un'ampiezza applicativa come poche altre teorie: su di esse si basa tutta l'induzione (o Inferenza, come si usa dire in ambito statistico) e cioè, in sostanza, tutta la Scienza. Non a caso, insieme ai colleghi statistici, ho chiamato INDUZIONI la rivista fondata per la didattica della probabilità, della statistica e della demografia, che ha ripubblicato diversi articoli didattici di de Finetti.

La **logica induttiva**, che regola le variazioni di probabilità conseguenti a nuove informazioni, è il legame fondamentale tra la probabilità e la statistica inferenziale, considerate spesso congiuntamente da de Finetti nel suo approccio fusionista. Si tratta di una logica che, in modo intuitivo ma non particolaristico, si può far emergere dall'esperimento dei pronostici sul campionato di calcio. L'induzione e i fondamenti dell'inferenza statistica facevano parte del corso di calcolo delle probabilità di de Finetti: il capitolo 11 di *Teoria delle probabilità* si intitola *Ragionamento induttivo; inferenza statistica*. Già dal titolo si capisce il legame tra statistica e probabilità e infatti il capitolo inizia così:

> *La forma di ragionamento valida nell'ambito della logica del certo, ossia della logica propriamente detta, è quella del ragionamento deduttivo. Non si può giungere, col ragionamento, a conclusioni certe se non provando che sono incluse in cose già note, ossia facendo scendere il particolare dal generale. Ma è anche evidente che, in questo modo, non si può mai giungere ad allargare il campo delle nostre conoscenze (salvo nel senso di rendere esplicita qualche conoscenza implicitamente acquisita, ma rimastaci inavvertita).*
>
> *Quello che porta a concludere, partendo da ciò che si sa o che si è accertato, qualcosa che vada oltre, è soltanto il cosiddetto ragionamento induttivo*; [...]. *Il campo dell'induzione si estende in ogni ambito e ad ogni livello: dal vaglio pro e contro l'attendibilità di diverse teorie scientifiche o pro e contro la colpevolezza di questo o quell'indiziato di un crimine, ai metodi per stabilire in base all'osservazione le condizioni per determinati tipi di assicurazione e a quelli per ottenere valutazioni adeguatamente precise di una grandezza mediante misure inevitabilmente imprecise.* (de Finetti L 1970, p. 559)

Particolarmente istruttivo è pensare al processo con cui nuove *ipotesi* o *teorie* scientifiche vengono formulate in base a intuizioni suggerite da qualche particolare circostanza osservata, che possiamo definire *fatto,* e poi discusse, spesso con alterne vicende, in base a *nuove risultanze* da confrontare con le *previsioni* offerte dalla teoria. Questo procedimento è quello applicato in fisica da Galileo per la legge dell'isocronia del pendolo, avendo osservato l'oscillazione dei lampadari del duomo di Pisa.

Seguendo i suggerimenti di de Finetti sugli ambiti di applicazione del ragionamento induttivo, ho scelto a fini didattici due esempi facilmente utilizzabili: una teoria scientifica, quella di Darwin sulla formazione degli atolli, e il giudizio di Salomone (La Bibbia, 3º Re). Non riporto qui il primo esempio (Rossi 1999), ma il secondo è importante e semplice soprattutto a fini didattici.

**Il giudizio di Salomone (sintesi)**

*In quel tempo vennero due donne meretrici al re. Una di esse disse: "io e questa donna abitavamo nella medesima casa, e io partorii presso di essa nella stessa stanza. Tre giorni dopo che io ebbi partorito, anche costei ebbe un figliolo. Ora morì il figliolo di questa donna durante la notte. Levatasi allora nel cuor della notte, di nascosto tolse il mio figlio dal fianco della tua ancella, che dormiva, e se lo collocò sul suo seno, mentre il suo figlio, che era morto, lo pose sul mio seno. Il mattino, lo vidi morto; ma avendo guardato con maggior diligenza alla luce del giorno, m'accorsi che non era quello che io aveva generato". L'altra donna rispose: "Non è vero quanto tu dici, ma il figlio tuo è morto; il mio vive"* [...] *e così litigavano alla presenza del re.*
*Allora il re disse: "Portatemi una spada". Quando ebbero portata la spada, egli soggiunse: "Dividete il bambino vivo in due parti e datene una metà all'una e una metà all'altra". La donna, madre del figlio vivo, disse al re: "Te ne scongiuro, o signore, dà a lei il bambino vivo e non volerlo uccidere". Al contrario l'altra diceva: "Non sia né mio, né tuo, ma sia diviso". Rispose allora il re e disse: "Date a costei il bambino vivo e non si uccida, poiché costei è la vera madre".*
*Tutto Israele seppe del giudizio e temette il re, vedendo che la sapienza di Dio era in lui per amministrare la giustizia.*

Si tratta di *statistica forense bayesiana*, usata da Salomone seguendo un paradigma logico induttivo che può essere così schematizzato:

- Donna A e Donna B inizialmente equiprobabili come madri.

Poi, dal teorema di Bayes:

- P (A è la vera madre | A accetta la suddivisione del bambino) = = K × P(A è la vera madre) × P (Accetta la suddivisione del bambino | A è la vera madre).

Il valore di P(A accetta la suddivisione del bambino | A è la vera madre) è per Salomone pari a 0, quindi la decisione implica l'esclusione di A e la restituzione del figlio a B.

Tutto si riduce, allora, alla nozione e alla valutazione di probabilità condizionate e all'utilizzo dello schema induttivo di Bayes per incorporare ogni nuova informazione acquisita recuperando informazioni già esistenti (dati osservazionali) oppure effettuando nuove prove (dati sperimentali); l'esempio di Salomone rientra in questo secondo caso. Il ragionamento induttivo è tutto qui. Esso indica come imparare dall'esperienza, consentendo di aggiornare le nostre **previsioni** su fatti non osservati, cioè realizzazioni di "eventi": schema al quale, con opportune formulazioni, sono riconducibili anche la teoria corretta dell'apprezzamento ("test") di ipotesi e delle valutazioni ("stime") di numeri aleatori. L'esperienza non insegna a creare dal nulla un'opinione, ma soltanto ad aggiornare un'opinione precedentemente formulata. Chi partisse "senza nessuna opinione", neppure vaghissima, non potrebbe far nulla! Ed è ovvio; non capirebbe neppure di cosa si sta parlando!

L'esperimento definettiano dei pronostici calcistici permette di introdurre tutti i concetti base. In particolare, insegna che opinioni iniziali anche molto vaghe, per esempio "per me, che non conosco la forza di tutte le squadre di serie A, i tre risultati possibili di ogni partita sono equiprobabili", gradualmente possono modificarsi, seguendo la regola di Bayes, in seguito ai primi risultati acquisiti. Non solo: se l'opinione iniziale è molto vaga, come la precedente, le modifiche sono subito molto rilevanti, visti i primi risultati; le modifiche invece sono meno importanti se l'opinione iniziale è più marcata. A lungo andare, l'esperienza finisce per prevalere su qualunque opinione iniziale ... tranne il caso in cui l'opinione iniziale sia così marcata da assegnare probabilità 0 a un certo evento; in tal caso, *nessuna* evidenza acquisita potrà più modificare quello 0! L'esperimento calcistico è estremamente istruttivo, a tal proposito.

Il risultato di un'induzione di rado permette di decidere deterministicamente per un'ipotesi; nel migliore dei casi, se un fatto osservato risulta incompatibile con qualche ipotesi, come la probabilità pari a zero nel giudizio di Salomone, si può escludere qualche ipotesi con certezza, ma non si può mai essere certi, nell'accettare una spiegazione plausibile, che non ce ne sia un'altra plausibile anch'essa, magari meno dell'altra.

In *Probabilismo* (de Finetti 1931) de Finetti sottolineava come la nozione di **previsione** consentisse di uscire dal "ferreo dilemma" ("o distruggere la Scienza o negare alla logica la pretesa di informare di sé la Scienza"): essa non comportava, infatti, di "rinunciare alla Scienza"; bensì imponeva di "assumere come strumento fondamentale del pensiero scientifico, in luogo della logica ordinaria, categorica, rigida, fredda, una logica viva, elastica, psicologica": la logica induttiva.

## 7. – Modelli matematici in situazioni reali di incertezza: genetica di popolazioni

L'esperimento calcistico serviva a de Finetti per introdurre anche l'idea di modello matematico della realtà, di cui si era magistralmente servito già nel suo primo lavoro (de Finetti, 1926). Là il ventenne de Finetti, ancora studente, usava un modello matematico deterministico, basato sulla previsione della media di un fenomeno aleatorio, che più tardi sarebbe stato classificato nella "genetica di popolazioni". In tale campo, per impostare le equazioni, si fa uso di valutazioni di probabilità effettuate sia con lo schema classico (casi favorevoli/casi possibili: genetica mendeliana) sia con quello frequentista (frequenza "limite": distribuzione dei geni in una popolazione numerosa).

Dato che la genetica di base è abbastanza nota a tutti, il suo primo modello può essere utilizzato per introdurre concetti matematici e probabilistici anche ai profani. Consente di introdurre due tipi di valutazione di probabilità, facendo capire quando si possono utilizzare. Soprattutto, è possibile illustrare le equazioni differenziali con importanti risultati, mostrati geometricamente come traiettorie nel triangolo di de Finetti, modernamente utilizzato anche da ricercatori in genetica a livello internazionale (Fonteneau et al. 2008). La rappresentazione tramite triangolo, appresa da de Finetti studiando la chimica, era stata da lui introdotta nel 1926 proprio in quel primo lavoro che riguardava la genetica-matematica o genetica di popolazioni. Il modello matematico si basava su un sistema di equazioni differenziali non lineari per la diffusione di caratteri ereditari, determinati da un paio di alleli autosomici in un *locus*, in una popolazione con accoppiamento mendeliano panmittico (*random mixing*, che presuppone la valutazione frequentista della probabilità di coppia e la valutazione classica per la distribuzione dei geni nei figli). Il triangolo veniva utilizzato per illustrare graficamente le principali proprietà del modello e le traiettorie, dipendenti solo dal punto iniziale, assegnato con valutazione di probabilità frequentista. Immediatamente dopo de Finetti pubblicò due altri lavori (de Finetti A 1927a, A 1927b e de Finetti A 1928) che generalizzavano il modello per situazioni non panmittiche, permettendogli alcune congetture sull'andamento asintotico del fenomeno (dimostrate in parte 50 anni dopo). Tra l'altro, il suo primo modello del 1926 dimostrava una relazione fondamentale della genetica, nota come legge di Hardy-Weinberg, che veniva ricavata negli stessi anni con modelli molto più restrittivi, per generazioni anziché nel tempo. La parabola di Hardy-Weinberg appare nel triangolo del 1926 (Figura 4) dove il punto $(x,y,z)$ rappresenta un punto di equilibrio sulla parabola, intermedio tra $p_1$ e $p_2$, mentre la semplice media dei due punti starebbe sul segmento che li unisce. Naturalmente dal punto di vista genetico i punti, che rappresentano la composizione della popolazione, sono espressi in coordinate baricentriche con somma 1. I vertici del triangolo rappresentano le popolazioni che contengono solo uno dei tre possibili genotipi.

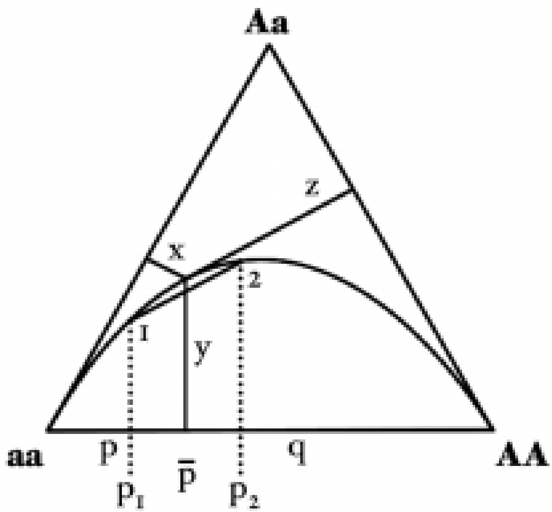


Figura 4. Triangolo di de Finetti nel lavoro de Finetti A 1926

Purtroppo questi suoi contributi alla genetica di popolazioni rimasero sconosciuti all'estero (per la lingua in cui erano scritti).

Nel 1973 de Finetti fu invitato dal suo amico genetista Giuseppe Montalenti a riprendere quei lavori e a presentarli al *Colloquio su Genetica di popolazioni* che stava organizzando. Poiché non si accontentava di presentare semplicemente i suoi vecchi lavori e risultati, mi coinvolse suggerendo alcune generalizzazioni dei modelli, che presentammo presso l'Accademia Nazionale dei Lincei (de Finetti, Rossi 1976) ([4]). Per illustrare risultati nuovi al pubblico, molto misto ma soprattutto di formazione genetica, all'Accademia dei Lincei de Finetti produsse per i diversi tipi di modello un grafico doppio che, ancora una volta, mette in luce il suo interesse a rendere agevole a chiunque (anche profano) la comprensione del

([4]) In seguito ho continuato a lavorare su questo argomento per qualche anno e finalmente ho avuto l'opportunità di portare all'estero i suoi lavori, dimostrando che quello che si stava sviluppando in quegli anni (anni '70) nel mondo, con modelli con generazioni sovrapposte, rappresentati da equazioni differenziali, anziché da equazioni alle differenze dei modelli per generazioni, era già stato pensato e scritto in Italia da 50 anni.

Carla Rossi e Bruno de Finetti all'Accademia dei Lincei il giorno della presentazione del lavoro comune sulla genetica di popolazioni

suo pensiero mediante rappresentazioni geometriche (de Finetti, Rossi A 1976g, p. 30 e 31).

Nella genetica di popolazioni si usano prevalentemente modelli deterministici, ma nei lavori di de Finetti emerge il loro fondamento, consistente nel considerare la media di processi aleatori in popolazioni ampie, in cui si può trascurare la semplice fluttuazione stocastica, come per esempio la cosiddetta deriva genetica, che emerse nelle osservazioni di Darwin sulle caratteristiche (successivamente attribuite a fattori genetici) osservate sulle popolazioni animali isolate in piccole isole.

## 8. – Modellizzazione del processo di produzione dei dati; la scambiabilità e l'inferenza

La **scambiabilità** è un altro concetto definettiano molto importante e utile per schematizzare i fenomeni. Tutti i fenomeni sono, a rigore, differenti e irriducibili gli uni agli altri ("Non ci si può bagnare due volte nello stesso fiume", Eraclito, V secolo a.C.).

La condizione di scambiabilità consiste nel considerare equivalenti e indipendenti dall'ordine le informazioni raccolte. Può essere "parziale" (es.: *trial* clinici condotti su pazienti raggruppabili in base al sesso, all'età, ecc.); in tal caso, la casistica si amplia moltissimo rispetto al caso di scambiabilità "totale"; purtroppo crescono anche enormemente le difficoltà analitiche, come de Finetti riconosceva. Tutta la sperimentazione di nuovi farmaci e nuove terapie si fonda sulla scambiabilità parziale.

Posto dunque che, per fare inferenza, ci siamo posti in un contesto di scambiabilità, si presenta ora un'altra questione: quand'è che l'accumulo di nuove conoscenze diventa "adeguato"? Intanto, va precisato, adeguato a che cosa? In generale: adeguato a una decisione, tenuto anche conto di costi e tempi dell'acquisizione di informazione.

Nel libro *Teoria delle probabilità* c'è un bellissimo passaggio, conosciuto in tutto il mondo, anche se la traduzione inglese (de Finetti L (1970) 1975) ha qualche debolezza per quanto riguarda parole originali e innovative.

Riguarda la necessità della statistica classica di basarsi su "numerose" osservazioni analoghe per poter produrre inferenze adeguate, quasi si potesse evitare di farsi influenzare da ogni singola informazione ottenuta dinamicamente:

> [...] *si tratterebbe di una proprietà legata all'esistenza di un mucchio: finché si hanno pochi oggetti essi non costituiscono un mucchio e nulla si potrebbe concludere, ma se sono molti il mucchio c'è e allora, ma soltanto allora,tutto il ragionamento fila. Se si pensa di aggiungere un oggetto per volta, nulla si potrà dire finché il numero è insufficiente per formare un mucchio, e la conclusione balzerà fuori (d'improvviso? Passando da 99 a 100? o da 999 a 1000?...!) quando finalmente il nonmucchio si trasforma in mucchio. No, si dirà; questa versione è caricaturale; non c'è un salto netto, bensì sfumato; il nonmucchio attraverserà una fase di forsechesìforsechenomucchio da piùforsechenocheforsechesìmucchio a piùforsechesìcheforsechenomucchio e solo poi diverrà gradualmente un vero mucchio. Ma ciò non toglie il difetto d'origine, cioè la distinzione,*

> *concettualmente posta come fondamentale, tra «effetto di massa» e «effetto dei singoli elementi»; il riconoscere che non può esistere una separazione netta, se elimina forse, apparentemente, una circostanza paradossale, non ne estirpa la radice ed anzi mette in luce la debolezza e contraddittorietà del concetto di partenza.* (de Finetti L 1970, p. 570)

Per gli studenti, la comprensione di questo discorso derivava in modo abbastanza immediato, dall'esperimento sul campionato di calcio. Come si vede dal testo, de Finetti spesso inventava termini linguistici nuovi ed efficaci per aiutare la comprensione di concetti e la memorizzazione, oltre che utili per la divulgazione, suscitando l'attenzione del pubblico. Si può pensare alle parole: *burofrenia scolastica*, *imbecillocrazia*, *trinomite* e tante altre.

Tornando all'esperimento calcistico, si può dire che è possibile utilizzarlo anche oggi; soprattutto andrebbe svolto nella scuola media, anche inferiore, e permetterebbe di introdurre la probabilità concretamente e correttamente.

L'inferenza statistica "classica" e quella definettiana (bayesiana "rigorosa") presentano importanti aspetti comuni, ma anche differenze che, soprattutto nelle situazioni di "scarse" evidenze empiriche, possono diventare rilevanti. Per esemplificarle, senza eccessiva perdita di generalità, ci si può riferire allo schema delle "prove ripetute" (misure di laboratorio, sondaggi su campioni di popolazione, estrazioni da urne, ecc.). Sono le situazioni in cui le diverse prove, prima che siano effettuate, sono fra loro equivalenti quanto a contenuto informativo e per le quali, in particolare, non conta l'ordine di acquisizione dei risultati: ogni permutazione dell'$n$-pla dei dati osservati è equivalente ai fini della soluzione del problema inferenziale. Sono le situazioni di "*scambiabilità*", nella terminologia di L.J. Savage, adottata da de Finetti; chiamate invece, in modo distorto e scorretto, di "*indipendenza*", nella terminologia classica.

Nel trattare questo caso, qualunque sia l'approccio inferenziale, c'è un fase iniziale (fase "diretta") di *modellizzazione del processo di produzione dei dati* (fatti osservabili). Per questa operazione non esistono regole: è sempre un'arte, un momento di creatività, corrispondente a quello della scelta degli assiomi in una teoria matematica nuova. Nella costruzione dello schema, non ci sono reali differenze fra l'approccio classico e quello bayesiano. Però c'è già una differenza concettuale nella tecnica: nell'approccio classico, sono centrali i *parametri*, cioè i coefficienti delle relazioni simboliche che costituiscono il modello; i dati osservati sono considerati *"indipendenti"* essendo i parametri considerati sconosciuti, ma non aleatori. Nell'approccio bayesiano, la centralità resta per i dati osservabili, che sono numeri *aleatori*, prima di essere osservati, e sono detti *scambiabili* proprio a significare che *non sono indipendenti* poiché, man mano che alcuni di essi vengono osservati, la distribuzione degli altri varia.

La fase successiva dell'inferenza (fase "inversa"), nell'impostazione classica procede con la *"'identificazione" del modello,* attraverso la *stima* dei parametri. La si svolge mediante l'*ottimizzazione di opportuni indicatori*, che misurano l'adeguatezza del modello a rappresentare i dati effettivamente osservati. Nell'impostazione classica i parametri sono quantità in qualche modo "oggettive", anche se non osservabili. Nell'impostazione di de Finetti, al contrario, l'attenzione resta centrata sui dati già osservati e su quelli futuri, osservabili. I parametri, ammesso che vengano introdotti, sono anch'essi numeri *aleatori* (essendo sconosciuti), che tali sempre resteranno, strumentali, e come tali vengono trattati.

Il fondamentale "teorema di rappresentazione di de Finetti", dimostrato per la prima volta nel 1928, chiarisce peraltro che, sotto ipotesi abbastanza generali, la condizione di scambiabilità è rappresentabile attraverso una cosiddetta "mistura" (combinazione lineare probabilistica) di situazioni di "indipendenza subordinata alla conoscenza dei parametri" di tipo classico. Lo schema della scambiabilità attraverso misture è enormemente più generale e flessibile di quello classico, senza precludere la possibilità di ricondursi ad esso attraverso l'adozione di opportune assunzioni restrittive (anche molto restrittive) sulla composizione della mistura.

**Teorema di de Finetti (come esteso da Hewitt e Savage):**

*(Nota: nella versione originale di de Finetti, il teorema è riferito al caso di numeri aleatori a esito 0-1, cioè a "eventi".)*

*Se* $X_1, X_2, ... X_k ...$ formano una successione di infiniti numeri aleatori scambiabili, la distribuzione congiunta di $n$ fra essi può essere rappresentata come combinazione lineare convessa (detta "mistura") delle distribuzioni di $n$ numeri aleatori "condizionatamente indipendenti" alla conoscenza di un "parametro"; il parametro è da intendersi come quantità aleatoria θ (scalare in $\mathrm{R}^1$ o vettoriale in $\mathrm{R}^n$), la cui distribuzione fornisce i pesi nella mistura. In particolare, nel caso in cui la distribuzione degli $n$ numeri aleatori sia dotata di densità si ha

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{\Theta} \prod_{i=1}^{n} f(x, |\theta) p(\theta) d\theta$$

**e conseguenza statistica fondamentale:**

dopo aver osservato i dati del campione, la distribuzione a posteriori è:

$$g(\theta | x_1, x_2, ..., x_n) \propto \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta) p(\theta)$$

e la densità predittiva per una nuova osservazione $Y$ della stessa natura delle $X$ è:

$$h(y | x_1, x_2, ..., x_n) \propto \int_{\Theta} f(y | \theta) g(\theta | x_1, x_2, ..., x_n) d\theta$$

De Finetti trattava le misture nel suo corso, e io ho avuto modo di apprezzarne la potenza in varie situazioni di ricerca. È quindi molto importante trattarle nell'insegnamento della probabilità, almeno a livello universitario. È anche utilissimo per la teoria delle decisioni, anch'essa accennata nel suo corso.

Pertanto, anche se i parametri, come le ipotesi, sono enti non osservabili, ci si può riferire ad essi per ottenere una rappresentazione valida che esprime la probabilità dei futuri eventi o dati futuri osservabili.

Questo contesto predittivo definettiano è la base dello sviluppo del "prequential probability approach", che si basa sull'idea che "we can judge the quality of an inference method by converting it into a forecasting system and assessing the empirical success of the sequence of one-step-ahead forecasts that it implies" (Dawid, Vovk 1999, p. 126); come si vede, si parla di previsione nello stile di de Finetti.

Se i parametri sono letti come numeri aleatori, la loro "stima" è rimpiazzata dalla valutazione della distribuzione, o di qualche suo indice sintetico. Valutazione che avviene applicando il teorema di Bayes, cioè partendo da una distribuzione iniziale che si modifica proporzionalmente alla verosimiglianza dei dati via via osservati. Questo approccio è stato sviluppato inizialmente da Dennis Victor Lindley ed è ormai abbastanza diffuso, in varie forme talvolta discutibili; si avvia a diventare quello prevalente. Pur apprezzando gli sforzi in tal senso, de Finetti non si stancò mai di ricordare l'elemento di artificio che vi è contenuto e soprattutto mise sempre in guardia dal conferire eccessivo valore alle valutazioni dei parametri, rammentando che gli elementi osservabili, i dati, devono sempre restare al centro di ogni analisi. A essere davvero rigorosi, non ha senso valutare la probabilità di un parametro non osservabile direttamente, ma la probabilità va attribuita ad un evento futuro sulla base degli eventi osservati. Niente di nuovo rispetto a quello che de Finetti insegnava con l'esperimento sul campionato di calcio: quello che davvero serve valutare non è il "valore di una squadra" (il parametro), ma le probabilità dei risultati di una specifica partita!

È molto istruttivo rileggere *La probabilità: guardarsi dalle contraffazioni!* (de Finetti A 1976f; si veda l'Appendice 1.7 nel presente volume), il testo della "ultima lezione" tenuta da de Finetti, in occasione del collocamento fuori ruolo, all'Istituto Matematico Guido Castelnuovo in Roma il 29 novembre 1976.

## 9. – De Finetti e il relativismo di Pirandello; coerenza interna e assiomatica matematica

Il fusionismo culturale di de Finetti emerge anche considerando la sua originale visione dell'opera di Pirandello, che lui amava molto e con cui aveva sorprendenti affinità culturali, come dimostra il primo degli "Incontri tra Arte e Scienza: dalla logica pirandelliana al relativismo di de Finetti", tenutosi a Monte Compatri il 15 dicembre 2007 ([5]).

A un anno dalla morte di Pirandello de Finetti scriveva in un articolo del 5 dicembre 1937, sulla rivista *Quadrivio*:

> *Considero Pirandello come uno dei più grandi spiriti matematici; così dicevo a un collega nel giorno della sua morte, e tale affermazione mi parve accolta con meraviglia. Ed essa non può infatti non sembrare paradossale se, cullandosi nelle inveterate illusioni razionalistiche, si considera la matematica come un complesso di verità assolute che col relativismo pirandelliano sarebbe addirittura agli antipodi.* (de Finetti A 1937b, http://digitale.bnc.roma.sbn.it/tecadigitale/rivista/RML0034377/1937/Dicembre%20n.%206/7

Le "inveterate illusioni razionalistiche" a cui accenna de Finetti sono le concezioni della matematica di derivazione platonica e kantiana, dove, per esempio, la geometria euclidea è l'unica possibile; de Finetti attribuisce a Pirandello uno 'spirito matematico' perché nessuno prima di lui aveva voluto "dare una rappresentazione drammatica più perfettamente aderente al pensiero del matematico" attraverso i suoi "lavori [...] in cui ogni personaggio procede sino in fondo colla sua logica, magari allucinante, ma tuttavia strumento tagliente e perfetto che nulla può sulla logica altrui se è diversamente impostata" (de Finetti A 1937b).

Il parallelismo con l'assiomatismo matematico è molto evidente: ogni personaggio pirandelliano ha la sua verità. I personaggi pirandelliani sono, dunque, la trasposizione sulle scene teatrali di altrettanti e diversi 'sistemi assiomatici', ciascuno fondato su premesse differenti e sviluppato deduttivamente. La verità di ogni personaggio va valutata

([5]) Cfr. http://terzadecade.it/download/probabilmente_de_finetti/20%20-%20Pirandello%20e%20de%20Finetti%20-%20Atti%20del%20Convegno%20di%20Monte%20Compatri%202007.pdf.

al pari della verità in un sistema ipotetico-deduttivo, e Pirandello sostituisce alla verità unica ed eterna la pluralità mutevole delle verità soggettive degli uomini.

L'influsso di Pirandello si ritrova anche meglio in un articolo di de Finetti che nel titolo richiama i *Sei personaggi in cerca d'autore.* Si tratta di *Tre personaggi della Matematica* apparso su *Le Scienze* (de Finetti A 1971b) con sottotitolo: *Perché i numeri e, i, π s'incontrano in matematica strettamente uniti?* La risposta che diede a chi gli chiedeva conferma di tali origini del titolo del suo articolo rivela, in maniera molto elegante e sottilmente polemica, la critica ch'egli oppose durante tutta la vita, con irriducibile passione, alla "contraffazione involontariamente umoristica, scostante, repellente" della matematica negli ambienti scolastici e nella società:

> *E certamente – ammisi – c'è una reminiscenza della magia pirandelliana di evocare i suoi personaggi, essenziali, veri, reali, ma troppo veri per non essere considerati da spettatori grossolani come fantocci, simboli, fantasmi. Ed è forse per lo stesso motivo che molti non comprendono e non apprezzano la matematica, e che molti non riescono a farla comprendere e farla apprezzare. Forse non per inettitudine o cattiva volontà, ma per la preoccupazione di farla apparire come una cosa più che seria, seriosa, arcigna, superba, il che non è un gradino più alto della serietà, ma la sua contraffazione involontariamente umoristica, scostante, repellente.* (F. de Finetti, L. Nicotra 2008, p. 219)

## 10. – Criteri economici: coerenza e massimizzazione dell'utilità sperata; problema del giornalaio per insegnare bene la probabilità con la teoria delle decisioni

Le decisioni, questione centrale in ogni aspetto del vivere, trovano il loro più facile ambito di discussione trattando di economia, intesa come calcolo dei "costi" e "benefici" (incerti!) di un'azione. Certo, soprattutto quando i valori in questione non sono monetari, le cose non sono scontate. Però, è indiscutibile, qualunque soggetto (persona, corpo collettivo, animale) in qualche modo decide; dunque, possiamo ritenere che si faccia un calcolo, magari molto implicito, dei valori dei diversi esiti possibili e della loro probabilità. Se il pregio fondamentale della scienza, come sembra ormai riconosciuto, è la sua trasparenza operativa, ne consegue che l'esplicitazione e la ponderazione dei valori in gioco è comunque esercizio utile, soprattutto in un contesto collettivo. Le decisioni in ambito economico-finanziario sono comunque le più agevoli da tradurre in linguaggio matematico, dunque è utile partire da esse per esemplificare l'intera vastissima problematica.

Appassionato e influenzato dall'economia fin da giovanissimo e lungamente impegnato professionalmente in campo assicurativo, de Finetti riteneva essenziale che tali concetti fossero familiari a tutti. Come logica conseguenza, i suoi corsi di calcolo delle probabilità comprendevano anche elementi ed esempi di teoria delle decisioni, importanti anche solo per ben comprendere la probabilità. Così spiegava nel libro *Il "saper vedere" in Matematica*:

> *Vi sono molte occasioni in cui molti ragionano male perché non conoscono i concetti probabilistici e statistici. Ma spesso accade anche che, in queste stesse occasioni, molti altri ragionino male perché hanno appreso dei concetti probabilistici e statistici comprendendoli male o comunque fraintendendoli quanto basta per applicarli male.*
>
> *In questa tendenza ad errare ad ogni costo si può certamente ravvisare (come ha notato acutamente uno psicologo, John Cohen) un effetto dell'avversione all'incertezza: o uno non applica i concetti che esprimono l'incertezza (probabilità, statistica), oppure li applica forzandone l'interpretazione in modo da trasformare previsioni incerte in predizioni certe o da ricavarne grazie ai più strani fraintendimenti conclusioni gratuite o distorte.*
> (de Finetti L 1967, p. 52; si veda l'Appendice 1.4 nel presente volume)

Prosegue facendo un esempio concreto di tipo matematico per spiegare il concetto di guadagno sperato: "nella preferenza fra decisioni economiche alternative, le cui conseguenze sono incerte, il criterio logicamente **coerente** (per chi si prefigge il guadagno; eventuali altri scopi andrebbero se del caso valutati come equivalenti, per l'interessato, a un certo guadagno) sta nella scelta fatta in modo da avere il massimo **guadagno sperato**; criterio che va corretto (se gli importi in gioco sono rilevanti) in quello di render massima l'**utilità sperata** (ove l'utilità di un guadagno grande si valuti meno che proporzionalmente accresciuta per tener conto dell'avversione al rischio)" (p. 53).

Trascurando la questione dell'utilità, possiamo esprimere il "guadagno sperato" di una scelta a esito aleatorio con la formula:

Guadagno sperato = (Probabilità di avere un Guadagno) × (Valore medio dell'eventuale Guadagno) – (Probabilità di avere un Costo) × (Valore medio dell'eventuale Costo).

Questa formula consente già alcune considerazioni operative, semplici ma non banali, che de Finetti riprendeva spesso nei suoi corsi.

Se due azioni hanno guadagni simili, conta la loro probabilità (*idem* scambiando i due termini); quindi, sono inutili approfondimenti minuziosi (e magari costosi) della grandezza meno influente e sono invece necessari quelli dell'altra! (Una considerazione quasi ovvia per chi ha un minimo di basi matematiche; ma che pare non esserlo affatto, talvolta, per le burocrazie e le autorità politiche).

Poi, in molti casi applicativi, guadagno totale e costo totale derivano da una serie di componenti abbinate. In tal caso la soluzione può semplificarsi e chiarirsi molto confrontando tali coppie di componenti; de Finetti fa un esempio concreto e facile in una sua lezione di "teoria delle decisioni per giovani ricercatori" (1964): il "problema del giornalaio". Questi deve decidere quante copie ($X$) acquistare, a un prezzo dato $C$, per rivenderne un certo numero (aleatorio) $N$, a prezzo $G$ (maggiore di $C$). Si può esplicitare l'intera distribuzione di $N$ e eseguire calcoli potenzialmente lunghi. Ma è molto più semplice, e perfettamente corretto, ragionare in termini "marginali": detta $p_X$ la probabilità di vendere almeno $X$ copie, converrà acquistare la $X$-esima copia se e solo se $p_X \times G > C$. Qui de Finetti innesta un'altra considerazione a proposito della valutazione (soggettiva!) delle probabilità:

> *Il giornalaio avrà un'esperienza, ma potrà ad es. ritenere o no significativa la manifestazione di una tendenza recente all'aumento, o avrà motivi particolari per attendere minori o maggiori richieste nel caso particolare di "domani", e via dicendo: Imparare praticamente, esercitandosi, a saper apprezzare i gradi di probabilità ed esprimere meditatamente le proprie valutazioni in fatto di probabilità, sarebbe una delle più preziose conquiste di un progresso nell'educazione: il senso del ragionamento probabilistico è infatti, come detto, deplorevolmente manchevole e distorto se non si ha cura di coltivarlo e affinarlo.* (de Finetti L 1967, p. 54; si veda l'Appendice 1.4 nel presente volume)

Con questo esempio semplice ma concreto e efficace, nel suo stile, concludo questo ricordo del mio Maestro. E ribadisco qual è stato, per me, il cuore del suo insegnamento matematico, formale e informale: immaginare traduzioni di questioni pratiche in schemi di analisi, conferendo dunque un primato all'intuizione e alla comprensione dei meccanismi essenziali dei fenomeni; è la creatività, caratteristica umana per eccellenza, in matematica e in qualsiasi altro campo.

*Ringraziamenti.* – Ringrazio tutti gli allievi di de Finetti con cui ho avuto occasione di parlare spesso in tutti questi anni e, in particolare, Fabrizio Fabi per i suoi contributi a questo lavoro e la revisione del testo. Un ringraziamento particolare a Fulvia de Finetti, che mi ha fornito molte informazioni importanti.

## BIBLIOGRAFIA

de Finetti, F. (2000), Alcune lettere giovanili di B. de Finetti alla madre, *Nuncius*, XV, 2, 721-740.

Bischi, G.I. (2011), *A tutto tondo. Un ritratto di Bruno de Finetti (attraverso interviste e testimonianze*, http://matematica.unibocconi.it/sites/default/files/urbino2011/Bischi_de_Finetti_Pristem_Aprile2011.pdf.

Cousin, A., Di Bernardino, E. (2013), On multivariate extensions of Value-at-Risk, *Journal of Multivariate Analysis,* http://arxiv.org/abs/1111.1349.

Dawid, A.P., Vovk, V.G. (1999), Prequential probability: principles and properties, *Bernoulli*, 5.1, 125-162.

Fonteneau, A., Chassot, E., Ortega-Garcia, S., Delgado de Molina, A., Bez, N. (2008), On the use of de Finetti ternary diagrams to show the species composition of fee and FAD-associated tuna schools in the Atlantic and Indian oceans, *IOTC-2009-WPTT*-2008, http://www.brunodefinetti.it/Bibliografia/IOTC2009.pdf.

Hewitt, E., Savage, L.J. (1955), Symmetric measures on Cartesian Products, *Transaction of the American mathematical Society*, 80, 470-501.

Quételet, L.A.J. (1846), *Lettres sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques*, Bruxelles: M. Hayez.

Rossi, C. (1973), Sulle curve di livello di una superficie di probabilità in due variabili, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 87-108.

Rossi, C. (1999), *La matematica dell'incertezza: didattica della probabilità e della statistica*. Bologna: Zanichelli.

Rossi, C. (2001), Bruno de Finetti: the mathematician, the statistician, the economist, the forerunner, *Statistics in Medicine*, 20.24, 3651-3666.