Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Picone

Criteri di secondo grado sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale del primo ordine nel vettore minimante

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.1, p. 3–12.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_1_3_0¿

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 gennaio 1962

Presiede il Presidente GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Criteri di secondo grado sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale del primo ordine nel vettore minimante.* Nota [(*)] del Socio MAURO PICONE.

Designino: D un dominio regolare dello spazio reale euclideo ad r dimensioni, il cui punto generico sia indicato con x e con $x_1, x_2, \cdots, x_r$ lo siano le sue coordinate; $\mathfrak{F}$D la frontiera di D; G un campo, cioè un insieme aperto, dello spazio reale euclideo, a $n \cdot r$ dimensioni, essendo n un qualsivoglia numero naturale, il cui punto generico sia indicato con p e con p_{ih} $(i = 1, 2, \cdots, n;$ $h = 1, 2, \cdots, r)$ lo siano le sue coordinate; $\overset{\circ}{y}(x)$ un vettore a n componenti reali $\overset{\circ}{y}_1(x)\, \overset{\circ}{y}_2(x), \cdots, \overset{\circ}{y}_n(x)$, funzioni del punto x, di classe ν $(\nu \geqq 1)$ nel dominio D (cioè ivi continue con le loro derivate parziali fino a quelle, incluse, d'ordine ν) tali che, posto

$$\frac{\partial \overset{\circ}{y}_i}{\partial x_h} = \overset{\circ}{p}_{ih}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n; h = 1, 2, \cdots, r),$$

si abbiano sempre le coordinate di un punto di G; $\rho'(x)$ e $\rho''(x)$ due vettori, a n componenti reali $\rho'_i(x)$, $\rho''_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, funzioni di x, definite

(*) Presentata nella seduta del 13 gennaio 1962.

nel dominio D, potendo esse divenire o essere sempre infinite, verificanti le condizioni:

$$\left.\begin{array}{ll}\rho_i'(x) \geqq 0 \,,\ \rho_i''(x) \geqq 0\,, & \text{per } x \in \mathrm{D} \\ \rho_i'(x) + \rho_i''(x) > 0\,, & \text{per } x \text{ nell'interno di D}\end{array}\right\} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

$\mathrm{R}(x)$ l'insieme, dello spazio reale euclideo del punto $y(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, funzione del punto x, definita, in D, dal verificarsi delle limitazioni:

$$\mathring{y}_i(x) - \rho_i'(x) \leqq y_i \leqq \mathring{y}_i(x) + \rho_i''(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

T l'insieme, supposto un dominio, dello spazio euclideo a $n + r$ dimensioni, del punto $(x_1, x_2, \cdots, x_r; y_1, y_2, \cdots, y_n)$, luogo dei punti, di tale spazio, per i quali si ha:

$$x \in \mathrm{D}\ ,\ y \in \mathrm{R}(x);$$

$$f(x, y, p) \equiv f(x_1, x_2, \cdots, x_r; y_1, y_2, \cdots, y_n; p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{nr}),$$

una funzione reale del punto $(x, y, p) \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_r; y_1, y_2, \cdots, y_n; p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{nr})$, continua al variare, indipendentemente l'uno dall'altro, del punto $(x, y) \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_r; y_1, y_2, \cdots, y_n)$ nel dominio T e del punto $p \equiv (p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{nr})$ nell'insieme G, cioè continua nell'insieme $\mathrm{T}\times\mathrm{G}$; $\mathrm{E}^{(\nu)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$ l'insieme, al quale appartiene il vettore $\mathring{y}(x)$, di vettori $y(x)$, a n componenti reali $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$, funzioni del punto x, di classe ν in D, tali che, per x in D, il punto $[x, y(x)] \equiv [x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)]$ è in T e, posto

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_h} = p_{ih}\,, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n; h = 1, 2, \cdots, r)$$

il punto $\partial y_1/\partial x_1, \partial y_1/\partial x_2, \cdots, \partial y_n/\partial x_r$, in G, verificanti l'identità:

$$y(x) \equiv \mathring{y}(x)\,, \quad \text{per } x \in \mathfrak{F}\mathrm{D}.$$

Designata, per ogni vettore $y(x)$ di $\mathrm{E}^{(\nu)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$, con $y'(x)$ la matrice jacobiana

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_r)},$$

come con p si designa la matrice $((p_{ih}))$, dall'identità

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{I}(y) \equiv \int_{\mathrm{D}} f[x, y(x), y'(x)]\,\mathrm{d}x \equiv$$

$$\int_{\mathrm{D}} f\Big[x_1, x_2, \cdots, x_r; y_1(x_1, x_2, \cdots, x_r), y_2(x_1, x_2, \cdots, x_r), \cdots, y_n(x_1, x_2, \cdots, x_r);$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} y_1(x_1, x_2, \cdots, x_r), \frac{\partial}{\partial x_2} y_1(x_1 . x_2, \cdots, x_r), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_r} y_n(x_1, x_2, \cdots, x_r)\Big]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_r$$

viene definita in $\mathrm{E}^{(\nu)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$ una funzione reale $\mathrm{I}(y)$ del vettore $y(x)$.

In una mia recente Memoria (1) ho esposto vari criteri e loro applicazioni (alla separazione degli autovalori per un parametro reale da cui dipende il sistema euleriano, di equazioni a derivate parziali, competente alla funzione f), sufficienti affinché il vettore $\overset{\circ}{y}(x)$ dia a $\mathrm{I}(y)$ il suo minimo valore in $\mathrm{E}^{(v)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$, cioè, come brevemente soglio dire, affinché $\overset{\circ}{y}(x)$ *renda minimo* o *minimizzi* $\mathrm{I}(y)$ *in* $\mathrm{E}^{(v)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$. I risultati di questa Memoria – che comprendono, come casi particolari, tutti quelli stabiliti nei miei precedenti lavori dedicati ai criteri sufficienti di minimo assoluto per integrali che non dipendono dalle derivate della funzione minimante, d'ordine superiore al primo – poggiano sull'*effettiva* costruzione di funzioni che ho chiamato *d'invarianza* (*del primo ordine*) *per l'insieme* $\mathrm{E}^{(v)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$. Una funzione reale

$$v(x, y, p),$$

del punto x, del vettore y e della matrice p, continua in $\mathrm{T}\times\mathrm{G}$, è da me detta d'invarianza (del primo ordine) per l'insieme $\mathrm{E}^{(v)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$, se l'integrale

$$\mathrm{I}_v(y) = \int_{\mathrm{D}} v[x, y(x), y'(x)]\,\mathrm{d}x,$$

è costante in $\mathrm{E}^{(v)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$, e, evidentemente:

I. *La varietà* $y = \overset{\circ}{y}(x)$ *minimizza* $\mathrm{I}(y)$ *in* $\mathrm{E}^{(v)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$, *se per una funzione* $v(x, y, p)$, *d'invarianza per l'insieme* $\mathrm{E}^{(v)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$, *riesce, in* $\mathrm{T}\times\mathrm{G}$,

$$f(x, y, p) - v(x, y, p) - f[x, \overset{\circ}{y}(x), \overset{\circ}{y}'(x)] + v[x, \overset{\circ}{y}(x), \overset{\circ}{y}'(x)] \geqq 0, \tag{2}$$

e propriamente, se l'eguaglianza si ha soltanto per $y \equiv \overset{\circ}{y}(x)$ *e* $p \equiv \overset{\circ}{y}'(x)$.

Supposta la funzione f, per ogni punto (x, y) di T, di classe uno, rispetto alle variabili p_{ih} e introdotta la funzione di Weierstrass:

$$\mathrm{W}_f(x, y, p, p') \equiv$$

$$f(x, y, p') - f(x, y, p) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} f_{p_{ih}}(x, y, p)(p'_{ih} - p_{ih})$$ (2)

sussiste il seguente teorema [dimostrato in (*M*), al n. 6, teor. XV] che chiamo della funzione di Weierstrass.

II. *Se la funzione* $f(x, y, p)$ *e la funzione d'invarianza* $v(x, y, p)$ *sono entrambe, per ogni punto* (x, y) *di* T, *di classe uno rispetto alle variabili* p_{ih},

(1) Dal titolo: *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale del primo ordine nel vettore minimante*, pubblicata nella «Memorie dell'Accademia Nazionale dei Lincei», Volume VI della serie VIII, pp. 281–338. Sarà, nel testo, citata questa Memoria indicandola con (*M*).

(2) Mi sono permesso di indicare con W_f la funzione di Weierstrass competente alla f, parendomi opportuno riservare la notazione E_f alla designazione dell'operatore sul vettore $y(x)$, che ha per risultato un vettore, del pari a n componenti, date dai primi membri delle n equazioni a derivate parziali, costituenti il sistema di Eulero competente alla f.

condizione necessaria affinché si verifichi, in $T \times G$, *la* (2) *è che, in* $D \times G$, *si abbia:*

$$W_f(x, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}', p) - W_v(x, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}', p) \geqq 0 .$$

Per $\nu = 1$ esistono [cfr. (*M*), n^i^ 1 e 6] funzioni d'invarianza lineari nelle p_{ih}, tutte date dall'identità:

$$(3) \qquad v(x, y, p) \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} B^{ih}(x, y)\, p_{ih} + \int_{\overset{\circ}{y}(x)}^{y} \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} B^{ih}_{x_h}(x, y)\, dy_i + A(x)$$

ove $A(x)$ e le $B^{ih}(x, y)$ sono funzioni reali arbitrarie, continue in T, le B^{ih} con le derivate

$$(4) \qquad B^{ih}_{x_h} \;,\; B^{ih}_{y_j} \;,\; B^{ih}_{x_h y_j} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n; h = 1, 2, \cdots, r),$$

verificanti le identità

$$(5) \qquad B^{ih}_{y_j} \equiv B^{jh}_{y_i} ,$$

e l'integrazione, per ogni punto x di D, s'intende estesa ad una qualsivoglia curva assolutamente continua, tracciata in $R(x)$, terminata ai punti $\overset{\circ}{y}(x)$ e y. Con questa funzione d'invarianza, avendosi $W_v \equiv 0$, il teorema della funzione di Weierstrass, fornisce la classica condizione di Weierstrass per la varietà $y = \overset{\circ}{y}(x)$, condizione, però [cfr. (*M*), n. 2] che, se $(n-1)\cdot(r-1) > 0$, non è necessaria affinché $\overset{\circ}{y}(x)$ minimizzi $I(y)$ in $E^{(\nu)}(T \times G)$.

Per $\nu = 2$ e per $(n-1)\cdot(r-1) > 0$, esistono funzioni d'invarianza le quali, nelle variabili p_{ih}, possono essere polinomi di grado $m(r, n)$, designando $m(r, n)$ il minimo fra i numeri r e n [(3)] e con una tale funzione d'invarianza, il teor. II fornisce il seguente.

III. *Condizione necessaria affinché si verifichi,* in $T \times G$, *la* (2) *è che, in* $D \times G$, *si abbia:*

$$(6) \qquad W_f(x, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}', p) - \sum_{\substack{1\\ i<j}}^{n}{}_{ij} \sum_{\substack{1\\ h<k}}^{r}{}_{hk} C^{ihjk}(x, p - \overset{\circ}{p}) \begin{vmatrix} p_{ih} - \overset{\circ}{p}_{ih} & p_{ik} - \overset{\circ}{p}_{ik} \\ p_{jh} - \overset{\circ}{p}_{jh} & p_{jk} - \overset{\circ}{p}_{jk} \end{vmatrix} \geqq 0 ,$$

ove le C^{ihjk} *sono certe funzioni del punto* (x, p), *polinomi nelle variabili* $p_{ih} - \overset{\circ}{p}_{ih}$ *al più di grado* $m(r, n) - 2$, *composti di monomi, complementari al monomio* $(p_{ih} - \overset{\circ}{p}_{ih})(p_{jk} - \overset{\circ}{p}_{jk})$, *nella matrice* $p - \overset{\circ}{p}$ [(4)].

(3) Cfr. A. W. LANDERS, *Contributions to the calculus of variations* [Univ. Chicago Press., Chicago III (1942)]. Al n. 6 di (*M*) sono date, esplicitamente, alcune funzioni d'invarianza, per r e n arbitrarii, e, per $r = n = 2$, la più generale di tali funzioni.

(4) Data una matrice a di elementi a_{ih}, di n righe e r colonne, dico che un monomio, i cui fattori sono tutti elementi di a, è *competente alla matrice*, se esso è del tipo $a_{i_1 h_1} a_{i_2 h_2} \cdots a_{i_s h_s}$, con $s \leqq m(r, n)$, essendo $i_1, i_2, \cdots, i_s$ e $h_1, h_2, \cdots, h_s$ combinazioni della classe s, rispettivamente, dei numeri $1, 2, \cdots, n$ e $1, 2, \cdots, r$ e che due monomi, entrambi competenti alla matrice, sono *tra di loro complementari, nella matrice stessa*, se il loro prodotto compete, a sua volta, alla matrice.

Come si vedrà coi teoremi VI, VII, e VIII della Nota presente, è da ritenersi ben fondata la congettura insita nella seguente domanda.

Affinché $\overset{\circ}{y}(x)$ *minimizzi* $\mathrm{I}(y)$ *in* $\mathrm{E}^{(2)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$, *e quindi in* $\mathrm{E}^{(1)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$, *è forse necessaria l'esistenza di* $n\cdot r\cdot(n-1)\cdot(r-1)/4$ *funzioni*

$$\mathrm{C}_f^{ihjk}(x\,,p)$$

dipendenti ovviamente dalla funzione f, *per le quali, in* $\mathrm{D}\times\mathrm{G}$ *sussiste la* (6)?

Evidentemente, questa condizione sarebbe assai più forte di quella data da McShane [5], secondo la quale affinché $\overset{\circ}{y}(x)$ minimizzi $\mathrm{I}(y)$ in $\mathrm{E}^{(1)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$ deve aversi, in $\mathrm{D}\times\mathrm{G}$,

$$\mathrm{W}_f(x\,,\overset{\circ}{y}\,,\overset{\circ}{y}'\,,p)\geqq 0\,,$$

per tutte le matrici p, per le quali la matrice $p-\overset{\circ}{p}$ ha rango uno.

Si possono distinguere i criteri sufficienti di minimo assoluto, dedotti dal teorema I, a seconda del grado, nelle p_{ih}, della funzione d'invarianza per esso impiegata. Così i criteri sufficienti di minimo assoluto considerati nei numeri, diversi dal n. 6, dalla Memoria (*M*), ottenuti impiegando la funzione d'invarianza data dalla (3), si dovrebbero dire *lineari*.

Scopo della Nota presente è di enunciare taluni criteri, *di secondo grado*, sufficienti per il minimo assoluto, i quali mi sembrano particolarmente espressivi.

1. UN CRITERIO DI SECONDO GRADO SUFFICIENTE PER IL MINIMO ASSOLUTO. – Al n. 6 di (*M*) è osservato che la funzione, di secondo grado nelle p_{ih},

$$v(x\,,y\,,p)\equiv\sum_{\substack{1\\ i<j}}^{n}{}_{ij}\sum_{\substack{1\\ h<k}}^{r}{}_{hk}\,\mathrm{C}^{ihjk}\cdot(p_{ih}\,p_{jk}-p_{ik}\,p_{jh})$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{r}\mathrm{B}^{ih}(x\,,y)\,p_{ih}+\int_{\overset{\circ}{y}(x)}^{y}\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{r}\mathrm{B}^{ih}_{x_h}(x\,,y)\,\mathrm{d}y_i\,,$$

essendo le C^{ihjk} [in numero di $r\cdot n\cdot(r-1)\cdot(n-1)/4$] costanti arbitrarie e le B^{ih} funzioni, pur esse arbitrarie, continue in T con le derivate (4), verificanti le identità (5), è funzione d'invarianza per l'insieme $\mathrm{E}^{(2)}(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$, e pertanto, posto

$$u(p)\equiv\sum_{\substack{1\\ i<j}}^{n}{}_{ij}\sum_{\substack{1\\ h<k}}^{r}{}_{hk}\,\mathrm{C}^{ihjk}\cdot(p_{ih}\,p_{jk}-p_{ik}\,p_{jh})\,,$$

(5) E. I. MCSHANE, *On the necessary condition of Weierstrass in the multiple integral problem of the Calculus of variations* [« Annals of Mathematics », vol. 32 (1931), pp. 578-590].

si ha il criterio di secondo grado, sufficiente per il minimo assoluto espresso dal teorema:

IV. *Posto*

$$(1.1)\qquad \Omega(x, y, p) \equiv f(x, y, p) - \overset{\circ}{f}(x) - u(p) + u(\overset{\circ}{p})$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{r} B^{ih}(x, y)\, p_{ih} - \int_{\overset{\circ}{y}(x)}^{y} \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{r} B^{ih}_{x_h}(x, y)\, dy_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{r} \overset{\circ}{B}{}^{ih}\, \overset{\circ}{p}_{ih} \;^{(6)},$$

la varietà $y = \overset{\circ}{y}(x)$, *supposta di classe due in* D, *minimizza* $I(y)$ *in* $E^{(2)}(T \times G)$ *se si possono scegliere le costanti* C^{ihjk} *e le funzioni* $B^{ih}(x, y)$, *in modo che si abbia*, in $T \times G$,

$$(1.2)\qquad \Omega(x, y, p) \geqq 0$$

e propriamente se l'eguaglianza si ha soltanto per $y \equiv \overset{\circ}{y}(x)$ *e* $p \equiv \overset{\circ}{y}'(x)$.

Supposto verificata la (1.2), essa, postovi $y = \overset{\circ}{y}(x)$, dà $\Omega(x, \overset{\circ}{y}, p) \geqq 0$ e poiché $\Omega(x, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{p}) \equiv 0$, ne seguirà, essendo G un campo,

$$\Omega_{p_{ik}}(x, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{p}) \equiv \overset{\circ}{f}_{p_{ih}} - \overset{\circ}{B}{}^{ih} - u_{p_{ih}}(\overset{\circ}{p}) \equiv 0$$

e quindi, posto

$$(1.3)\qquad B^{ih} \equiv \overset{\circ}{f}_{p_{ih}} - u_{p_{ih}}(\overset{\circ}{p}) + M^{ih}$$

si ha $\overset{\circ}{M}{}^{ih} = 0$. Supporremo che la $\overset{\circ}{f}_{p_{ih}}$ *possieda, continua in* T, *la derivata parziale prima rispetto alla* x_h. In tale ipotesi le funzioni M^{ih}, definite dalle (1.3) riescono [cfr. le (4) e (5)] continue, in T, con le derivate

$$(1.4)\qquad M^{ih}_{x_h}\,,\; M^{ih}_{y_j}\,,\; M^{ih}_{x_h y_j}\,,$$

e verificano le identità:

$$(1.5)\qquad \overset{\circ}{M}{}^{ih} \equiv 0\,, \quad \text{in D} \quad ; \quad M^{ih}_{y_j} \equiv M^{jh}_{y_i}\,, \quad \text{in T}\,.$$

Introducendo le (1.3) nell'espressione (1.1) di Ω, si trova:

$$(1.6)\qquad \Omega(x, y, p) \equiv$$

$$f(x, y, p) - \overset{\circ}{f}(x) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{r} \overset{\circ}{f}_{p_{ih}} \cdot (p_{ih} - \overset{\circ}{p}_{ih}) - u(p) + u(\overset{\circ}{p}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{r} u_{p_{ih}}(\overset{\circ}{p})\,(p_{ih} - \overset{\circ}{p}_{ih})$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{r} M^{ih} p_{ih} - \int_{\overset{\circ}{y}(x)}^{y} \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{r} \left[\frac{\partial}{\partial x_h} \overset{\circ}{f}_{p_{ih}} - \frac{\partial}{\partial x_h} u_{p_{ih}}(\overset{\circ}{p}) + M^{ih}_{x_h}\right] dy_j\,.$$

(6) Per una funzione $F(x, y, p)$, definita in $T \times G$, la notazione $\overset{\circ}{F}(x)$ designa la funzione $F[x, \overset{\circ}{y}(x), \overset{\circ}{y}'(x)]$.

Supponiamo ora che la f sia ovunque di classe uno anche rispetto alle variabili y_i e che la varietà $y = \overset{\circ}{y}(x)$ sia un'estremale per l'integrale I (y). Se si osserva che:

$$\sum_{h=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_h} \overset{\circ}{f}_{p_{ih}} \equiv \overset{\circ}{f}_{y_i} \quad , \quad \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_h} u_{p_{ih}}(\overset{\circ}{p}) \equiv 0 \, ,$$

$$u(p) - u(\overset{\circ}{p}) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} u_{p_{ih}}(\overset{\circ}{p})(p_{ih} - \overset{\circ}{p}_{ih}) \equiv \sum_{\substack{ij \\ i<j}}^{} \sum_{\substack{hk \\ h<k}}^{} \mathrm{C}^{ihjk} \begin{vmatrix} p_{ih} - \overset{\circ}{p}_{ih} & p_{ik} - \overset{\circ}{p}_{ik} \\ p_{jh} - \overset{\circ}{p}_{jh} & p_{jk} - \overset{\circ}{p}_{jk} \end{vmatrix},$$

la (1.6) fornisce allora, l'identità

$$(1.7) \qquad \Omega(x, y, p) \equiv$$

$$\mathrm{W}_f(x, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{p}, p) - \sum_{\substack{ij \\ 1 \\ i<j}}^{n} \sum_{\substack{hk \\ 1 \\ h<k}}^{r} \mathrm{C}^{ihjk} \begin{vmatrix} p_{ih} - \overset{\circ}{p}_{ih} & p_{ik} - \overset{\circ}{p}_{ik} \\ p_{jh} - \overset{\circ}{p}_{jh} & p_{jk} - \overset{\circ}{p}_{jk} \end{vmatrix} + \Omega'(x, y, p) \, ,$$

essendo

$$(1.8) \qquad \Omega'(x, y, p) \equiv$$

$$f(x, y, p) - f(x, \overset{\circ}{y}, p) - \sum_{i=1}^{n} \overset{\circ}{f}_{y_i}(x)(y_i - \overset{\circ}{y}_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} \mathrm{M}^{ih} p_{ih} - \int_{\overset{\circ}{y}(x)}^{y} \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} \mathrm{M}^{ih}_{x_h} \, \mathrm{d}y_i \, ,$$

ciò che ha di conseguenza il teorema:

V. *Se, essendo* $f(x, y, p)$, *di classe uno, in* $\mathrm{T} \times \mathrm{G}$, *rispetto alle variabili* y_i *e* p_{ih} *e la varietà* $y = \overset{\circ}{y}(x)$ *un'estremale di classe due in* D, *esistono* $n \cdot r \cdot (n - 1) \cdot (r - 1)/4$ *costanti* C^{ihjk}, *per le quali riesce in* $\mathrm{D} \times \mathrm{G}$,

$$(1.9) \qquad \mathrm{W}_f(x, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{p}, p) - \sum_{\substack{ij \\ 1 \\ i<j}}^{n} \sum_{\substack{hk \\ 1 \\ h<k}}^{r} \mathrm{C}^{ihjk} \begin{vmatrix} p_{ih} - \overset{\circ}{p}_{ih} & p_{ik} - \overset{\circ}{p}_{ik} \\ p_{jh} - \overset{\circ}{p}_{jh} & p_{jk} - \overset{\circ}{p}_{jk} \end{vmatrix} \geqq 0,$$

la detta varietà minimizza I (y) *in* $\mathrm{E}^{(2)}(\mathrm{T} \times \mathrm{G})$ *se si possono scegliere le* $n \cdot r$ *funzioni* M^{ih}, *continue in* T *con le derivate* (1.4), *verificanti le identità* (1.5), *in guisa che, con la* $\Omega'(x, y, p)$ *data dalla* (1.8), *risulti, in* $\mathrm{T} \times \mathrm{G}$,

$$(1.10) \qquad \Omega'(x, y, p) \geqq 0 \, ,$$

e propriamente se, almeno una, delle (1.9) e (1.10), *è soddisfatta in senso stretto, se si ha cioè, l'eguaglianza, nella* (1.9), *solo quando sia* $p \equiv \overset{\circ}{p}$ *o nella* (1.10) *solo quando sia* $y \equiv \overset{\circ}{y}(x)$, $p \equiv \overset{\circ}{y}'(x)$.

Ovviamente, se la funzione $f(x, y, p)$ è in $\mathrm{T} \times \mathrm{G}$, di classe due rispetto alle variabili p_{ih} e il campo G è sempre convesso rispetto al punto $\overset{\circ}{p}$, la (1.9) è verificata se la forma quadratica nelle variabili reali ξ_{ih}:

$$(1.11) \qquad \sum_{\substack{ij \\ 1}}^{n} \sum_{\substack{hk \\ 1}}^{r} f_{p_{ih} p_{jk}}(x, y, \overset{\circ}{p}) \xi_{ih} \xi_{jk} - 2 \sum_{\substack{ij \\ 1 \\ i<j}}^{n} \sum_{\substack{hk \\ 1 \\ h<k}}^{r} \mathrm{C}^{ihjk} \cdot (\xi_{ih} \xi_{jk} - \xi_{ik} \xi_{jh}),$$

si conserva, in D, semidefinita positiva e, in senso stretto, se la stessa forma è ivi sempre definita.

Per le applicazioni è interessante osservare che la forma (1.11) può risultare semidefinita o definita positiva, anche quando la forma al suo diminuendo sia indefinita.

2. CRITERI DI SECONDO GRADO SUFFICIENTI PER PARTICOLARI ESTREMALI. – Assunte le M^{ih} tutte identicamente nulle, il criterio espresso dal teor. V, fornisce i due notevoli seguenti.

VI. *Se per l'estremale* $y = \overset{\circ}{y}(x)$, *si ha, in* D,

$$f_{y_i}[x, \overset{\circ}{y}(x), \overset{\circ}{y}'(x)] \equiv 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ed è, in $D \times G$, *verificata la* (1.9), *essa minimizza* $I(y)$ *in* $E^{(2)}(T \times G)$, *se si ha, in* $T \times G$

$$f(x, y, p) \geqq f(x, \overset{\circ}{y}, p), \tag{2.1}$$

e propriamente se, almeno una delle (1.9) *o* (2.1) *è soddisfatta in senso stretto.*

VII. *Se nell'interno di* D, *si ha:*

$$\rho_i'(x)\, \rho_i''(x) > 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

l'estremale $y = \overset{\circ}{y}(x)$ *minimizza* $I(y)$ *in* $E^{(2)}(T \times G)$, *se, in* $D \times G$, *è verificata la* (1.9) *e, in* $T \times G$, *la* (2.1).

Al n. 8 di (M) è osservato che se per la varietà estremale $y = \overset{\circ}{y}(x)$ sussistono, in $D \times G$, le n identità:

$$f_{y_j}[x, \overset{\circ}{y}(x), p] \equiv \alpha^j(x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} \beta^{ijh}(x)\, p_{ih} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n), \tag{2.2}$$

ove la $\alpha^j(x)$ e $\beta^{ijh}(x)$ sono note funzioni, dipendenti soltanto dal punto x, continue, in D, con le derivate $\beta^{ijh}_{x_h}(x)$ ivi verificanti, le identità

$$\beta^{ijh}(x) \equiv \beta^{jih}(x) \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n;\ h = 1, 2, \cdots, r), \tag{2.3}$$

scelte, arbitrariamente, le $r \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)/3$ funzioni

$$\varphi^{ijlh}(x, y) \qquad (i, j, l = 1, 2, \cdots, n;\ h = 1, 2, \cdots, r),$$

di classe uno in T, ivi soddisfacenti le identità

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi^{ijlh} \equiv \varphi^{iljh} \equiv \varphi^{jilh} \equiv \varphi^{jlih} \equiv \varphi^{lijh} \equiv \varphi^{ljih}, \\ \varphi^{ijlh}_{y_{l'}} \equiv \varphi^{ijl'h}_{y_l}, \end{array} \right. \tag{2.4}$$

e assunte, per le funzioni M^{ih}, nella Ω' data dalla (1.8), le soluzioni delle equazioni:

$$M^{ih}_{y_j y_l} = \varphi^{ijlh}, \quad \overset{\circ}{M}{}^{ih} = 0, \quad \overset{\circ}{M}{}^{ih}_{y_j} = \beta^{ijh},$$

si ha

$$\Omega'(x, \overset{\circ}{y}, p) \equiv \Omega_{y_i}'(x, \overset{\circ}{y}, p) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{2.5}$$

e, supposta $f(x, y, p)$ ovunque di classe due rispetto alle y_i,

$$(2.6)\qquad \Omega'_{y_j y_l}(x, y, p) \equiv$$

$$f_{y_j y_l} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} \varphi^{ijlh} p_{ih} - \sum_{h=1}^{r} \beta^{jlh}_{x_h}(x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} \overset{\circ}{\varphi}{}^{ijlh} \overset{\circ}{p}_{ih} - \int_{\overset{\circ}{y}(x)}^{y} \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} \varphi^{ijlh}_{x_h} \mathrm{d}y_i .$$

Verificandosi le (2.5), risulterà soddisfatta la (1.10) in T×G, se, ivi, la forma quadratica nelle variabili reali η_j:

$$(2.7)\qquad \sum_{1}^{n}{}_{jl} \Omega'_{y_j y_l}(x, y, p) \eta_j \eta_l ,$$

si mantiene semidefinita positiva e in senso stretto se la stessa forma è definita, onde il teorema:

VIII. *Se per la varietà estremale* $y = \overset{\circ}{y}(x)$ *son soddisfatte, in* D×G, *le* (1.9), (2.2) *e* (2.3), *essendo le funzioni* $\alpha^j(x)$, $\beta^{ijh}(x)$, *continue, in* D, *con le derivate* $\beta^{ijh}_{x_h}(x)$, *essa minimizza* I (y) *in* $\mathrm{E}^{(2)}$ (T×G), *se si possono scegliere le funzioni* $\varphi^{ijlh}(x, y)$, *di classe uno in* T, *ivi verificanti le identità* (2.4), *in guisa tale che la forma quadratica* (2.7), *con i coefficienti dati dalle* (2.6), *sia sempre semidefinita positiva in* (T×G). *Il minimo è proprio se la stessa forma, è definita positiva o se la* (1.9) *è soddisfatta in senso stretto.*

È da osservare quanto segue [cfr. (*M*), n. 8].

1° se si assumono tutte le φ^{ijlh} identicamente nulle, la forma quadratica (2.7), si riduce, semplicemente, alla

$$\sum_{1}^{n}{}_{jl} \left[f_{y_j y_l} - \sum_{h=1}^{r} \beta^{jlh}_{x_h}(x) \right] \eta_j \eta_l ;$$

2° se, in T×G, sussistono le identità:

$$f(x, y, p) \equiv g(x, y, p) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} \gamma^{ih}(x, y) p_{ih} + \gamma(x, y),$$

$$g_{y_i}(x, \overset{\circ}{y}, p) \equiv 0 \quad , \quad \gamma^{ih}_{y_j} \equiv \gamma^{jh}_{y_i},$$

essendo le funzioni g e γ, continue in T×G, e di classe due rispetto alle y_i e le funzioni γ^{ih} continue in T, con le derivate $\gamma^{ih}_{y_j}$ ivi di classe due, assunte le

$$\varphi^{ijlh} \equiv \gamma^{ih}_{y_j y_l},$$

la forma quadratica (2.7) si riduce, semplicemente, alla

$$\sum_{1}^{n}{}_{jl} \left[g_{y_j y_l}(x, y, p) + \gamma_{y_j y_l}(x, y) - \sum_{h=1}^{r} \gamma^{jh}_{x_h y_l}(x, y) \right] \eta_j \eta_l \equiv$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{jl} \left[f_{y_j y_l} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} \gamma^{ih}_{y_j y_l}(x, y) p_{ih} - \sum_{h=1}^{r} \gamma^{jh}_{x_h y_l}(x, y) \right] \eta_j \eta_l .$$

Adunque, coi teoremi VI, VII, VIII si hanno esempi di varietà $y = \overset{\circ}{y}(x)$, che rendono minimo l'integrale I (y) in $\mathrm{E}^{(2)}$ (T×G), per le quali non soltanto la funzione di Weierstrass è, in $D \times G$, non negativa quando il rango della matrice $p - \overset{\circ}{p}$ è uno (conformemente alla citata condizione necessaria di McShane), ma, qual si sia tale rango, è, in $D \times G$, non negativa la somma di quella funzione con una certa coombinazione lineare, a coefficienti costanti, dei determinanti

$$\begin{vmatrix} p_{ih} - \overset{\circ}{p}_{ih} & p_{ik} - \overset{\circ}{p}_{ik} \\ p_{jh} - \overset{\circ}{p}_{jh} & p_{jk} - \overset{\circ}{p}_{jk} \end{vmatrix} .$$

Così, per la funzione d'invarianza $v(x, y, p)$, impiegata al n. 1, la funzione $\overset{\circ}{y}(x)$ rende, simultaneamente, minimo e massimo, in $E^{(2)}(T \times G)$, l'integrale, esteso a D, di $v[x, y(x), y'(x)]$, e si ha:

$$W_v(x, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}', p) - \sum_{\substack{1 \\ i<j}}^{n} {}_{ij} \sum_{\substack{1 \\ h<k}}^{n} {}_{hk} C^{ihjk} \begin{vmatrix} p_{ih} - \overset{\circ}{p}_{ih} & p_{ik} - \overset{\circ}{p}_{ik} \\ p_{jh} - \overset{\circ}{p}_{jh} & p_{jk} - \overset{\circ}{p}_{jk} \end{vmatrix} \equiv 0 ,$$

e non soltanto $W_v(x, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}', p) \equiv 0$ quando è uno il rango della matrice $p - \overset{\circ}{p}$.