Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vittorio Dalla Volta

Sulle ipersuperficie simmetriche di uno spazio euclideo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.1, p. 51–61.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_1_51_0¿

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Geometria. — *Sulle ipersuperficie simmetriche di uno spazio euclideo.* Nota di VITTORIO DALLA VOLTA, presentata [*] dal Socio E. BOMPIANI.

1. PRELIMINARI E NOTAZIONI. – Indicheremo in tutto questo lavoro con E^r lo spazio euclideo reale ad r dimensioni; una varietà V_s immersa in E^r sarà sempre *una varietà differenziabile connessa* nel senso che si dà oggi a tale termine: essa risulterà pertanto priva di punti singolari [al finito]; la supporremo inoltre *completa* (ved. [4], p. 133).

Per quanto riguarda le notazioni, poi ci atterremo di regola a quelle di [3]. Fino al n. 9 useremo indici latini minuscoli, variabili da 1 ad n; nei nn. 9, 10, 11, 12 useremo anche indici greci minuscoli, e latini maiuscoli, rispettivamente con variabilità da 1 a p e da $p+1$ ad n.

2. POSIZIONE DEL PROBLEMA. – Dopo queste premesse ricordiamo che una varietà differenziabile V_n (di classe di differenziabilità C^r, $r \geq 4$) dotata di una metrica riemanniana dicesi *simmetrica* (ved. per esempio [4], p. 238) se la derivata covariante del tensore di curvatura della metrica è identicamente nulla. In particolare una ipersuperficie di E^{n+1} si dirà *simmetrica*, se tale risulti quando vi si consideri la metrica riemanniana indotta dall'ambiente.

È altresì noto (ved. per esempio [3], p. 421) che una V_2 è simmetrica allora e allora soltanto che essa è a curvatura costante K_0. Supporremo perciò sempre nel seguito $n \geq 3$.

In E^{n+1} sono certo simmetriche le seguenti ipersuperficie: *a*) la sfera S^n; *b*) il cilindro avente come generatori ∞^p E^{n-p} proiettanti ortogonalmente una sfera S^p di E^{p+1}, ove p è un qualunque intero compreso fra 2 ed $n-1$, estremi inclusi; *c*) il cilindro proiettante ortogonalmente una qualunque curva (di E^2) o, in particolare, l'iperpiano.

L'asserita simmetria risulta ovvia nei casi *a*) e *c*), poiché le rispettive metriche sono a curvatura costante (positiva in *a*) e nulla in *c*) e, quindi, simmetriche; nel caso *b*), invece, si tratta di uno spazio *riducibile* e precisamente di $E^{n-p} \times S^p$; e giacché entrambi i fattori sono simmetrici, ne segue che tale è anche l'ipersuperficie considerata [1].

Scopo della presente Nota è di mostrare che, con una possibile eccezione, i casi or ora indicati sono gli unici possibili, per lo meno se si suppone V_n di classe almeno C^5. L'eccezione è dovuta al fatto che, qualora il rango della seconda forma fondamentale di V_n sia uguale a 2 (siamo dunque nel caso *b*), le considerazioni dei numeri seguenti non mi hanno permesso di dimostrare

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1962.

(1) Cfr. [3], p. 278, esempio 2, da cui segue subito l'asserto.

che le sole ipersuperficie simmetriche (connesse) con ∞^2 iperpiani tangenti sono i cilindri aventi come generatori gli E^{n-2} che proiettano ortogonalmente una sfera dello spazio ordinario, anche se tale circostanza appaia estremamente probabile.

Il risultato cercato si ottiene con considerazioni locali, osservando anzitutto che, per l'ipotesi fatta, la derivata covariante del tensore di Riemann della metrica appare un campo T di tensori di classe (almeno) C^1 (2), sì che in ogni punto della varietà ha senso considerare, rispetto a un sistema di coordinate locali (y^i), le componenti di T e le loro derivate parziali rispetto alle y^i; imponendo allora che in un punto O (generico) di V_n siano nulle le componenti di T e le loro derivate, si deducono proprietà geometriche di V_n in O, e dalla validità di queste in ogni punto si conclude al modo voluto.

3. Data dunque in E^{n+1} $(n > 2)$ una ipersuperficie V_n, sia O un suo punto, che assumeremo come origine di un sistema di coordinate cartesiani ortogonali (x^i) (3), di cui l'iperpiano $x^{n+1} = 0$ sia l'iperpiano tangente a V_n in O. Se, come supponiamo, V_n è di classe almeno C^5, potremo considerarne la calotta σ_5 del 5° ordine di centro O, rappresentata, per la scelta fatta del riferimento, dallo sviluppo:

$$x^{n+1} = 1/2!\, c^2(x^i) + 1/3!\, c^3(x^i) + 1/4!\, c^4(x^i) + 1/5!\, c^5(x^i) + [\geq 6]_x, \tag{3.1}$$

ove le $c^i(x^i)$ sono forme (polinomi omogenei) di grado i nelle x^i, mentre qui e nel seguito, $[\geq r]_x$ indica un *resto* di ordine $\geq r$ nelle x^i. Si nòti, in particolare, che $c^2(x^i)$ non è che la *seconda forma fondamentale* di V_n, valutata in O.

Come si è osservato in precedenza, il nostro scopo sarà di determinare le c^i nella (3.1) in modo tale che gli sviluppi delle componenti $\nabla_i R_{jkl}{}^h$ delle derivate covarianti del tensore di curvatura (della metrica indotta su V_n dall'ambiente) siano nulli fino ai termini del primo ordine inclusi [che sono del resto quelli che è possibile determinare dalle (3.1)].

Nei numeri successivi eseguiremo perciò il calcolo dei coefficienti g_{ij} della metrica indotta su V_n dall'ambiente e dei simboli di Christoffel e di Riemann.

4. Calcolo di g_{ij} e dei simboli di Christoffel. – Essendo:

$$ds^2 \equiv g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \delta_{ij}\, dx^i\, dx^j + (dx^{n+1})^2, \tag{4.1}$$

risulta:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \partial_{(i}\, x^{n+1}\, \partial_{j)}\, x^{n+1} \text{ (4)}, \tag{4.2}$$

(2) Invero, se V è di classe C^r, il tensore fondamentale, i simboli di Christoffel e di Riemann sono rispettivamente di classe C^{r-1}, C^{r-2}, C^{r-3}.

(3) Eccezionalmente supporremo qui i variabile da 1 ad $n+1$; in ogni altro caso, come si è indicato al n. 1, indici latini varieranno sempre da 1 ad n.

(4) Per il significato delle ( ) e [ ], cfr. [4], p. 14. In particolare si ricordi che, per esempio si ha:

$$g_{[i\,[j}g_{h]\,k]} = 1/2\,(g_{i\,[j}g_{|h|\,k]} - g_{h\,[j}g_{|i|\,k]}),$$

ove un indice fra sbarrette (| |) denota che rispetto ad esso *non* si deve alternare.

ove si è posto $\partial_i x^{n+1} = \partial x^{n+1}/\partial x^i$, e gli sviluppi delle derivate vanno naturalmente calcolati fino ai termini del 4° ordine. Si osservi però che, giacché nella (3.1) lo sviluppo di x^{n+1} comincia con termini del *2° ordine*, e quindi $\partial_i x^{n+1}$ con termini del *1° ordine*, lo sviluppo, fino al 4° ordine, di g_{ij}, risulta indipendente dalla forma c^5 di *quinto* grado che appare nella (3.1) (5). Un semplice calcolo ci fornisce allora:

$$
\begin{aligned}
(4.3) \qquad g_{ij} &= \delta_{ij} + (1/2)^2 \overset{2}{c}_{(i}\overset{2}{c}_{j)} + (1/3\,!)\, \overset{2}{c}_{(i}\overset{3}{c}_{j)} + \\
&+ [(1/3\,!)^2 \overset{3}{c}_{(i}\overset{3}{c}_{j)} + (1/4!)\, \overset{2}{c}_{(i}\overset{4}{c}_{j)}] + [\geq 5]_x, \\
&(\overset{2}{c}_i = \partial_i c^2 \ , \ \text{ecc.})
\end{aligned}
$$

dalla quale si ricava subito:

$$
(4.4) \qquad g^{ij} = \delta^{ij} - (1/2)^2 \overset{2}{c}_i \overset{2}{c}_j + [\geq 3]_x \ ^{(6)}.
$$

Passiamo ora ai simboli di Christoffel che, per poter meglio usare le convenzioni sugli indici, indicheremo con $\Gamma_{ij,h}$, Γ^i_{jh}, anziché con $[ij\,,h]$, $\left\{ {i \atop jh} \right\}$ rispettivamente. Ora è, per definizione,

$$
(4.5) \qquad \Gamma_{ij,h} = (1/2)\,(\partial_i g_{jh} + \partial_j g_{ih} - \partial_h g_{ij}) = (1/2)\,\partial_i g_{jh} + \partial_{[j} g_{h]i}\,.
$$

D'altra parte, se si indicano con indici le successive derivazioni rispetto alle, x^i, si ha:

$$
\begin{aligned}
(1/2)\,\partial_i (\overset{\alpha}{c}_{(j}\overset{\beta}{c}_{h)}) + \partial_{[j}(\overset{\alpha}{c}_{(h]}\overset{\beta}{c}_{i)}) &= \overset{(\alpha}{c}_{i(j}\overset{\beta)}{c}_{h)} + 2\, \overset{(\alpha}{c}_{[j(h]}\overset{\beta)}{c}_{i)} = \\
= \overset{(\alpha}{c}_{i(j}\overset{\beta)}{c}_{h)} + \overset{(\alpha}{c}_{[jh]}\overset{\beta)}{c}_{i} + \overset{(\alpha}{c}_{i[j}\overset{\beta)}{c}_{h]} &= \overset{(\alpha}{c}_{ij}\overset{\beta)}{c}_{h} \qquad (\alpha\,,\beta = 2\,,3\,,4)\ ^{(7)},
\end{aligned}
$$

per la simmetria delle derivate seconde della c.

Di conseguenza si ha subito:

$$
\begin{aligned}
(4.6) \qquad \Gamma_{ij,h} &= (1/2)^2\, \overset{(2}{c}_{ij}\overset{2)}{c}_{h} + (1/3\,!)\, \overset{(2}{c}_{ij}\overset{3)}{c}_{h} + [(1/3\,!)^2\, \overset{(3}{c}_{ij}\overset{3)}{c}_{h} + \\
&+ (1/4!)\, \overset{(2}{c}_{ij}\overset{4)}{c}_{h}] + [\geq 4]_x\,,
\end{aligned}
$$

e quindi, per la (4.4):

$$
(4.7) \qquad \Gamma^l_{ij} \equiv g^{lh}\,\Gamma_{ij,h} = (1/2)^2\, \overset{(2}{c}_{ij}\overset{2)}{c}_{l} + (1/3\,!)\, \overset{(2}{c}_{ij}\overset{3)}{c}_{l} + [\geq 3]_x\,.
$$

5. CALCOLO DEL TENSORE DI CURVATURA E DELLE RELATIVE DERIVATE COVARIANTI. – Ricaviamo ora mediante le (4.6,7) l'espressione di

$$
(5.1) \qquad R_{hijk} = 2\,\partial_{[h}\Gamma_{i]j,k} + 2\,\Gamma^l_{j[i}\Gamma_{h]k,l}\,.
$$

(5) Il significato geometrico di questo fatto è molto semplice: se due calotte ipersuperficiali di uno stesso ordine h hanno a comune la calotta di ordine $h - 1$, la proiezione ortogonale di una calotta sull'altra, fatta ortogonalmente all'iperpiano tangente comune, realizza fra le due calotte una *isometria* di ordine h.

(6) Come risulta dal seguito, i termini indicati sono gli unici che interessano.

(7) Per comodità, non ci atteniamo qui alle convenzioni sugli indici indicate al n. 1.

Notiamo, ora, che è:

$$2\,\partial_{[h}(c^{(\alpha}_{i]j}c^{\beta)}_{k}) = 2\,c^{(\alpha}_{[hi]j}c^{\beta)}_{k} + 2\,c^{(\alpha}_{k[h}c^{\beta)}_{i]j} = 2\,c^{(\alpha}_{k[h}c^{\beta)}_{i]j} \quad (7),$$

giacché $c^{\alpha}_{hij} = 0$ se $\alpha = 2$, e altrimenti è simmetrico negli indici h, i, j. Perciò:

$$(5.2) \qquad R_{hijk} = (1/2)\,c^{(2}_{k[h}c^{2)}_{i]j} + (2/3!)\,c^{(2}_{k[h}c^{3)}_{i]j} +$$
$$+ 2\,[(1/2)^4\,c^{2}_{j[h}c^{2}_{i]k}\,\delta^{qm}\,c^{2}_{q}\,c^{2}_{m} + (1/3!)^2\,c^{3}_{k[i}c^{3}_{j]h} + (1/4!)\,c^{(2}_{k[h}c^{4)}_{i]j}] + [\geq 4]_x .$$

Mediante questa calcoliamo infine:

$$\nabla_l R_{hijk} = \partial_l R_{hijk} - \Gamma^{p}_{hl} R_{pijk} - \Gamma^{p}_{il} R_{hpjk} - \Gamma^{p}_{jl} R_{hipk} - \Gamma^{p}_{kl} R_{hijp} =$$
$$= \partial_l R_{hijk} - 2\,R_{jkp[i}\Gamma^{p}_{h]l} - 2\,R_{hip[k}\Gamma^{p}_{j]l} .$$

Si osservi anche qui che è:

$$\partial_1 (c^{(\alpha}_{k[h}c^{\beta)}_{i]j}) = c^{(\alpha}_{lk[h}c^{\beta)}_{i]j} + c^{(\alpha}_{k[h}c^{\beta)}_{i]jl} = c^{(\alpha}_{lk[h}c^{\beta)}_{i]j} + c^{(\alpha}_{lj[i}c^{\beta)}_{h]k} =$$
$$= c^{(\alpha}_{lk[h}c^{\beta)}_{i]j} - c^{(\alpha}_{lj[h}c^{\beta)}_{i]k} = 2\,c^{(\alpha}_{l[k[h}c^{\beta)}_{j]i]} \quad (7).$$

Se notiamo che le derivate seconde di c^2 sono costanti, e quindi le terze sono identicamente nulle, e inoltre che $\partial_l(\delta^{qm}\,c^{2}_{q}\,c^{2}_{m}) = 2\,\delta^{qm}\,c^{2}_{ml}\,c^{2}_{q}$, si ha in definitiva:

$$(5.3) \qquad \nabla_l R_{hijk} = (2/3!)\,c^{3}_{l[k[h}c^{2}_{j]i]} + (1/2)^2\,\delta^{qp}\,c^{2}_{q}\,(c^{2}_{j[h}c^{2}_{i]k}c^{2}_{lp} +$$
$$+ c^{2}_{p[j}c^{2}_{k][i}c^{2}_{h]l} + c^{2}_{p[i}c^{2}_{h][j}c^{2}_{k]l}) + [4/(3!)^2]\,c^{3}_{l[k[h}c^{3}_{j]i]} + (2/4!)\,c^{4}_{l[k[h}c^{2}_{j]i]} + [\geq 2]_x .$$

6. DETERMINAZIONE E STUDIO DELLE CONDIZIONI DI SIMMETRIA. – Come si è detto, le condizioni di simmetria di V_n:

$$(6.1) \qquad \nabla_l R_{hijk} = 0 ,$$

portano che, nella (5.3), si annullino il termine privo delle x^i e, identicamente, quello di primo grado nelle x^i. Cominciamo allora dalla prima condizione (simmetria in O), la quale, ponendo

$$(6.2) \qquad c^{\lambda} \equiv c_{i_1 \ldots i_\lambda}\,x^{i_1}\,x^{i_2} \ldots x^{i_\lambda} \quad (7)$$

(con le $c_{i_1 \ldots i_\lambda}$ simmetriche in tutti gli indici) si scrive:

$$(6.3) \qquad c_{l[k[h}c_{j]i]} = 0 ,$$

cioè

$$(6.4) \qquad c_{lkh}\,c_{ij} - c_{lki}\,c_{hj} - c_{ljh}\,c_{ik} + c_{lji}\,c_{kh} = 0 .$$

Supponiamo ora, e nei numeri seguenti, fino a contrario avviso, che il punto O sia *non parabolico*, cioè che la matrice (c_{ij}) sia non singolare, e introduciamo gli elementi della matrice inversa, $c^{ij} = c^{ji}$. Se allora si moltiplicano ambo i membri della (6.4) per c^{ij}, e si somma rispetto agli indici muti i, j, si ha:

$$(6.5) \qquad (n-2)\, c_{lkh} = -\, c_{lij}\, c^{ij}\, c_{kh},$$

da cui, moltiplicando per c^{hk} e sommando rispetto ad h, k:

$$c_{lij}\, c^{ij} = 0\,;$$

e poiché si è supposto $n > 2$, la (6.5) ci fornisce:

$$(6.6) \qquad c_{lkh} = 0\,;$$

ed è ovvio che i valori (6.6) soddisfano alla (6.4).

Possiamo concludere che, allora e allora soltanto che, in O, vale la (6.1), si ha nello sviluppo (3.1):

$$(6.7) \qquad c^3 \equiv 0\,.$$

Si verifica facilmente che la (6.7) è condizione necessaria e sufficiente affinché O sia un *vertice* della nostra V_n (cioè un punto tale che la circonferenza osculatrice alla generica sezione piana normale per O sia iperosculatrice). Dunque:

Se una $V_n \subset E^{n+1}$ *è simmetrica, ogni suo punto non parabolico è un vertice* (8).

7. Passiamo ora a imporre che sia nullo identicamente il termine di primo grado nelle x^i, che compare a secondo membro della (5.3). Tenendo conto della (6.7) (e sempre nell'ipotesi che (c_{ij}) sia non singolare), la condizione richiesta è:

$$(7.1) \qquad c_{rl[k[h}c_{j]i]} = \delta^{pq}\, c_{qr}(c_{j[i}c_{h]k}c_{lp} + c_{p[j}c_{k][h}c_{i]l} + c_{p[h}c_{i][j}c_{k]l})\,;$$

se facciamo le posizioni

$$(7.2) \qquad \pi_{kh} = c_{rlkh}\, c^{rl} = \pi_{hk} \quad ; \quad \delta^{pq}\, c_{pq} = C\,,$$

dalla (7.1) si ha facilmente:

$$\pi_{[k[h}c_{j]i]} = C c_{j[i}c_{h]k} + 2\,\delta^{lp}\, c_{p[h}c_{i][j}c_{k]l}\,,$$

cioè

$$\pi_{kh}\, c_{ij} - \pi_{ki}\, c_{hj} - \pi_{jh}\, c_{ik} + \pi_{ji}\, c_{hk} = 2\,[C\,(c_{ij}\, c_{hk} - c_{jh}\, c_{ik}) +$$
$$+\, \delta^{lp}\,(c_{ph}\, c_{ij}\, c_{kl} - c_{pi}\, c_{hj}\, c_{kl} - c_{ph}\, c_{ik}\, c_{jl} + c_{pi}\, c_{hk}\, c_{jl})]\,;$$

questa, moltiplicando ambo i membri per c^{ij} (e sommando rispetto a i, j) ci dá, tenendo conto della seconda (7.2):

$$(7.3) \qquad (n-2)\, \pi_{kh} + \pi_{ij}\, c^{ij}\, c_{kh} = 2\,[nC c_{hk} + (n-2)\, \delta^{lp}\, c_{ph}\, c_{kl}]\,,$$

(8) Non è escluso che già da questa proposizione si possa dedurre che la V_n considerata è un'ipersfera, nel qual caso basterebbe supporre la varietà di classe C^4, che è d'altronde il minimo che si possa richiedere per poter parlare della derivata convariante del tensore di curvatura (cfr. (3)).

da cui, moltiplicando per c^{hk} e sommando:

$$(n-1)\,\pi_{ij}\,c^{ij} = (n-1)(n+2)\,\mathrm{C}\,,$$

e giacché $n \neq 1$,

$$\pi_{ij}\,c^{ij} = (n+2)\,\mathrm{C}\,, \tag{7.4}$$

che, sostituita in (7.3) ci dà, essendosi supposto $n > 2$

$$\pi_{hk} = \mathrm{C}c_{hk} + 2\,\delta^{lp}\,c_{ph}\,c_{kl}\,, \tag{7.5}$$

Torniamo ora alla (7.1) che, moltiplicata per c^{ij} (e sommando), diventa (si tenga conto che c_{rlhk} è simmetrica in tutti gli indici):

$$(n-2)\,c_{rlhk} + \pi_{rl}\,c_{hk} = 2\,\delta^{pq}\,c_{qr}\,[nc_{hk}\,c_{lp} + (n-2)\,(c_{p(h}c_{k)l}]\,. \tag{7.6}$$

Per questa e la (7.4) si ha allora:

$$(n-2)\,c_{rlhk} = 2\,\delta^{pq}\,c_{qr}\,[(n-1)\,c_{hk}\,c_{lp} + (n-2)\,c_{p(h}c_{k)l}] - \mathrm{C}c_{rl}\,c_{hk}\,. \tag{7.7}$$

Se da questa si sottrae l'analoga che si ha scambiando gli indici r, l, otteniamo:

$$\delta^{pq}\,c_{qr}\,c_{p(h}c_{k)\,l} = \delta^{pq}\,c_{ql}\,c_{p(h}c_{k)\,r}\,.$$

Moltiplichiamo ora questa per $c^{kl}\,c^{rj}$, e sommiamo: avremo così le seguenti condizioni nelle c_{ij}, necessarie perché le (7.1) siano compatibili:

$$c_{ij} = (1/n)\,\mathrm{C}\delta_{ij}\,;$$

ora, $\mathrm{C} = \delta^{ij}\,c_{ij}$ non può essere nullo, perché altrimenti (c_{ij}) non potrebbe avere rango massimo; potremo perciò porre $1/\mathrm{R} = \mathrm{C}/n$, $(\mathrm{R} \neq 0)$ e scrivere

$$c_{ij} = (1/\mathrm{R})\,\delta_{ij} \quad ; \quad \mathrm{C} = n/\mathrm{R}\,; \tag{7.8}$$

dopo di che dalla (7.7) si hanno, essendo $n > 2$, le espressioni desiderate di c_{rlhk}:

$$(1/\mathrm{R}^3)\,(\delta_{hk}\,\delta_{rl} + \delta_{rh}\,\delta_{kl} + \delta_{rk}\,\delta_{hl})\,. \tag{7.9}$$

Si verifica subito allora che le c_{rlhk} or ora determinate (sono simmetriche in tutti gli indici e) soddisfano di fatto, assieme alla c_{ij} date dalle (7.8), alla (7.1).

8. INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEI RISULTATI DEI NUMERI 6, 7. – Per le (7.8,9) risulta:

$$c^2 \equiv (1/\mathrm{R})\sum_{1}^{n}{}_i\,(x^i)^2 \quad , \quad c^4 \equiv (3/\mathrm{R}^3)\left[\sum_{1}^{n}{}_i\,(x^i)^2\right]^2 + [\geq 5]_x$$

e quindi, anche per la (6.7), si ha:

$$x^{n+1} = (1/2\,\mathrm{R})\sum_{1}^{n}{}_i\,(x^i)^2 + (1/8\,\mathrm{R}^3)\left[\sum_{1}^{n}{}_i\,(x^i)^2\right]^2 + [\geq 5]_x\,; \qquad \mathrm{R} \neq 0\,. \tag{8.1}$$

La (8.1) ci dice ovviamente che la calotta del 4° ordine della V_n in considerazione appartiene a una *sfera* di raggio $|R|$; poiché O è un punto qualunque (non parabolico), già da ciò si può dedurre che: *se tutti i punti di una regione di una* $V_n \subset E^{n+1}$ *sono non parabolici, e la metrica indotta su* V^n *dall'ambiente è simmetrica, la regione stessa appartiene a una sfera di* E^{n+1}.

Possiamo ottenere lo stesso fatto con la seguente argomentazione, che evita l'uso delle calotte.

Osserviamo allo scopo che la (7.8) esprime che la seconda forma fondamentale, di V_n valutata in O, risulta proporzionale (con fattore $1/R$ non nullo) alla prima forma fondamentale; poiché, per ipotesi, O è un punto qualunque della regione considerata, potremo scrivere, con riferimento a un qualunque sistema di coordinate locali [in uno qualsiasi degli aperti ricoprenti la V_n]:

$$b_{ij} = k g_{ij} \qquad (k \neq 0), \tag{8.2}$$

ove si è indicato, come d'uso, con b_{ij} la seconda forma fondamentale di $V_n \subset E^{n+1}$, e, a priori, k è funzione del punto (di classe almeno C^2, come b_{ij}).

Ricordiamo d'altra parte le equazioni di Gauss e Codazzi per una $V_n \subset E^{n+1}$:

$$R_{hijk} = -2\, b_{[h[j} b_{i]k]}, \tag{8.3'}$$

$$\nabla_{[h} b_{i]j} = 0. \tag{8.3''}$$

Derivando ora covariantemente la (8.2), e servendosi della (8.3'') si ha subito:

$$2\nabla_{[h} b_{i]j} = 0 = k_h g_{ij} - k_i g_{hj}, \qquad (k_i = \partial_i k),$$

che, moltiplicata per g^{ij}, e sommando rispetto ad i, j, fornisce $k_i = 0$; k è dunque costante, ma allora per la (8.3'') è:

$$R_{hijk} = -2 k^2 g_{[h[j} g_{i]k]} \qquad (k \text{ costante} \neq 0), \tag{8.4}$$

che ci dice che la metrica indotta in V_n dall'ambiente è a *curvatura costante positiva* k^2 (9).

9. Viceversa, se la metrica indotta in V_n $(n > 2)$ è a curvatura costante, non nulla K_0 (10), si ha

$$R_{hijk} = -2 K_0 g_{[h[j} g_{i]k]}; \tag{9.1}$$

il confronto di questa con la (8.3') ci indica allora che le matrici $(\sqrt{K_0}\, g_{ij})$, (b_{ij}) hanno uguali e non tutti nulli (per essere $K_0 \neq 0$) i minori omologhi del secondo ordine (cioè formati con le stesse linee); ma allora, come è noto (ved. per esempio [1], pp. 517 sgg. (11)), è necessariamente:

$$b_{ij} = \pm \sqrt{K_0}\, g_{ij} \tag{9.2}$$

(e quindi, se V_n è reale, deve essere $K_0 > 0$).

(9) In realtà, questo ragionamento vale anche se $k = 0$.

(10) Risulterà poi subito che deve essere $K_0 > 0$.

(11) In [1] si trova anche, sostanzialmente, il risultato dell'ultima parte del n. 8.

Vale dunque la (8.2) la quale, come si sa, esprime che in ogni punto le curvature principali di V_n sono fra loro uguali (e non nulle). Abbiamo dunque che: *in una regione di una* $V_n \subset E^{n+1}$ *simmetrica a punti non parabolici (le curvature principali sono in ogni punto fra loro uguali e) la metrica indotta è a curvatura costante (necessariamente positiva)*. Ma, per un classico risultato ([1], pp. 554–556), le uniche ipersuperficie di E^{n+1} $(n > 2)$ a curvatura costante positiva sono le sfere, e resta quindi provato di nuovo il risultato enunciato al n. 8.

10. IL CASO DI (c_{ij}) SINGOLARE. – Studiamo ora l'ipotesi che la matrice (c_{ij}) sia singolare (O sia cioè un punto parabolico), e precisamente di rango $p \leq n - 1$, ma maggiore di 2. In tal caso potremo ovviamente scegliere il riferimento ortogonale di guisa che si annullino tutte le c_{ij} con uno almeno degli indici $> p$; sarà opportuno allora introdurre nuove serie di indici, e precisamente: indici greci minuscoli variabili da 1 a p, e indici latini maiuscoli variabili da $p + 1$ ad n [gli indici latini minuscoli variando ancora da 1 ad n], cosicché sarà:

$$c_{\lambda B} = c_{AB} = 0 \quad ; \quad \operatorname{Det}(c_{\lambda\sigma}) \neq 0 . \tag{10.1}$$

Nella (6.4) occorre ora distinguere vari casi che, tenuto conto della emisimmetria della (6.4) stessa in k, j e in i, h e della simmetria nelle coppie (kj), (hi), si riducono ai seguenti:

$$\begin{array}{rcccc} & h & i & k & j \\ i) & A & B & C & D \\ ii) & A & \lambda & C & D \\ iii) & A & B & \sigma & \delta \\ iv) & A & \lambda & \sigma & D \\ v) & A & \lambda & \sigma & \delta \\ vi) & \varepsilon & \lambda & \sigma & \delta . \end{array} \tag{10.2}$$

È subito visto però che nei casi i), ii), iii), le (6.4), in virtù delle (10.1), svaniscono; iv) ci dà invece $c_{lAD}\, c_{\lambda\sigma} = 0$, cioè:

$$c_{HAD} = c_{\pi AD} = 0 . \tag{10.3}$$

v) si riduce poi, tenuto conto della (10.3) a:

$$c_{\pi\sigma A}\, c_{\lambda\delta} - c_{\pi\delta A}\, c_{\lambda\sigma} = 0 ,$$

da cui, moltiplicando per $c^{\lambda\delta}$ [elemento di $(c_{\lambda\sigma})^{-1}$, che esiste per la seconda delle (10.1)] si ricava $(p - 1)\, c_{\pi\sigma A} = 0$, ossia $(p > 2)$

$$c_{\pi\sigma A} = 0 . \tag{10.4}$$

Passiamo infine al caso vi) che, tenendo conto che tutte le c_{hij} in cui uno almeno degli indici sia latino maiuscolo sono già nulle per le (10.3,4), dà luogo all'equazione:

$$c_{[\pi\,[\sigma\,[\varepsilon}\,c_{\delta]\,\lambda]} = 0. \tag{10.5}$$

Su questa, *avendo supposto* $p > 2$, possiamo ragionare come sulla (6.4), e dedurre $c_{\pi\sigma\varepsilon} = 0$; di guisa che, anche nel caso attuale è $c_{hij} = 0$, ossia:

$$c^3 \equiv 0\,, \tag{10.6}$$

cioè: O è per la nostra V_n un *vertice*.

11. Passiamo ora allo studio delle (7.1); anche qui distingueremo i casi *i*)$\cdots$*vi*) del n. 10; pure ora nelle ipotesi *i*), *ii*) *iii*), le (7.1) svaniscono mentre *iv*) e *v*) ci dànno:

$$c_{\mathrm{ABCD}} = c_{\delta\mathrm{BCD}} = c_{\delta\varepsilon\mathrm{CD}} = c_{\delta\varepsilon\lambda\mathrm{D}} = 0\,, \tag{11.1}$$

mentre, per le ultime equazioni, *vi*) dà luogo alla (7.1) stessa, in cui tutti gli indici sono però greci, di guisa che può scriversi:

$$c_{\lambda\sigma} = (1/\mathrm{R}')\,\delta_{\lambda\sigma} \qquad (\mathrm{R}' \neq 0)\,, \tag{11.2}$$

nonché:

$$c^2 \equiv (1/\mathrm{R}')\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\,(x^\lambda)^2 \quad ; \quad c^4 \equiv (3/\mathrm{R}'^3)\left[\sum_{1}^{p}{}_{\lambda}\,(x^\lambda)^2\right]^2. \tag{11.3}$$

Di queste, la prima esprime che, in O, le curvature principali di V_n (soluzioni dell'equazione Det $(kg_{ij} - b_{ij} = 0)$ distinte sono due, delle quali una, nulla, ha molteplicità $n - p$, mentre l'altra non nulla, vale $1/\mathrm{R}'$ ed ha molteplicità p.

Per le (11.3), lo sviluppo (3.1) si scrive ora:

$$x^{n+1} = (1/2\,\mathrm{R}')\sum_{1}^{p}{}_{\lambda}\,(x^\lambda)^2 + (8/\mathrm{R}'^3)\left[\sum_{1}^{p}{}_{\lambda}\,(x^\lambda)^2\right]^2 + [\geq 5]_x\,, \qquad \mathrm{R}' \neq 0\,, \tag{11.4}$$

e si vede subito che questa calotta di 4° ordine appartiene al cilindro di equazione:

$$\Sigma\,(x^\lambda)^2 + (x^{n+1})^2 - 2\,\mathrm{R}'\,x^{n+1} = 0\,, \tag{11.5}$$

generato dagli $\infty^p\,\mathrm{E}^{n-p}$ che proiettano ortogonalmente una sfera di raggio R' appartenente allo $\mathrm{E}^{p+1} : x^{\mathrm{A}} = x^{n+1} = 0$, per il quale le curvature principali sono, in ogni punto, soltanto due distinte, e *costanti*: l'una, nulla, di molteplicità $n - p$, mentre la seconda, multipla di ordine p, vale $\mathrm{R}' \neq 0$. Ciò significa che, per la nostra V_n, le curvature principali sono *stazionarie*; poiché O è un punto qualsiasi, possiamo dedurre: *Se in tutti i punti di una regione di una* $V_n \subset \mathrm{E}^{n+1}$ *la metrica indotta dall'ambiente è simmetrica e il rango della seconda forma fondamentale è* p $(2 < p < n)$, *in ogni punto vi sono solo due curvature principali distinte (di molteplicità* p *ed* $n - p$ *rispettivamente) e queste sono costanti.*

Si può allora applicare un risultato di A. Fialkow (ved. [2], teor. 6. n. 2), e concludere che la considerata regione di V_n appartiene necessariamente a un cilindro che proietta ortogonalmente una sfera $S^p \subset E^{n+1}$. Dunque: *Se la metrica indotta dall'ambiente in una (regione di) $V_n \subset E^{p+1}$ è simmetrica, e il rango della seconda forma fondamentale è (in ogni punto) uguale a p $(2 < p < n)$, la regione appartiene necessariamente a cilindro che proietta ortogonalmente una sfera di* E^{p+1} (e viceversa, come già si è notato al n. 2).

12. IL CASO DI $p < 3$. – Resta infine da considerare l'ipotesi in cui il rango di (c_{ij}) sia minore di 3. Sia dapprima $p = 2$. Nelle notazioni del n. 10, potremo ancora trarre dalle (10.1) e (6.4) la conseguenza che sono nulli tutti i coefficienti di c^3, salvo, *al più*, c_{111}, c_{112}, c_{122}, c_{222}. Ma, appunto poiché è $p = 2$, il caso *vi*) del citato numero dà luogo a due sole relazioni, e precisamente:

$$(12.1) \qquad \begin{cases} c_{111}\, c_{22} - 2\, c_{112}\, c_{12} + c_{122}\, c_{11} = 0 \\ c_{112}\, c_{22} - 2\, c_{122}\, c_{12} + c_{222}\, c_{11} = 0\,, \end{cases}$$

dalle quali evidentemente *non* si può dedurre $c^3 \equiv 0$.

Esse, tenuto conto dell'ipotesi $p = 2$, ci dicono che il prodotto delle uniche due curvature principali di V_n non nulle (in O) è in O stazionario.

Quanto alle (7.1), che esprimono l'annullarsi dei termini di 1° ordine nelle x^i nello sviluppo di $\nabla_l R_{hijk}$, esse *non* si possono scrivere, giacché ora non è più $c^3 \equiv 0$; in luogo di esse varranno relazioni che si ottengono subito dalle (5.3), e che non scriviamo per brevità: da queste si vede però quasi immediatamente che, anche nel caso attuale, sono nulli tutti i coefficienti di c^4, salvo al più, $c_{\lambda\pi\sigma\varepsilon}$ $(\lambda, \pi, \sigma, \varepsilon = 1, 2)$, *di guisa che la calotta del 4° ordine di* V_n *appartiene a un cilindro luogo di* ∞^2 E^{n-2} *che proiettano ortogonalmente una superficie dell'* $E^3 : x^4 = x^{n+1} = 0$, *la quale, per le* (12.1) *ha in* O *curvatura gaussiana stazionaria non nulla (per essere* $p > 1$). Ma questa volta non si può più concludere nulla sull'eguaglianza o meno delle curvature principali di V_n in O e tanto meno applicare il citato risultato di Fialkow. Si può tuttavia asserire, poiché O è un punto qualunque che *una* V *simmetrica di* E^{n+1}, *tale che in ogni punto la seconda forma fondamentale abbia rango* 2, *è necessariamente luogo di* E^{n-2}, *lungo ciascuno dei quali è fisso l'iperpiano tangente*; *inoltre la curvatura riemanniana relativa alle giaciture 2-dimensionali ortogonali agli spazi generatori (che non formano necessariamente una distribuzione integrabile) è costante.*

13. Se, infine, $p > 2$, non occorre fare alcun calcolo: difatti, se $p = 1$, si tratterà necessariamente di una *sviluppabile* (luogo degli spazi osculatori a una curva), la quale, per le ipotesi fatte, non può avere singolarità al finito, e quindi è necessariamente un cilindro, luogo di E^{n-1} proiettanti una curva (di E^2). Se poi $p = 0$, si tratta di un iperpiano, e vale quindi il risultato enunciato al n. 2.

14. CONSIDERAZIONI FINALI. – I ragionamenti dei numeri precedenti hanno carattere locale e valgono quindi – a priori – solo per porzioni sufficientemente limitate della V_n in esame; i risultati ottenuti hanno tuttavia carattere globale nelle ipotesi precisate di differenziabilità e di connessione; infatti, e supposto l'intero p più volte incontrato maggiore di 2, non può avvenire che una V_n simmetrica (connessa) si componga di pezzi corrispondenti a valori differenti di p; basta scrivere infatti l'equazione della V_n – che, a meno di un movimento di E^{n+1} – è;

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^p)^2 + (x^{n+1})^2 = R^2$$

per constatare che un cambiamento del rango considerato si tradurrebbe in discontinuità per esempio della seconda forma fondamentale, ciò che non può essere essendosi supposta V_n almeno di classe C^5. Si osservi infine che, lasciando impregiudicato il caso $p = 2$, i risultati relativi a $p = 0$ ovvero 1 sono senz'altro globali.

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, vol. II, parte II, 3ª ed., Bologna (1927),

[2] A. FIALKOW, *Hypersurfaces of a Space of Constant Curvature*, « Ann. of. Math. » (2), 39, 4, 762–785 (1938).

[3] J. A. SCHOUTEN, *Ricci-Calculus*, 2nd. ed., Berlin (1954).

[4] T. J. WILLMORE, *An Introduction to Differential Geometry*, Oxford (1959).