Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mirosław Krzyżański

Sur la solution fondamentale de l'equation linéaire normale du type parabolique dont le dernier coefficient est non borné. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.4, p. 471–476.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_4_471_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Analisi matematica. — *Sur la solution fondamentale de l'équation linéaire normale du type parabolique dont le dernier coefficient est non borné.* Nota II di MIROSŁAW KRZYŻAŃSKI, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

7. Nous supposons maintenant que les coefficients $a_{ij}(t, X)$ et $b_j(t, X)$ de l'équation (1) satisfont aux hypothèses exposées au n–ro 1 et que le coefficient $c(t, X)$ satisfait aux hypothèses $(\bar{H})$ et en particulier à l'inégalité (2). Posons, pour $(t, X) \in \mathcal{C}$,

$$c_n(t, X) = \begin{cases} c(t, X) & \text{lorsque } c(t, X) \geq -n \\ -n & \text{lorsque } c(t, X) < -n \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{9}$$

Il est évident qu'on a

$$c_n(t, X) \leq A^2 |X|^2 + |B| + n \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

et par suite les fonctions $c_n(t, X)$ satisfont aux hypothèses (H) (voir n–ro 1), le coefficient A^2 de $|X|^2$ étant indépendant de n. Il en résulte l'existence des solutions fondamentales $U_n(t, X; s, Y)$ des équations

$$F_0(u) + c_n(t, X)u = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{10}$$

qui sont déterminées dans un domaine commun $\mathcal{S}$, indépendant de n (voir n–ro 2 et [5]). D'après les théorèmes 6 et 7 du travail [5] on a $U_n(t, X; s, Y) \geq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ et la suite $\{U_n(t, X; s, Y)\}$ est monotone non croissante dans $\mathcal{S}$. Elle converge donc dans $\mathcal{S}$ vers une fonction $\mathfrak{U}(t, X; s, Y)$ non négative. Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 4. – *La fonction* $\mathfrak{U}(t, X; s, Y)$ *constitue la solution fondamentale de l'équation* (1).

Démonstration. – Nous commençons par démontrer que la fonction $\mathfrak{U}(t, X; s, Y)$ satisfait à la condition 1° intervenant dans la définition de la solution fondamentale (n–ro 2). Soit K une sphère $|X| \leq R$ de $\mathcal{E}^m$, $K^{(i)}$ l'intérieur de cette sphère, F(K) sa surface. Considérons le domaine $\Delta = K^{(i)} \times (t_0, T)$ et soit $G_0(t, X; s, Y)$ la fonction de Green relative à l'équation $F_0(u) = 0$ et au domaine Δ. Soit $u(t, X)$ une solution de l'équation (10) régulière dans la fermeture $\bar{\Delta}$ du domaine Δ et $\bar{t}$ un nombre de l'intervalle (t_0, T). On a, pour $X \in K^{(i)}$, $\bar{t} < t < T$, la formule suivante

$$u(t, X) = \int_K G_0(t, X; \bar{t}, \Xi)\, u(\bar{t}, \Xi)\, d\Xi$$

(*) Nella seduta del 10 marzo 1962.

$$+\int_{\bar{t}}^{t} d\tau \int_{F(K)} u(\tau, \Xi) \frac{\partial G_0(t, X; \tau, \Xi)}{\partial \nu} d\sigma_\Xi$$

$$+\int_{\bar{t}}^{t} d\tau \int_{K} G_0(t, X; \tau, \Xi)\, c_n(\tau, \Xi)\, u(\tau, \Xi)\, d\Xi,$$

$\partial G_0/\partial \nu$ étant la dérivée transversale (voir J. Hadamard [2], p. 87) de G_0 en tant que fonction du point (τ, Ξ) (6); inversement, une fonction $u(t, X)$ continue dans le domaine $K \times [\bar{t}, T)$ et définie par cette formule à l'intérieur de ce domaine, y satisfait à l'équation (10). Désignons par $\mathfrak{F}(u(\tau, \Xi), c_n(\tau, \Xi))$ le second membre de cette formule. En particulier, en posant $u(t, X) = U_n(t, X; s, Y)$, où $t_0 < s < \bar{t} < t < T$, $X \in K^{(i)}$, $Y \in \mathcal{E}^m$, nous obtenons l'égalité

$$U_n(t, X; s, Y) = \mathfrak{F}(U_n(\tau, \Xi; s, Y), c_n(\tau, \Xi)).$$

Or il résulte de (9) qu'il existe un nombre N tel que $c_n(t, X) = c(t, X)$ pour $(t, X) \in \Delta$, $n > N$, on a donc

$$U_n(t, X; s, Y) = \mathfrak{F}(U_n(\tau, \Xi; s, Y), c(\tau, \Xi)) \qquad \text{pour } n > N.$$

L'application du théorème de Lebesgue (voir [6], p. 29 et [7], p. 49) permet d'en déduire la formule

$$\mathfrak{U}(t, X; s, Y) = \mathfrak{F}(\mathfrak{U}(\tau, \Xi; s, Y), c(\tau, \Xi)) \tag{11}$$

pour $\bar{t} < t < T$, $X \in K^{(i)}$. Étant donné un point $(t, X; s, Y)$ de $\mathcal{S}$ on peut choisir les nombres R et $\bar{t}$ de sorte que $X \in K^{(i)}$ et $s < \bar{t} < t < T$. Il résulte donc de la formule (11) que la fonction $\mathfrak{U}(t, X; s, Y)$ jouit de la propriété 1° intervenant dans la définition de la solution fondamentale.

Il reste de démontrer que la fonction $\mathfrak{U}(t, X; s, Y)$ jouit de la propriété 2°. Soit $\varphi(Y)$ une fonction continue et non négative dans $\mathcal{E}^m$, s'annulant en dehors d'une sphère K_φ. Choisissons le nombre R de façon que $K_\varphi \in K^{(i)}$. On a, pour $X \in \mathcal{E}^m$ et pour tout n entier positif, l'égalité

$$\lim_{\substack{t \to s \\ X \to \mathbf{X}}} \int_{\mathcal{E}^m} U_n(t, X; s, Y)\, \varphi(Y)\, dY = \varphi(\mathbf{X});$$

comme

$$0 \le \mathfrak{U}(t, X; s, Y) \le U_n(t, X; s, Y) \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{12}$$

dans $\mathcal{S}$, on a

$$0 \le \overline{\lim_{\substack{t \to s \\ X \to \mathbf{X}}}} \int_{\mathcal{E}^m} \mathfrak{U}(t, X; s, Y)\, \varphi(Y)\, dY \le \varphi(\mathbf{X}) \qquad \text{pour } \mathbf{X} \in \mathcal{E}^m. \tag{13}$$

(6) On déduit cette formule de la formule (2.2) de [3].

D'autre part, soit $G_n(t, X; s, Y)$ la fonction de Green relative à l'équation (10) et au domaine Δ. Il résulte du théorème 2 qu'on a $G_n(t, X; s, Y) = G(t, X; s, Y)$ pour n assez élevé, $G(t, X; s, Y)$ étant la fonction de Green relative à l'équation (1) et au domaine Δ. On a donc, d'après le théorème 3, $G(t, X; s, Y) \leq U_n(t, X; s, Y)$ pour n assez élevé, en suite de quoi

$$G(t, X; s, Y) \leq \mathfrak{U}(t, X; s, Y) \qquad \text{pour} \quad X \in K, \quad Y \in K, \quad t_0 \leq s < t < T.$$

Il en résulte l'inégalité

$$(14) \quad \underline{\lim}_{\substack{t \to s \\ X \to \mathbf{X}}} \int_{\mathcal{E}^m} \mathfrak{U}(t, X; s, Y)\, \varphi(Y)\, dY \geq \lim_{\substack{t \to s \\ X \to \mathbf{X}}} \int_{K} G(t, X; s, Y)\varphi(Y)\, dY = \varphi(\mathbf{X})$$

$$\text{pour} \quad \mathbf{X} \in K^{(i)}.$$

On déduit des inégalités (13) et (14) l'égalité

$$(15) \quad \lim_{\substack{t \to s \\ X \to \mathbf{X}}} \int_{\mathcal{E}^m} \mathfrak{U}(t, X; s, Y)\, \varphi(Y)\, dY = \varphi(\mathbf{X}) \qquad \text{pour} \quad \mathbf{X} \in K^{(i)}, \quad t_0 \leq s < T.$$

Si $\mathbf{X} \notin K_{\varphi}$, le premier membre de (15) est égal à zéro en vertu de (13). L'égalité (15) subsiste donc pour $\mathbf{X} \in \mathcal{E}^m$.

Nous avons supposé que la fonction $\varphi(Y)$ est non négative. Pour ètablir l'égalité (15) dans le cas général, on représente $\varphi(Y)$ sous la forme $\varphi(Y) = \varphi_1(Y) - \varphi_2(Y)$, les fonctions $\varphi_i(Y)$ $(i = 1, 2)$ étant continues et non négatives.

8. La solution fondamentale $\mathfrak{U}(t, X; s, Y)$ jouit des propriétés analogues à celles de la solution fondamentale déterminée dans [5]. En particulier elle est non négative et il est aisé de voir que les théorèmes 3 et 7 de [5] s'étendent à la solution fondamentale $\mathfrak{U}(t, X; s, Y)$. On a aussi une inégalité de la forme

$$(16) \qquad \mathfrak{U}(t, X; s, Y) \leq KW(ht, X; hs, Y/\sqrt{K}A, K_1),$$

où $W(t, X; s, Y/\alpha, \beta)$ est la solution fondamentale de l'équation

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{m} W''_{x_i x_i} - W'_t + (\alpha^2 |X|^2 + \beta)W = 0,$$

s'exprimant par la formule (9) exposée dans [5], K, K_1 et h sont des constantes positives (provenant des évaluations de Eidelman relatives aux systèmes paraboliques aux coefficients bornés, voir [1]). Pour obtenir l'inégalité (16), il suffit d'observer que, n étant fixé, l'inégalité (26) de [5] s'applique à la solution fondamentale $U_n(t, X; s, Y)$ de l'équation (10) et de tenir compte de l'inégalité (12) du présent travail.

9. Nous allons démontrer un théorème d'unicité de la solution fondamentale et des théorèmes analogues aux théorèmes 6 et 7 du travail [5] sous les hypothèses beaucoup moins restrictives sur les coefficients de l'équation (1).

Dans la suite de la Note présente nous supposerons, de même que dans la Note [4], que ces coefficients sont définis dans la couche $\mathcal{C}$, les coefficients $a_{ij}(t, X)$ y étant bornés et la forme $\mathfrak{A}[\Lambda]$ (voir n–ro 1) étant définie positive. Nous supposons l'existence des constantes non négatives A_1 et B_1, telles qu'on ait

$$|b_j(t, X)| \leq A_1 |X| + B_1 \qquad \text{pour} \quad (t, X) \in \mathcal{C}.$$

Quant au coefficient $c(t, X)$, nous supposons qu'il satisfait à l'inégalité (2).

Nous commençons par étendre le lemme 2 (n–ro 4) au cas du domaine non borné.

LEMME 3. – *Soit* $V(t, X; s, Y)$ *une fonction déterminée dans l'ensemble* $\mathfrak{D}$ *(voir n–ro 3), le domaine* D *étant non borné dans les directions des axes* x_i. *On suppose que la fonction* $V(t, X, s, Y)$ *est continue dans l'ensemble* $\mathfrak{D}$, *admet les dérivées* V'_{x_i}, $V''_{x_i x_j}$ $(i, j = 1, \cdots, m)$ *et* V'_t *continues à l'intérieur de cet ensemble et satisfait aux conditions suivantes:*

i) *on a* $F(V) \leq 0$ $(F(V) \geq 0)$ *à l'intérieur de* $\mathfrak{D}$, *l'opération* F *étant appliquée à* V *en tant qu'à fonction de* (t, X);

ii) *on a* $V(t, X; s, Y) \geq 0$ (*resp.* $V(t, X; s, Y) \leq 0$) *pour* $(t, X) \in \sigma$, $(s, Y) \in D$;

iii) $\varphi(Y)$ *étant une fonction continue et non négative pour* $Y \in \bar{S}$, *s'annulant en dehors d'une sphère située dans* S, *l'intégrale*

$$I(t, X; s) = \int_{\mathcal{E}^m} V(t, X; s, Y)\, \varphi(Y)\, dY$$

appartient à la classe E_2 (7), *en tant que fonction de* $(t, X) \in D$, *pour* $t_0 \leq s < t < T$, $0 < t - s < T_1$ (*s étant fixé*), *et il existe la limite*

$$\lim_{\substack{t \to s \\ X \to \mathbf{X}}} I(t, X; s) = \psi(\mathbf{X})$$

pour $\mathbf{X} \in S$, $t_0 \leq s < T$, $\psi(X)$ *étant une fonction non négative* (*resp. non positive*) *dans* S.

Ceci étant supposé, on a $V(t, X; s, Y) \geq 0$ (*resp.* $V(t, X; s, Y) \leq 0$) *dans* $\mathfrak{D}$.

Le lemme reste valable lorsque D *devient la couche* $\mathcal{C}$, *c'est à dire* $\mathfrak{D}$ *devient l'ensemble* $\mathcal{S}$ (*σ étant un ensemble vide*).

Démonstration. – Nous introduisons une fonction $z(t, X)$ analogue à celle qui intervient dans la démonstration du lemme 2 (n–ro 4). Cette fonction appartient à la classe E_2 dans $\bar{S} \times [\mathring{s}, T)$ $(0 < \mathring{s} < T)$, satisfait à l'inégalité

(7) Nous appelons classe E_r $(r > 0)$ une classe de fonctions $u(t, X)$ définies dans un domaine non borné dans les directions de axes x_i, satisfaisant à l'inégalité

$$|u(t, X)| \leq M \exp(K |X|^r),$$

M et K étant deux constantes positives qui dépendent en général de la fonction $u(t, x)$ elle-même (voir [5]).

$F(z) \leq 0$ à l'intérieur de cet ensemble et on a $z(t, X) \geq 0$ pour $(t, X) \in \sigma$, $\tilde{s} \leq t < T$ et $z(\tilde{s}, X) \geq 0$ pour $X \in \bar{S}$. Il résulte du théorème 1 de [4] qu'on a $z(t, X) \geq 0$ dans $\bar{S} \times (\tilde{s}, T)$. La démonstration s'achève de même que celle du lemme 2.

10. Étant supposé que les coefficients de l'équation (1) satisfont aux hypothèses exposées au n–ro 9, nous allons démontrer un théorème d'unicité de la solution fondamentale et certains théorèmes concernant les propriétés de cette fonction. De même que dans la partie précédente du présent travail, nous entendons par solution fondamentale de l'équation (1) une fonction $U(t, X; s, Y)$ satisfaisant dans l'ensemble $\mathfrak{S}$ aux conditions 1° et 2° exposées au n–ro 2. Nous allons démontrer un théorème suivant d'unicité de la solution fondamentale.

THÉORÈME 5. – *Il n'existe qu'une solution fondamentale, au plus, de l'équation* (1) *satisfaisant à la condition suivante:*

(C) $\varphi(Y)$ *étant une fonction continue dans* S, *s'annulant en dehors d'une sphère, l'intégrale*

$$\mathfrak{J}(t, X; s) = \int_{\mathcal{E}^m} U(t, X; s, Y)\, \varphi(Y)\, dY$$

$(X \in \mathcal{E}^m, t_0 \leq s < t < T, 0 < t - s < T_1)$ *appartient à la classe* E_2 *pour* $(t, X) \in \mathfrak{C}$.

Démonstration. – Soient $U^{(1)}(t, X; s, Y)$ et $U^{(2)}(t, X; s, Y)$ deux solutions fondamentales de l'équation (1) satisfaisant à la condition **(C)**. En appliquant le lemme 3 (n–ro 9) à la différence $U^{(1)}(t, X; s, Y) - U^{(2)}(t, X; s, Y)$, on démontre que $U^{(1)}(t, X; s, Y) \equiv U^{(2)}(t, X; s, Y)$.

THÉORÈME 6. – *La solution fondamentale de l'équation* (1) *satisfaisant à la condition* **(C)** *(supposée existante) est non négative dans* ($\mathfrak{S}$).

Pour la démonstration on applique le lemme 3 à la solution fondamentale elle–même.

THÉORÈME 7. – *Soient* $U^{(1)}(t, X; s, Y)$ *et* $U^{(2)}(t, X; s, Y)$ *les solutions fondamentales (supposées existantes) des équations*

$$F_0(u) + c^{(i)}(t, X)\, u = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{18}$$

où les coefficients $c^{(i)}(t, X)$ $(i = 1, 2)$ *satisfont à la condition* (2) *et à l'inégalité* $c^{(1)}(t, X) \leq c^{(2)}(t, X)$ *dans la couche* $\mathfrak{C}$. *Si les fonctions* $U^{(i)}(t, X; s, Y)$ $(i = 1, 2)$ *satisfont dans l'ensemble* $\mathfrak{S}$ *à la condition* **(C)**, *on a dans* $\mathfrak{S}$ *l'inégalité*

$$U^{(1)}(t, X; s, Y) \leq U^{(2)}(t, X; s, Y).$$

Démonstration. – Posons $V(t, X; s, Y) = U^{(2)}(t, X; s, Y) - U^{(1)}(t, X; s, Y)$. On a pour $(t, X; s, Y) \in \mathfrak{S}$ (s et Y étant fixés)

$$F_1(V) \equiv F_0(V) + c^{(1)}(t, X)\, V = [c^{(1)}(t, X) - c^{(2)}(t, X)]\, U^{(2)},$$

c'est à dire $F_1(V) \leq 0$. Comme la fonction $V(t, X; s, Y)$ satisfait à la condition (**C**), il résulte du lemme 3 qu'on a $V(t, X; s, Y) \geq 0$ dans $\mathfrak{S}$. Le théorème est ainsi démontré.

OUVRAGES CITÉS.

[1] S. EIDELMAN, *Sur les solutions fondamentales des systèmes paraboliques* (en russe), « Matiematičeskij Sbornik », *38* (80) N° 1, 51–92 (1956).

[2] J. HADAMARD, *Problème de Cauchy*, Paris 1932.

[3] S. ITÔ, *Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems*, « Japan Journal of Math. », *27*, 55–102 (1958).

[4] M. KRZYŻAŃSKI, *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, « Bulletin de l'Acad. Polonaise des Sc. », Ser. des sc. math., astr. et phys., *7*, N° 3, 131–135 (1959).

[5] M. KRZYŻAŃSKI et A. SZYBIAK, *Construction et étude de la solution fondamentale de l'équation linéaire du type parabolique dont le dernier coefficient est non borné*, « Atti dell'Accad. Naz. dei Lincei », Cl. di Sc. fisiche, mat. e natur., ser. VIII, *27*, fasc. 1–2 e 3–4 (1959).

[6] S. SAKS, *Theory of the Integral*, Warszawa 1937.

[7] CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrale de Lebesgue*, Paris 1916.