
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CATALDO AGOSTINELLI

Su una spiegazione magnetoidrodinamica dell'esistenza del campo magnetico terrestre e di quello generale delle stelle. Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 32 (1962), n.5, p.
593–600.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_5_593_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 maggio 1962

Presiede il Presidente GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Magnetoidrodinamica. — *Su una spiegazione magnetoidrodinamica dell'esistenza del campo magnetico terrestre e di quello generale delle stelle.* Nota I^(*) del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

1. In alcuni lavori precedenti ⁽¹⁾ mi sono posta la questione di determinare in una massa fluida incompressibile elettricamente conduttrice, racchiusa in un ellissoide limitato da una parete rigida fissa, il campo magnetico e la velocità delle particelle fluide in ogni punto interno all'ellissoide, essendo dati: la distribuzione della densità di corrente di conduzione e quella del vortice nei punti interni, e la componente normale del campo magnetico in superficie.

È dimostrato che questo problema non può ammettere che una sola soluzione, ma esso richiede che la densità di corrente di conduzione e il vortice soddisfino a due determinate condizioni, che sono poi due equazioni differenziali vettoriali alle derivate parziali.

Ora nel caso particolare in cui le linee di corrente e le linee vorticose si suppongono rette, la densità di corrente e il vortice risultano funzioni soltanto del tempo e non del punto. In questo caso, nell'ipotesi supplementare che la

(*) Presentata nella seduta del 12 maggio 1962.

(1) C. AGOSTINELLI, *Sul moto magnetoidrodinamico di un fluido elettricamente conduttore contenuto in un recipiente fisso a pareti conduttrici essendo assegnata la distribuzione della corrente di conduzione e dei vortici*, « International Journal of Engineering Science », 1962; IDEM, *Su un notevole teorema di equivalenza in magnetoidrodinamica*, « Bollettino della Unione Matematica Italiana », 1962.

componente normale del campo magnetico in superficie sia nulla, ho dimostrato che il problema si risolve completamente con quadrature, mettendo in rilievo un notevole teorema di equivalenza, secondo il quale il problema di moto magnetoidrodinamico considerato è equivalente a quello del moto di un corpo rigido intorno a un punto fisso, le cui molecole sono attratte da un piano fisso con forze proporzionali alla distanza da questo piano (problema di De Brun).

Queste ricerche mi hanno suggerito di vedere se, per questa via, sia possibile dimostrare l'esistenza e la permanenza del campo magnetico terrestre, dovuto a un moto vorticoso della massa liquida interna alla crosta, come pure l'esistenza di un campo magnetico generale che si osserva in diverse stelle, generato dalla rotazione di un nucleo interno, pressoché compatto, premuto dal fluido gassoso che lo circonda e soggetto alla propria gravitazione.

Di questa indagine mi occupo in questo lavoro, ammettendo che il campo magnetico generato dalla massa fluida ellissoidale abbia, in superficie, una componente normale uguale a quella che determinerebbe un dipolo magnetico posto nel centro, e comunque orientato. Inoltre, ponendomi da un punto di vista più generale, ho supposto che la massa fluida, oltre il moto interno vorticoso, abbia un moto d'insieme traslatorio.

Trattandosi di una massa fluida ellissoidale, con riferimento a coordinate ellittiche ho espresso intanto il potenziale di un dipolo in questo sistema di coordinate, calcolando la componente normale in superficie del campo magnetico da esso generato. Dopo ciò, supponendo ancora che la corrente di conduzione e il vortice siano funzioni soltanto del tempo e non del punto, ho dimostrato che il problema si risolve ancora mediante quadrature e che quindi esiste nell'interno dell'ellissoide un moto magnetoidrodinamico vorticoso che, genera un campo magnetico la cui componente normale in superficie assume gli stessi valori di quella che determinerebbe un dipolo magnetico posto nel centro.

Particolarmente importante è il caso in cui l'ellissoide si riduce ad una sfera nel quale il vortice è anche costante rispetto al tempo e il moto interno del nucleo fluido si riduce ad una rotazione rigida uniforme. In tal caso si hanno per le componenti della corrente di conduzione valori variabili periodicamente col tempo, dello stesso periodo di rotazione della massa fluida, mentre le componenti del momento magnetico del dipolo, equivalente al campo interno, risultano funzioni oscillanti del tempo, in generale non periodiche.

Ma se la traslazione d'insieme è uniforme e non è ortogonale all'asse di rotazione della massa fluida, si presenta la circostanza notevole di un fenomeno di risonanza in cui le oscillazioni del momento magnetico del dipolo vanno crescendo indefinitamente col tempo. Ne segue che una traslazione molto prossima al moto uniforme darà luogo ad un momento magnetico del dipolo quasi periodico rispetto al tempo, ma di ampiezza molto grande. Questo risultato può spiegare l'esistenza di stelle, già rivelate dalle osservazioni, con campi magnetici variabili col tempo e di forte intensità.

2. Per ottenere il potenziale di un dipolo magnetico in coordinate ellittiche osserviamo che considerando la particolare funzione potenziale di 1^a

specie (regolare nell'origine) $U = K_1 x + K_2 y + K_3 z = r Y_1$, dove K_1, K_2, K_3 sono costanti, r è la distanza del punto $P(x, y, z)$ dall'origine ed Y_1 è funzione di Laplace di ordine uno, la corrispondente funzione potenziale di 2ª specie (singolare nell'origine e che si annulla all'infinito) è la

$$V = \frac{Y_1}{r^2} = \frac{K_1 x + K_2 y + K_3 z}{r^3}$$

che è proprio il potenziale di un dipolo, il cui momento magnetico ha come componenti secondo gli assi x, y, z , le costanti K_1, K_2, K_3 .

Introducendo allora coordinate ellittiche, esprimendo la U mediante *funzioni di Lamé* e considerando le corrispondenti funzioni di Lamé di 2ª specie, si otterrà il richiesto potenziale di un dipolo in coordinate ellittiche.

Consideriamo per questo l'equazione.

$$(1) \quad \frac{x^2}{\lambda^2 - \alpha^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - \gamma^2} - 1 = 0$$

dove α, β, γ sono delle costanti con $\alpha^2 < \beta^2 < \gamma^2$. Essa, come si sa, al variare di λ rappresenta, nel sistema di coordinate cartesiane x, y, z , delle quadriche omofocali, e precisamente: per $\lambda^2 > \gamma^2$ si hanno ellissoidi; per $\beta^2 < \lambda^2 < \gamma^2$ si hanno iperboloidi ad una falda avvolgentesi intorno all'asse z ; per $\alpha^2 < \lambda^2 < \beta^2$ si hanno invece iperboloidi a due falde aventi l'asse x come asse trasverso.

L'equazione (1), considerata come equazione in λ^2 , è di 3° grado e ammette tre radici positive che indichiamo con ρ^2, μ^2, ν^2 , con

$$(2) \quad \alpha^2 < \nu^2 < \beta^2 < \mu^2 < \gamma^2 < \rho^2.$$

Esse risultano funzioni di x, y, z e assumeremo allora ρ, μ, ν come coordinate ellittiche.

Scrivendo l'identità

$$(3) \quad \frac{x^2}{\lambda^2 - \alpha^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - \gamma^2} - 1 = \frac{(\rho^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \lambda^2)(\nu^2 - \lambda^2)}{(\lambda^2 - \alpha^2)(\lambda^2 - \beta^2)(\lambda^2 - \gamma^2)}$$

si ricavano facilmente i valori di x^2, y^2, z^2 in funzione delle coordinate ellittiche ρ, μ, ν , e si ha

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{(\rho^2 - \alpha^2)(\mu^2 - \alpha^2)(\nu^2 - \alpha^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)} \\ y^2 &= \frac{(\rho^2 - \beta^2)(\mu^2 - \beta^2)(\nu^2 - \beta^2)}{(\beta^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \alpha^2)} \\ z^2 &= \frac{(\rho^2 - \gamma^2)(\mu^2 - \gamma^2)(\nu^2 - \gamma^2)}{(\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2)} \end{aligned} \right.$$

Il sistema di coordinate ρ, μ, ν , è ortogonale e il quadrato dell'elemento lineare in questo sistema è della forma ⁽²⁾.

$$(5) \quad ds^2 = H_1^2 d\rho^2 + H_2^2 d\mu^2 + H_3^2 d\nu^2$$

(2) Cfr. P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, T. 4º, Chap. VI, n. 46 (Paris, Gauthier-Villars, 1932).

con

$$(6) \quad H_1^2 = \frac{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}{A^2}, \quad H_2^2 = \frac{(\mu^2 - \nu^2)(\mu^2 - \rho^2)}{B^2}, \quad H_3^2 = \frac{(\nu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \mu^2)}{C^2}$$

e dove si è posto

$$(7) \quad \begin{cases} A^2 = \frac{1}{\rho^2} (\rho^2 - \alpha^2) (\rho^2 - \beta^2) (\rho^2 - \gamma^2) \\ B^2 = \frac{1}{\mu^2} (\mu^2 - \alpha^2) (\mu^2 - \beta^2) (\mu^2 - \gamma^2) \\ C^2 = \frac{1}{\nu^2} (\nu^2 - \alpha^2) (\nu^2 - \beta^2) (\nu^2 - \gamma^2), \end{cases}$$

essendo A funzione soltanto di ρ , B funzione solo di μ , e C funzione solo di ν .

Ciò premesso, ponendo ora

$$(8) \quad \begin{cases} R_1(\rho) = \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}, \quad M_1(\mu) = \sqrt{\mu^2 - \alpha^2}, \quad N_1(\nu) = \sqrt{\nu^2 - \alpha^2} \\ R_2(\rho) = \sqrt{\rho^2 - \beta^2}, \quad M_2(\mu) = \sqrt{\mu^2 - \beta^2}, \quad N_2(\nu) = \sqrt{\nu^2 - \beta^2} \\ R_3(\rho) = \sqrt{\rho^2 - \gamma^2}, \quad M_3(\mu) = \sqrt{\mu^2 - \gamma^2}, \quad N_3(\nu) = \sqrt{\nu^2 - \gamma^2}, \end{cases}$$

in virtù delle (4) il potenziale elementare di 1^a specie $U = K_1 x + K_2 y + K_3 z$, per mezzo di prodotti di Lamé risulta espresso dalla

$$(9) \quad U = \frac{K_1 R_1 M_1 N_1}{V(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)} + \frac{K_2 R_2 M_2 N_2}{V(\beta^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \alpha^2)} + \frac{K_3 R_3 M_3 N_3}{V(\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2)}$$

dove i prodotti RMN soddisfano all'equazione di Laplace, che in coordinate ellittiche ρ, μ, ν risulta (*loco citato* in ⁽²⁾)

$$(10) \quad (\mu^2 - \nu^2) A \frac{\partial}{\partial \rho} \left(A \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + (\nu^2 - \rho^2) B \frac{\partial}{\partial \mu} \left(B \frac{\partial U}{\partial \mu} \right) + (\rho^2 - \mu^2) C \frac{\partial}{\partial \nu} \left(C \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) = 0$$

e dove ciascuna delle funzioni R, M, N soddisfa a una determinata equazione differenziale ordinaria del 2° ordine. L'equazione che definisce la R ammette un secondo integrale indipendente (di 2^a specie), che indichiamo con S, e il prodotto SMN è ancora soluzione dell'equazione di Laplace. Assumeremo allora come potenziale di un dipolo in coordinate ellittiche l'espressione

$$V = \frac{K_1 S_1 M_1 N_1}{V(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)} + \frac{K_2 S_2 M_2 N_2}{V(\beta^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \alpha^2)} + \frac{K_3 S_3 M_3 N_3}{V(\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2)}$$

che si può scrivere

$$(11) \quad V = K_1 \frac{S_1}{R_1} x + K_2 \frac{S_2}{R_2} y + K_3 \frac{S_3}{R_3} z.$$

Ora se R è una funzione di Lamé di ordine n in ρ , la sua associata S di 2^a specie è data da (*loco citato* in ⁽²⁾, n. 62).

$$(12) \quad S = -(2n + 1) R \int_{\infty}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{R^2 V(\rho^2 - \alpha^2)(\rho^2 - \beta^2)(\rho^2 - \gamma^2)}.$$

Nel nostro caso le funzioni R definite dalle (8) sono di primo ordine in ρ ($n = 1$) e si ha quindi

$$(12') \quad S_i = -3 R_i \int_{\infty}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{R_i^2 R_1 R_2 R_3}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Il valore principale del potenziale (11), per ρ molto grande, risulta uguale a $(K_1 x + K_2 y + K_3 z)/\rho^3$ e si identifica col potenziale di un dipolo in coordinate sferiche.

Se ora consideriamo l'ellissoide $\rho = \rho_0$ di semiassi

$$a = \sqrt{\rho_0^2 - \alpha^2}, \quad b = \sqrt{\rho_0^2 - \beta^2}, \quad c = \sqrt{\rho_0^2 - \gamma^2}, \quad \text{con } a > b > c,$$

la normale a questo ellissoide in un suo punto è parallela al vettore $\text{grad } \rho$, cioè il versore normale $\mathbf{n}$ vale $\text{grad } \rho / \text{mod grad } \rho$.

Ne segue che essendo $\mathbf{B} = -\text{grad } V$ il campo generato dal dipolo di potenziale V , la componente B_n di questo campo nei punti dell'ellissoide considerato, secondo la normale al medesimo, sarà data da

$$B_n = -[\text{grad } V \times \text{grad } \rho / \text{mod grad } \rho]_{\rho=\rho_0} = -\left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot \text{mod grad } \rho\right)_{\rho=\rho_0}.$$

Ma è $\text{mod grad } \rho = 1/H_1$, essendo H_1 definito dalla prima delle (6), ne segue

$$B_n = -\left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0}.$$

Ricordando le espressioni delle coordinate cartesiane x, y, z , per mezzo delle coordinate ellittiche (formule (4)) e osservando che i rapporti

$$\frac{x}{R_1} = \frac{x}{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}, \quad \frac{y}{R_2} = \frac{y}{\sqrt{\rho^2 - \beta^2}}, \quad \frac{z}{R_3} = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 - \gamma^2}}$$

sono indipendenti da ρ , si ha dalla (11)

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = K_1 \frac{x}{R_1} \frac{dS_1}{d\rho} + K_2 \frac{y}{R_2} \frac{dS_2}{d\rho} + K_3 \frac{z}{R_3} \frac{dS_3}{d\rho}$$

e perciò

$$B_n = -\frac{1}{H_1} \left(K_1 \frac{x}{R_1} \frac{dS_1}{d\rho} + K_2 \frac{y}{R_2} \frac{dS_2}{d\rho} + K_3 \frac{z}{R_3} \frac{dS_3}{d\rho} \right), \quad \text{per } \rho = \rho_0.$$

Ponendo per semplicità

$$\Gamma_i = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{R_i} \frac{dS_i}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_0}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

dove le Γ_i sono delle costanti, si ha infine

$$(13) \quad B_n = \frac{\rho_0}{H_1} (K_1 \Gamma_1 x + K_2 \Gamma_2 y + K_3 \Gamma_3 z), \quad \text{per } \rho = \rho_0.$$

3. Consideriamo ora il sistema di equazioni magnetoidrodinamiche relative a un fluido incompressibile di densità costante δ :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{I} \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{I} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \\ \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{\delta} \mathbf{I} \wedge \mathbf{B} - \text{grad} \left(\frac{1}{\delta} p + \frac{1}{2} v^2 - U \right), \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{array} \right.$$

di cui è ben noto il significato dei simboli, e supponiamo che in ogni punto P interno all'ellissoide τ di centro O e di semiassi a, b, c ($a > b > c$), siano assegnati, come funzioni soltanto del tempo, la corrente di conduzione $\mathbf{I}(t)$ e il vortice $\boldsymbol{\omega}(t) = \text{rot } \mathbf{v}$. Sulla superficie Σ che limita l'ellissoide sia inoltre assegnata la componente normale B_n del campo magnetico, i cui valori supporremo che coincidano con quelli che determinerebbe un dipolo magnetico posto nel centro con l'asse comunque orientato. Ci proponiamo di determinare la distribuzione del campo magnetico $\mathbf{B}$ e la distribuzione della velocità in ogni punto interno alla massa fluida ellissoidale.

Per questo osserviamo che la prima delle equazioni (I) ammette la soluzione particolare

$$(14) \quad \mathbf{B}_i = \frac{1}{2} \mathbf{I} \wedge (P - O)$$

con $\text{div } \mathbf{B}_i = 0$. Ponendo allora

$$(15) \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_i + \text{grad } F$$

si ricava

$$\text{div } \mathbf{B} = \text{div } \mathbf{B}_i + \text{div grad } F = \Delta_2 F$$

e per la quarta delle (I) avremo

$$(16) \quad \Delta_2 F = 0$$

cioè F sarà una funzione armonica.

Essendo $\mathbf{n}$ il versore della normale alla superficie Σ dalla stessa (15) si ricava che deve essere

$$(17) \quad \frac{dF}{dn} = B_n - \mathbf{B}_i \times \mathbf{n}, \quad \text{sopra } \Sigma.$$

Con riferimento a coordinate ellittiche, se identifichiamo il campo ellissoidale τ occupato dal fluido con l'ellissoide $\rho = \rho_0$ considerato nel numero precedente, la componente B_n del campo magnetico sulla superficie Σ , per l'ipotesi fatta sarà data dalla (13).

Indicando ancora con x, y, z le coordinate cartesiane del punto P rispetto agli assi dell'ellissoide, si ha

$$\frac{dF}{dn} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dn};$$

ma è

$$\frac{dx}{dn} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{1}{H_1} \frac{\rho}{\rho^2 - \alpha^2} x, \dots, \quad \text{per } \rho = \rho_0,$$

ne segue

$$\frac{dF}{dn} = \frac{\rho_0}{H_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{x}{\rho_0^2 - \alpha^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{y}{\rho_0^2 - \beta^2} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{z}{\rho_0^2 - \gamma^2} \right), \quad \text{per } \rho = \rho_0;$$

essendo inoltre B_{11}, B_{12}, B_{13} , le componenti cartesiane del vettore $\mathbf{B}_1$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 \times \mathbf{n} &= B_{11} \frac{dx}{dn} + B_{12} \frac{dy}{dn} + B_{13} \frac{dz}{dn} = \\ &= \frac{\rho_0}{H_1} \left(B_{11} \frac{x}{\rho_0^2 - \alpha^2} + B_{12} \frac{y}{\rho_0^2 - \beta^2} + B_{13} \frac{z}{\rho_0^2 - \gamma^2} \right), \quad \text{per } \rho = \rho_0. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (17) e ricordando che $\rho_0^2 - \alpha^2 = a^2, \dots$, la condizione in superficie diventa

$$\begin{aligned} (18) \quad \frac{\partial F}{\partial x} \frac{x}{a^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{y}{b^2} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{z}{c^2} &= K_1 \Gamma_1 x + K_2 \Gamma_2 y + K_3 \Gamma_3 z - \\ &- \left(B_{11} \frac{x}{a^2} + B_{12} \frac{y}{b^2} + B_{13} \frac{z}{c^2} \right), \quad \text{sopra } \Sigma. \end{aligned}$$

Dunque la funzione armonica F deve in superficie verificare la condizione (18), dove per la (14) è

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{2} (I_2 z - I_3 y) \\ B_{12} &= \frac{1}{2} (I_3 x - I_1 z) \\ B_{13} &= \frac{1}{2} (I_1 y - I_2 x), \end{aligned} \right.$$

nelle quali I_1, I_2, I_3 sono le componenti del vettore densità di corrente $\mathbf{I}$ secondo gli assi dell'ellissoide.

Se proviamo a porre F uguale a una funzione di 2° grado in x, y, z della forma

$$F = A_1 yz + A_2 zx + A_3 xy + B_1 x + B_2 y + B_3 z$$

che è ovviamente una funzione armonica, la (18) diventa identicamente verificata, al variare del punto sulla superficie Σ dell'ellissoide, per

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{2} \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} I_1, \quad A_2 = -\frac{1}{2} \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} I_2, \quad A_3 = -\frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} I_3, \\ B_1 &= K_1 \Gamma_1 a^2, \quad B_2 = K_2 \Gamma_2 b^2, \quad B_3 = K_3 \Gamma_3 c^2. \end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$(20) \quad F = -\frac{1}{2} \left(\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} I_1 yz + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} I_2 zx + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} I_3 xy \right) + \\ + K_1 \Gamma_1 a^2 x + K_2 \Gamma_2 b^2 y + K_3 \Gamma_3 c^2 z,$$

e per la (15) le componenti B_1, B_2, B_3 del campo magnetico, secondo gli assi dell'ellissoide, risultano

$$(21) \quad \begin{cases} B_1 = a^2 \left(\frac{I_2}{c^2 + a^2} z - \frac{I_3}{a^2 + b^2} y + K_1 \Gamma_1 \right) \\ B_2 = b^2 \left(\frac{I_3}{a^2 + b^2} x - \frac{I_1}{b^2 + c^2} z + K_2 \Gamma_2 \right) \\ B_3 = c^2 \left(\frac{I_1}{b^2 + c^2} y - \frac{I_2}{c^2 + a^2} x + K_3 \Gamma_3 \right). \end{cases}$$