Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aldo Bressan

Qualche conseguenza dei postulati comuni alla cinematica classica e a quella relativìstica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.5, p. 653–657.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_5_653_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Meccanica. — *Qualche conseguenza dei postulati comuni alla cinematica classica e a quella relativistica.* Nota di ALDO BRESSAN, presentata(*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. INTRODUZIONE. – Di recente è apparsa una nota di C. Cattaneo (1) nella quale (tra l'altro) si dà veste di rigore alla deduzione di certe trasformazioni cinematiche dipendenti da un parametro reale $\gamma = -1/c^2$ che in corrispondenza al valore nullo di questo divengono quelle di Galilei ed in corrispondenza a valori negativi quelle di Lorentz.

Resta il caso che il parametro γ assuma valore positivo.

A quanto mi consta, riguardo ad esso, sinora ci si è limitati ad asserire che tale caso non sembra avere significato fisico e ad escluderlo sulla base della esperienza (2).

In questa Nota dimosterò che detto caso è assurdo, sicché valgono necessariamente o le trasformazioni di Galilei o quelle di Lorentz, a partire da un sistema di postulati fisici appartenenti sia alla cinematica classica che a quella relativistica e giustificati da evidenti proprietà strutturali e cinematiche dei riferimenti spazio–temporali inerziali e dalla isotropia, omogeneità ed indistinguibilità fisiche (cinematiche) degli spazi inerziali.

Per la giustificazione dei suddetti postulati basta riferirsi ai soli fenomeni meccanici. Naturalmente non si postula, per esempio, che in uno spazio inerziale S la velocità c della luce sia indipendente dal moto della sorgente, dato che, com'è noto, tale postulato caratterizza la cinematica della relatività ristretta in quanto in base al principio di relatività (valido anche nella cinematica classica), ne segue l'indipendenza di c da S (3).

Alla base delle considerazioni che seguiranno sono i sopra menzionati postulati espressi sostanzialmente nella forma in cui sono stati enunciati in [1], ad eccezione di quello concernente le proprietà di mutua traslazione degli spazi inerziali a cui vien data una forma che ritengo opportunamente più esplicita.

2. POSTULATI FONDAMENTALI. – Riassumo brevemente, con lievi varianti, i postulati comuni alle cinematiche classica e relativistica, sostanzialmente nella forma in cui sono enunciati in [1], eccetto il III *b*, concernente le pro-

(*) Nella seduta del 12 maggio 1962.

(1) Vedi [1] e la bibliografia citata nella Nota (1) di [1], in particolare [2] e [4].

(2) Vedi, per esempio, le ultime due righe di [1]. Si noti che in [2] IGNATOWSKI esclude il precedente terzo caso (in cui si avrebbe una dilatazione delle lunghezze anziché una loro contrazione) appunto solo basandosi sull'esperienza.

Vedi anche [4], in particolare p. 324, riga 4 e p. 137, Nota I.

(3) Vedi in [4] il principio della costanza della velocità della luce, a p. 358 e la sua generalizzazione a p. 362.

prietà di mutua traslazione degli spazi inerziali. Metto questo postulato in forma opportunamente più esplicita affinché, fra l'altro, sia chiaro che le velocità di traslazione degli spazi inerziali possano ammettere un estremo superiore finito.

I. EVENTO UNIVERSO. – Esistono infiniti *eventi* E la cui totalità costituisce *l'universo* U.

II. RIFERIMENTI GALILEIANI. – Ogni spazio inerziale S gode delle seguenti proprietà:

a) *vale in* S *l'ordinaria geometria euclidea tridimensionale e una nozione di distanza, misurata con un dato regolo indipendente da* S;

b) *possono associarsi ad* S *le nozioni* (*che si assumono come primitive*) *di contemporaneità* (*anche in posizioni diverse*) *e di durata temporale* (*con segno*) *rispetto ad un dato orologio* (*indipendente da* S);

c) *in relazione al regolo e all'orologio sopra considerati, e che nel seguito riterremo come fissati una volta per tutte, muniamo* S *di un sistema triortogonale di coordinate* O xyz e di *un'ascissa temporale* t. *Ne risulta un riferimento* $R \equiv (O , x , y , z , t)$ – *che dicesi riferimento spazio–temporale galileiano* – *per* U. Ad ogni evento di U corrisponde pertanto in R una ben determinata quaderna di coordinate x , y , z , t (ciascuna suscettibile di variare tra $-\infty$ e $+\infty$) e viceversa;

d) *lo spazio* S *è isotropo e omogeneo* (*l'omogeneità valendo sia in posizione che nel tempo*) *rispetto a tutti i fenomeni fisici* (in particolare cinematici).

III. PRINCIPIO DI RELATIVITÀ. – In relazione al regolo e all'orologio considerati, sono soddisfatte le seguenti condizioni:

a) *esistono infiniti spazi inerziali;*

b) *esiste un insieme connesso* J *di numeri reali, tale che qualunque sia lo spazio inerziale* S, *in primo luogo, ogni spazio inerziale trasla rispetto ad* S *con velocità di modulo* [*finito*] *appartenente a* J, *e in secondo luogo, in* S *ogni vettore, di modulo* [*finito*] *appartenente a* J, *è la velocità di traslazione di uno ed un solo spazio inerziale;*

c) *gli spazi inerziali sono tra loro fisicamente indistinguibili;*

d) *ogni relazione cinematica che leghi due riferimenti gallileiani* R *ed* R′ *dipende con continuità dai parametri che individuano* R′ *rispetto ad* R (*o viceversa*). *Ogni funzione dell'evento* E *che sia differenziabile in* R (*ove è espressa nelle variabili* x , y , z , t) *è differenziabile in* R′ (*ove è espressa in* x' , y' , z' , t').

Si osservi che gli spazi inerziali sono ordinariamente intesi in modo che ogni loro punto può costituire indefinitamente la posizione di un punto materiale isolato. Inoltre è perfettamente naturale ammettere che durante il moto di un qualsiasi punto materiale, ad ogni istante esista uno spazio inerziale rispetto al quale il detto punto abbia velocità nulla. Dunque nel postulato III *b*), l'indipendenza di J da S traduce il seguente fatto, giustificato dal principio di indistinguibilità fisica: *Se è fisicamente possibile che un punto materiale* M *si muova rispetto ad uno spazio inerziale con data velocità intensiva, con la stessa velocità intensiva* M *può muoversi rispetto ad un qualsiasi altro spazio inerziale.*

3. IMPOSSIBILITÀ DI TRASFORMAZIONI DIVERSE DA QUELLE DI GALILEI O DI LORENTZ. – È facile convincersi che le leggere modifiche qui apportate ai postulati fatti in [1] non hanno alcuna influenza sulla validità dei ragionamenti ivi fatti. Quindi possiamo anche qui affermare la validità delle note formule (24) di [1], p. 532. È poi facile convincersi che si può sostituire la costante $-1/c^2$, ivi figurante, con la costante reale finita γ, a priori completamente arbitraria (anche in segno) [(4)]. Riassumo l'accennato risultato nella seguente forma compendiosa:

TEOREMA I. – *Esiste una costante reale universale finita* γ *verificante quanto segue:* S *ed* S′ *siano due spazi inerziali qualsiasi.* S′ *trasli rispetto ad* S *con velocità di componenti* v, 0, 0, *nel riferimento spazio–temporale galileiano* R, *solidale ad* S. *Allora esiste un riferimento* R′ *dello stesso tipo, solidale ad* S′ *e tale che un qualsiasi evento ha le coordinate* x, y, z, t *in* R *e quelle* x', y', z', t' *in* R′ *legate dalle eguaglianze*

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1+\gamma v^2}} \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad , \quad t' = \frac{t + \gamma v x}{\sqrt{1+\gamma v^2}} \,. \tag{1}$$

Dirò che i riferimenti spazio–temporali galileiani R ed R′ sono *inizialmente sovrapposti* se le corrispondenti formule di trasformazione sono del tipo (1).

Siano ora (u_1, u_2, u_3) e (u'_1, u'_2, u'_3) le velocità di un qualunque punto mobile, relative ai riferimenti R ed R′ solidali agli spazi S ed S′ considerati nel Teorema I. Allora da (1) si deducono le note formule

$$u'_1 = \frac{u_1 - v}{1 + \gamma v u_1} \quad , \quad u'_2 = \frac{u_2\sqrt{1+\gamma v^2}}{1+\gamma v u_1} \quad , \quad u'_3 = \frac{u_3\sqrt{1+\gamma v^2}}{1+\gamma v u_1} \,, \tag{2}$$

$$u_1 = \frac{u'_1 + v}{1 - \gamma v u'_1} \,. \tag{2′}$$

Preliminarmente, in primo luogo, si ricordi che, ponendo in $(2)_1$ $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, si deduce che *la velocità di* S *rispetto ad* R′ *è* $(-v, 0, 0)$.

In secondo luogo, si indichi con L l'estremo superiore dell'insieme J considerato nel postulato III *b*). Allora, poiché ogni spazio inerziale trasla rispetto a se stesso con velocità nulla, dai postulati III *a*) e *b*) segue che J ha la forma $0 \vdash L$ o la $0 \vdash\!\dashv L$ con $0 < L \leq \infty$.

TEOREMA II. – *La costante universale* γ *figurante in* (1) *è finita e non positiva. Inoltre, precisamente, i soli casi compatibili con i precedenti postulati sono i seguenti: o* $\gamma = 0$ *e* $L = +\infty$, *cosicché* (1), (2) e (2′) *si identificano con le corrispondenti formule galileiane: oppure* $\gamma < 0$ *e*

$$J = 0 \vdash c \qquad \text{ove è } c = +\sqrt{-1/\gamma} \,, \tag{3}$$

(4) Vedi [1] p. 531, dopo la formula (17) $A_{41}(v) = -A_{11}(v)\, v/c^2$.

La finitezza di $\gamma = -1/c^2$ si può dedurre dalla validità di (17) per $v \neq 0$ e dall'essere $A_{11}(v) > 0$. Ved. formula (6) in [1] p. 529.

cosicché (1) *e* (2) *si identificano con le corrispondenti formule di Lorentz, in cui c è la velocità intensiva indipendente dal riferimento spazio–temporale in cui la si misuri* (*ossia è quella della luce*).

Infatti, sia R un riferimento spazio–temporale galileiano appartenente allo spazio inerziale S. Sia poi $v > 0$, e $v \in J$. Allora in base all'assioma III *b*) esistono le successioni $\{S_j\}$ e $\{R_j\}$ tali che $S_0 = S$ e $R_0 = R$, ed inoltre per $j = 1, 2, \cdots$, R_j è il riferimento spazio–temporale galileiano inizialmente sovrapposto ad R_{j-1} e appartenente allo spazio inerziale S_j che ha $(v, 0, 0)$ per velocità di traslazione rispetto ad R_{j-1}.

Per $j = 1, 2, \cdots$, in base ad (1), R_j è inizialmente sovrapposto ad R, ed in base a (2′), la velocità di traslazione di S_j rispetto ad R è $(v_j, 0, 0)$, ove si sia posto

$$v_0 = 0 \quad , \quad v_j = v_j(v) = \frac{v_{j-1} + v}{1 - \gamma v v_{j-1}} \qquad (j = 1, 2, \cdots). \tag{4}$$

Allora in particolare risulta

$$v_2 = \frac{2v}{1 - \gamma v^2}. \tag{5}$$

Supponiamo, per assurda ipotesi,

$$\gamma > 0. \tag{6}$$

Per (5) e (6) $v^2 = 1/\gamma$ implica $v_2 = \infty$, quindi dovrà essere

$$L^2 < \frac{1}{\gamma}. \tag{7}$$

Dall'altro lato, dovendo essere $|v_j(v)| \in J$ per $v \in J$, la (7) e la definizione di L implicano intanto

$$|v v_j(v)| \leq L^2 < 1/\gamma. \tag{8}$$

Dalle relazioni (8) e (4) segue poi in modo ricorrente, che per $v \in J$ (e $v > 0$) è pure $v_j(v) > 0$ $(j = 1, 2, \cdots)$. Allora (8) implica:

$$0 < 1 - \gamma v v_{j-1} \leq 1,$$

quindi da $(4)_2$ segue in modo ricorrente

$$v_j = \frac{v_{j-1} + v}{1 - \gamma v v_{j-1}} \geq jv, \qquad (j = 1, 2, \cdots). \tag{9}$$

In J vi è un $v > 0$. In corrispondenza è $v_j \in J$ e di conseguenza è $jv \leq L$ per $j = 1, 2, \cdots$ Dunque $L = +\infty$, in contrasto con (6) e (7). Quindi *l'ipotesi* (6) *è* appunto *assurda*.

La non validità di (6) implica fra l'altro che la funzione $v_j(v)$ è positiva e continua in tutto J $(j = 1, 2, \cdots)$. Caso $\gamma = 0$. Per (4) $v_j(v) \equiv jv$, quindi $L = +\infty$. Caso $\gamma < 0$. La costante c data da $(3)_2$ è reale, $\gamma = -1/c^2$ e conseguentemente (1), (2) e (2′) prendono la forma ordinaria delle trasformazioni di Lorentz; le (4) divengono

$$(10) \qquad v_0 = 0 \quad , \quad v_j = v_j(v) = \frac{v_{j-1} + v}{1 + \frac{v}{c^2} v_{j-1}} \qquad (j = 1 , 2 , \cdots),$$

quindi, per $v \in J$ e $0 < v < c$, si ha, come è ben noto, $v_{j-1} < v_j < c$ $(j = 1 , 2 , \cdots)$. Allora per un noto teorema sulle successioni monotone e limitate esiste una $\bar{v} = \bar{v}(v)$ tale che

$$(11) \qquad \bar{v} = \lim_{j \to \infty} v_j(v) \;,\; 0 \leq \bar{v} \leq L \qquad \text{per} \quad 0 < v < c \quad e \; v \in J .$$

Per (11) e (10) è $\bar{v} = (\bar{v} + v)/(1 + v\bar{v}/c^2)$ ossia $1 + v\bar{v}/c^2 = 1 + v/\bar{v}$, quindi per (7)

$$c = \lim_{j \to \infty} v_j(v) \qquad \text{per} \quad 0 < v < c \quad e \; v \in J .$$

Per (11) e (12) è $c = \bar{v} \leq L$. Osservo ora che J *non può contenere c*. Infatti per assurda ipotesi sia $(c , 0 , 0)$ la velocità di traslazione di S′ rispetto ad R_0. Allora per $(2)_1$ quella di S′ rispetto a R_j è $(u_j , 0 , 0)$ con

$$u_j = \frac{c - v_j}{1 - v_j c/c^2} = c \qquad (j = 0 , 1 , \cdots).$$

Sia poi R′ il sistema cartesiano solidale ad S′ inizialmente sovrapposto ad R_0. Siccome R_j è inizialmente sovrapposto ad R_0, R′ ed R_j sono inizialmente sovrapposti. Allora, per una osservazione fatta dopo la formula (2′), $(-c , 0 , 0)$ è la velocità di traslazione di S_j, rispetto ad R′ per $j = 0 , 1 , \cdots$, il che è in contrasto con l'assioma III *b*). Dunque $L = c$ e vale $(3)_1$.

Concludo che dai postulati considerati si può dedurre logicamente, senza alcun riferimento all'esperienza, che le sole trasformazioni possibili sono quelle di Galilei o quelle di Lorentz.

BIBLIOGRAFIA.

[1] CATTANEO C., *Sui postulati comuni alla cinematica classica e alla cinematica relativistica*, « Rend. Lincei », serie 8ª, vol. 24, p. 526 (1958).

[2] IGNATOWSKY W., *Einige allgemeinen Bemerkungen zum Relativitätsprinzip.* « Physikalische Zeitschrift », II, p. 972 (1910).

[3] PERSICO E., *Introduzione alla fisica matematica*, Bologna 1948.

[4] SEVERI F., *Aspetti matematici dei legami di relatività e senso comune.* Stampato nel vol. *Cinquant'anni relatività*, 1955. Soc. An. Edit. Univ. Firenze.