

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

# RENDICONTI

---

GIULIO KRALL

## Sulla stabilità dell'equilibrio di barre in profilato sottile. - Nota I. Complementi e varianti

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 32 (1962), n.6, p.  
791–800.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1962\\_8\\_32\\_6\\_791\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_791_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



**Meccanica.** — *Sulla stabilità dell'equilibrio di barre in profilato sottile.* — Nota I. *Complementi e varianti.* Nota (\*) del Socio GIULIO KRALL.

1. PREMESSE E GENERALITÀ. — È di attualità lo studio della stabilità di strutture in profili sottili, tirati a freddo da lamiere in nastri. Questi profili (cfr. fig. 1) per aver poca resistenza torsionale, danno luogo ad aspetti assai diversi di instabilità rispetto ai casi tipici: di Eulero, per lo sforzo assiale; di Prandtl-Michell, per la flessione deviata; di Greenhill, per la torsione. In questi casi la torsiorigidezza interviene solo per la flessione deviata con un ruolo essenziale, ma non nel caso di Eulero e, ciò che più sorprende sulle prime, non nel caso di Greenhill, cioè dell'instabilità sotto l'azione di un mo-

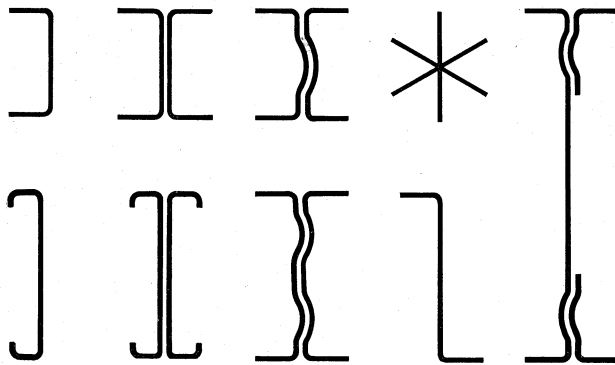


Fig. 1(\*\*).

mento torcente. Il non intervento per il caso di Eulero consegue dal dimensionamento, relativo alle misure globali, degli spessori dei profili di ferriera che si considerano nelle costruzioni metalliche ordinarie, spessori che vengono ridotti invece ad  $1/5$ , ed anche meno, nei profili tirati a freddo di cui qui si tratta.

Nella impostazione del problema della stabilità dei profili sottili, è fondamentale una ricerca apparsa in « *L'Ossature métallique* » dovuta a Timoshenko [1]. In questa, con rara intuizione, si scrivono direttamente le equazioni alle variazioni per una assegnata configurazione di equilibrio che, per l'asta, è la configurazione rettilinea. Rimane là essenziale la nozione di centro C, cosiddetto *centro del taglio* o di *scorrimento*, comunemente trascurata, attesa la torsiorigidezza dei profili ordinari o di ferriera. Tale centro C viene

(\*) Presentata nella seduta del 10 febbraio 1962.

(\*\*) Gli incurvamenti, stampati a freddo, (imbutiture), costituiscono autentici, necessari, irrigidimenti.

assunto come centro di una possibile rotazione rigida  $\varphi$  della sezione resistente. Per quanto segue si può non riferirsi a C ma ad un a priori arbitrario centro di rotazione O che si potrà naturalmente far poi coincidere con C o con il baricentro G per confronti e verifiche. Aggiungendosi agli spostamenti  $u, w$  di O secondo due assi  $x, z$  che si identificano con quelli *centrali di inerzia* della sezione resistente, una rotazione  $\varphi$  (cfr. fig. 2), se  $x_o, z_o$  sono le coordinate di O e  $x, z$ , quelle di un punto generico P della sezione, si avrà per lo spostamento  $u^*, w^*$  di P,

$$(I) \quad u^* = u + (z_o - z) \varphi \quad , \quad w^* = w - (x_o - x) \varphi$$

e per quello  $u_G^*, w_G^*$  del baricentro G, in cui hanno origine  $x, z$ ,

$$(I a) \quad u_G^* = u + z_o \varphi \quad , \quad w_G^* = w - x_o \varphi .$$

Nell'indirizzo di Timoshenko, O in C, stanno tutti [2] i lavori sulla instabilità dei profili sottili nei casi di Eulero, di Prandtl e combinati per

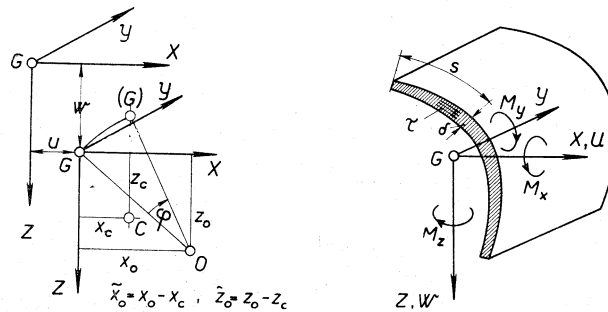


Fig. 2.

quanto riguarda il carico eccentrico. Non risulterebbe studiato il caso di Greenhill della instabilità al momento torcente.

Or qui si cerca di portare qualche contributo alla problematica accennata:

1° considerando, come si è detto, O distinto da C; ciò che consentirà una qualche generalità nei risultati;

2° dandone una sufficientemente precisa impostazione energetica nello spirito del criterio di stabilità secondo Dirichlet <sup>(1)</sup>;

3° studiando la stabilità alla torsione e combinazioni dei tre casi di Eulero-Prandtl-Greenhill dello sforzo assiale, della flessione e torsione.

(1) Inutile dire che il criterio del Dirichlet consente, attraverso l'algoritmo variazionale, una rapida o quantomeno più sicura deduzione delle equazioni alle variazioni nei casi più complessi e, soprattutto, la scrittura per disteso delle condizioni agli estremi. Non solo, ma consente anche, nei casi difficili delle caratteristiche variabili, l'adozione sistematica dei cosiddetti *metodi diretti* (serie minimizzanti) del calcolo variazionale.

Conseguenza di 1° è che i momenti  $M_x, M_z$  rispetto agli assi centrali  $x, z$  anziché dalle relazioni (cfr. fig. 2) indipendenti da  $\varphi$ ,

$$(2) \quad M_x = EJ_x w'' \quad , \quad M_z = -EJ_z u''$$

con  $J_x, J_z$  momenti centrali di inerzia, vengono qui espressi dalle relazioni,

$$(2)^* \quad M_x = EJ_x w_C'' \quad , \quad M_z = -EJ_z u_C'' \quad ,$$

con

$$(2a)^* \quad u_C'' = (u + \tilde{x}_0 \varphi)'' \quad , \quad w_C'' = (w - \tilde{x}_0 \varphi)''$$

dove, per  $x_c, z_c$  coordinate di C,

$$(2b)^* \quad \tilde{x}_0 = x_0 - x_c \quad , \quad \tilde{z}_0 = z_0 - z_c \quad .$$

Resta così rispettata la proprietà tipica del centro del taglio C secondo cui non induce flessione una rotazione che in esso ha centro perché, per definizione,

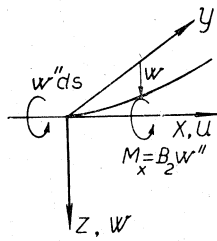
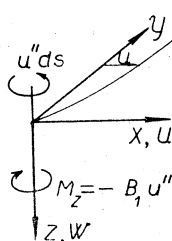


Fig. 3.

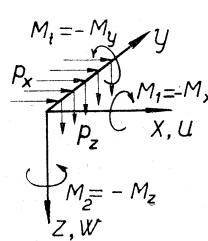


Fig. 4.

non induce rotazione una distribuzione flettente di forze normali all'asse della barra passanti, sezione per sezione, per C. Dalle (2a)\* e (2b)\* per  $O \rightarrow C$  quindi per  $(x_0, z_0) \rightarrow (x_c, z_c)$  si ha  $(u_C'', w_C'') \rightarrow (u'', w'')$  sicché le (2)\* si identificano con le ordinarie (2). Non occorre dire che le (2a)\* si giustificano rilevando che una rotazione  $\varphi$  attorno ad O equivale a  $\varphi$  attorno a C più le traslazioni  $(z_0 - z_c) \varphi$  secondo  $x$ ,  $-(x_0 - x_c) \varphi$  secondo  $z$ ; solo queste danno flessione. Sicché,  $\tilde{x}_0, \tilde{z}_0$  salvo, come vedremo, eventualmente nel caso di Greenhill, intervengono solo nei termini con  $B_1, B_2$  a fattore. Nelle seguenti deduzioni i termini inconsueti si sottolineano. Particolarizzando i risultati, ad esempio per  $\tilde{x}_0 = 0, \tilde{z}_0 = 0$ , cioè per O in C, si ricade nell'ambito di [1] e [2]; invece, per  $x_0 = z_0 = 0$ , cioè per O in G si ritrovano risultati di una importante ricerca [3] di R. Kappus. Questa viene sempre citata senza che, curiosamente, ne sia rilevata la diversità di impostazione (O in G, talvolta, anziché in C) e le conseguenti diversità dei risultati. Infine, dopo questi confronti di controllo, nelle espressioni dei valori critici  $N_{cr}, M_{cr}, M_{t,cr}$  o del moltiplicatore critico  $\lambda_{cr}$  di  $(N, M, M_t)$  concomitanti si metteranno in evidenza i parametri  $x_0, z_0$  (si eliminerà  $\tilde{x}_0, \tilde{z}_0$  con le (2b)\*); dal punto di vista variazionale si potranno rinforzare quei minimi critici estremandoli ulteriormente rispetto

a  $x_0, z_0$ . Ma i casi limiti sopra considerati (O in C rispettivamente O in G) dànno indici quantitativi ampiamente sufficienti per la problematica di cui si tratta.

Concludendo, si può ancora osservare che in sede di soluzioni di equilibrio non uniche (e perciò instabili) quali qui si considerano, le accennate proprietà del centro C che discendono dal teorema di reciprocità del Betti, possono destare qualche incertezza e indurre a togliere, forse leggermente, la  $\sim$  dappertutto e trattare  $x_0, z_0$ : 1° come parametri estremanti, oppure; 2° identificarli con  $x_c, z_c$  dappertutto; 3° con  $x_c, z_c$  nei termini con N, M,  $M_c$  ponendo invece  $x_0 = z_0 = 0$  nei termini con  $B_1, B_2$ ; 4° viceversa di 3°. In conformità con quanto si è già detto, 3° e 4° riportano nello spirito delle [1] e [2] rispettivamente della [3].

2. PRECISAZIONI ULTERIORI. - Si consideri una barra inflessa con momento flettente variabile lungo l'asse. In fig. 2 viene posta in evidenza la sezione (profilo) resistente, il sistema di riferimento  $x, y, z$  con origine nel baricentro G della sezione stessa. Rispetto alle Note del Timoshenko è scambiata la  $y$  con la  $z$ , quindi  $v$  con  $w$  per restar conseguenti con nostri lavori precedenti. Tale sistema risulta destro (sinistrorso) purché alla successione di lettere  $x, y, z$  si sostituisca la  $x, z, y$ . Un tale sistema si considera anche per facilitare i raffronti in casi limiti con deduzioni di più A.

Il momento sia  $M_x$ , conseguente quindi a sole forze nel piano  $(y, z)$ . In queste circostanze la sezione è soggetta ad un taglio globale

$$V_z = - \frac{dM_x}{dy}$$

ed a sforzi di taglio specifici  $\tau$ , diffusi, che si calcolano con formole note. Precisamente, se gli assi  $x, z$  sono, come vogliamo senz'altro ammettere, *assi centrali* d'inerzia, si ha

$$\tau \delta = - \frac{V_z}{J_x} \int_0^s z \delta(s') ds'$$

In questa relazione è:

$\delta = \delta(s)$  lo spessore del profilo, funzione dell'arco  $s$  misurato sulla linea d'asse. Sullo spessore  $\delta$  si pensa  $\tau$  costante;

$J_x$  il momento di inerzia rispetto ad  $x$ .

La forza specifica  $\tau \delta(s)$  si chiami, come al solito, *flusso del taglio in  $s$* .

Si osserva subito che gli sforzi  $\tau \delta$  ammettono un risultante (asse centrale) che, salvo evidenti condizioni di simmetria, non passerà generalmente per il baricentro G della sezione. Su  $y$ , spiccato da G, per ipotesi, incidono invece le forze esterne agenti.

Sia C il punto, cosiddetto *centro del taglio*, in cui l'asse centrale parallelo a  $z$  interseca l'asse  $x$ . Se C non sta in G, e  $\overline{CG}$  è la distanza tra i due punti, si provoca un momento torcente

$$V_z \cdot \overline{CG}.$$

Questo momento si trascura nei calcoli ordinari, attesa, come si è detto, una sensibile torsiorigidezza dei profili metallici standard e tanto più delle sezioni resistenti ordinarie del cemento armato. Ma per i profili in lamiera sottile di barre ottenute semplicemente stampando a freddo lamiere sottili, ciò non è più lecito.

Ammettiamo dunque, che allo spostamento  $u, w$  della sezione corrisponda una rotazione  $\varphi$  attorno ad un centro arbitrario  $O$ .

Sieno  $x_0, z_0$  (cfr. fig. 2) le coordinate di  $O$  con riferimento agli assi centrali  $x, z$ . Rispetto a questi si ha:

$$(3) \quad \int_A x dA = 0 \quad , \quad \int_A z dA = 0 \quad , \quad \int_A xz dA = 0 \quad ,$$

con  $dA$  elemento d'area della sezione che si considera.

I momenti centrali di inerzia della sezione si scrivano

$$(4) \quad \int_A x^2 dA = J_z = J_1 \quad , \quad \int_A z^2 dA = J_x = J_2$$

con che

$$(4 a) \quad B_1 = EJ_1 = EJ_z \quad , \quad B_2 = EJ_2 = EJ_x \quad ,$$

sono le flessorigidezze per flessione secondo  $u$  rispettivamente  $w$ . Per la flessione secondo  $u$  (ovvero  $x$ ), secondo  $w$  (ovvero  $z$ ), valgono le (2), o meglio, come proponiamo per quanto detto, le (2)\*.

Per la torsione, pensando al contributo delle ali di una sezione ad I, si pone

$$(5) \quad M_t = -C\varphi' + C_t\varphi''' \quad , \quad \frac{d}{dy} = ( \quad )'$$

con  $C$  e  $C_t$  dati, per un profilo a poligonale aperta, di lato generico lungo  $m_i$  e spessore  $\delta_i$ , da

$$(5 a) \quad C = \frac{G}{3} \sum_i m_i \delta_i^3 \quad ,$$

e per le ali di un I di altezza  $h$ , essendo  $\bar{J}_1$  il momento di inerzia di un'ala per flessione nel suo piano, quindi rispetto all'asse passante per l'anima (normale all'ala) alta  $h$ ,

$$(5 b) \quad C_t = \frac{E \bar{J}_1 h^2}{2} \quad ,$$

$E, G$  essendo i moduli d'elasticità flessionale e torsionale. Ma per un profilo generico si pone

$$C_t = E C_w \quad .$$

con  $C_w$  cosiddetta *warping-rigidity* per cui cfr. 2<sup>a</sup> op. cit. in [1] Chap. V e Nota successiva alla presente.

3. IL PRINCIPIO DEL DIRICHLET. - Ciò posto, agiscono sul sistema uno sforzo assiale  $N$ , un momento flettente  $M$  di componenti  $M_x, M_z$ , un momento torcente  $M_t$ , orientato secondo l'asse della barra che si considera.

Per il principio del Dirichlet, a cui si riporta l'analisi della stabilità, ampiamente illustrato in nostre Note antiche e recenti [4],

$$(6) \quad \delta\Phi = 0,$$

occorre calcolare il funzionale di  $u, w, \varphi$ ,

$$(6a) \quad \Phi = W + \lambda(\Omega_2^* - \Omega_2)$$

con  $W, \Omega_2^*, \Omega_2, \lambda$  aventi il significato noto (energia elastica di deformazione, lavoro di 2° ordine delle forze interne rispettivamente dei carichi dei quali  $\lambda$  è il moltiplicatore <sup>(2)</sup>) che passiamo a precisare proprio specificandone ordinatamente la scrittura.

#### A) Energia elastica di deformazione $W$ .

Si richiami alla mente l'espressione della energia elastica di deformazione di una barra elastica che, in tutta generalità, pensiamo corrente in un letto elastico reagente agli spostamenti  $u_G^*, w_G^*$  ed alle rotazioni  $u_G'^*, w_G'^*$ . Si ha, con significato evidente dei simboli, sostituendo in questa  $u$  con  $u_G^*$  e  $w$  con  $w_G^*$  dati dalle (1a) e ricordando la (2)\*,

$$(7) \quad W = \frac{1}{2} \int_0^l \{ B_1 (u + \tilde{x}_0 \varphi)''^2 + B_2 (w - \tilde{x}_0 \varphi)''^2 + C\varphi'^2 + C_1 \varphi''^2 \} dy + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l \{ k_u (u + z_0 \varphi)^2 + k_w (w - x_0 \varphi)^2 + k_u^{(t)} (u + z_0 \varphi)'^2 + k_w^{(s)} (w - x_0 \varphi)'^2 \} dy,$$

$k_u, k_w$  essendo le caratteristiche del letto elastico espresse dalle reazioni, passanti per  $G$ , opposte allo spostamento  $u = 1, w = 1$  del tratto  $\Delta s = 1$  nel senso di  $u$  rispettivamente di  $w$ ;  $k_u^{(t)}$  e  $k_w^{(s)}$  momenti di reazione alla rotazione  $u' = 1$  rispettivamente  $w' = 1$ , sempre di  $\Delta s = 1$ , di asse  $z$  rispettivamente  $x$ .

Si pensa naturalmente, per semplicità, in ogni caso praticamente realizzato, che tutti i componenti ad indici misti, di significato ovvio,  $k_{uw}, k_{u\varphi}, \dots$ ; siano nulli.

(2) Il valore  $\lambda = \lambda_{cr}$  per cui si ha instabilità misura evidentemente la sicurezza (alla instabilità). Se, ad esempio,  $\lambda_{cr} = 4$ , vuol dire che l'instabilità si ha moltiplicando i carichi per 4.



B) *Calcolo del lavoro di 2° ordine  $\Omega_2^*$  degli sforzi interni.*

Per lo sforzo assiale  $N$  si hanno sollecitazioni

$$(8) \quad Y_y = \sigma_y = -\frac{N}{A}$$

con  $N$  eventuale funzione di  $y$ . Per  $\Omega_2^*$  si ha

$$(9) \quad \Omega_2^* = \int_S \{ X_x e_{xx}^{(2)} + X_y e_{xy}^{(2)} + \dots \} dS,$$

l'integrazione essendo estesa al volume del corpo elastico. La funzione integranda è il prodotto interno del tensore sforzo conseguente ai carichi per le componenti  $e^{(2)}$  di 2° ordine della deformazione  $e$ .

Per  $e_{yy}^{(2)}$  si ha

$$(10) \quad e_{yy}^{(2)} = \frac{1}{2} (u^{*prime2} + w^{*prime2})$$

e da qui, attese le (1),

$$(11) \quad \Omega_2^* = -\frac{1}{2} \int_0^l dy \int_A \frac{N}{A} \{ [u + (z_0 - z)\varphi]'^2 + [w - (x_0 - x)\varphi]'^2 \} dA.$$

Per la flessione (caso di Prandtl-Michell) sieno  $M_1, M_2$  i momenti esterni presi come in [1] in senso opposto (cfr. fig. 4) ad  $M_x, M_z > 0$ . Sia dunque

$$(12) \quad M_1 = -M_x \quad , \quad M_2 = -M_z.$$

Con riguardo alle convenzioni, evidenti nelle figg. 1 e 4, lo sforzo si riduce alla sola componente  $Y_y$  data da

$$(13) \quad Y_y = \frac{M_1}{J_x} z - \frac{M_2}{J_z} x.$$

Il lavoro degli sforzi interni  $\Omega_2^*$  risulta pertanto

$$(14) \quad \Omega_2^* = \int_0^l dy \int_A Y_y e_{yy}^{(2)} dA.$$

Ora si ha per  $e_{yy}^{(2)}$  ancora l'espressione (10), sicché

$$(14a) \quad \Omega_2^* = \frac{1}{2} \int_0^l dy \int_A \left\{ \left[ \frac{M_1}{J_x} z - \frac{M_2}{J_z} x \right] \left[ (u + (z_0 - z)\varphi)'^2 + (w - (x_0 - x)\varphi)'^2 \right] \right\} dA.$$

Premettendo sempre il riferimento ad assi  $x, z$  centrali di inerzia, posto

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\int z^3 dA + \int zx^2 dA}{J_x} - 2z_0 \\ \beta_2 &= \frac{\int x^3 dA + \int xz^2 dA}{J_z} - 2x_0 \\ r_0^2 &= x_0^2 + z_0^2 + \frac{J_x + J_z}{A} \end{aligned} \right.$$

ad  $\mathcal{L}_2^*$  si può dare la forma concisa, definitiva,

$$(16) \quad \mathcal{L}_2^* = \frac{1}{2} \int_0^l \{ (M_1 \beta_1 - M_2 \beta_2) \varphi'^2 - 2 (M_1 u' \varphi' + M_2 w' \varphi') \} dy.$$

A questa va aggiunto, ove  $M$  sia variabile, il termine di significato evidente

$$(17) \quad \mathcal{L}_2^{*'} = - \int_0^l (M_1' u_G^{*'} + M_2' w_G^{*'}) \varphi dy.$$

Infine va considerato il contributo  $\delta \mathcal{L}_2^{*''}$  di  $M_1 \varphi, M_2 \varphi$  agli estremi per  $\delta u_G^{*'}, \delta w_G^{*'}$

$$\delta \mathcal{L}_2^{*''} = [M_1 \varphi \cdot \delta u_G^{*'} + M_2 \varphi \delta w_G^{*'}]_0^l.$$

*Per la torsione  $M_t$ .*

Riferendosi ad  $u_G^*, w_G^*$ , con riguardo alle componenti  $M_t u_G^{*'}$  e  $M_t w_G^{*'}$  di  $M_t = -M_y$ , per le variazioni angolari  $u_G^{*'}$ ,  $w_G^{*'}$  della linea d'asse, si ha

$$(18) \quad \delta \mathcal{L}_2^* = \int_0^l M_t (w_G^{*' \prime} \delta u_G^{*''} - u_G^{*' \prime} \delta w_G^{*''}) dy.$$

Attese le espressioni (1 a) per  $u_G^*, w_G^*$  la (18) diviene

$$(18 a) \quad \delta \mathcal{L}_2^* = \int_0^l M_t \{ (w - x_0 \varphi)' \delta (u + \bar{x}_0 \varphi)'' - (u + z_0 \varphi)' \delta (w - \bar{x}_0 \varphi)'' \} dy.$$

potendosi forse non considerare, eventualmente, la  $\sim$  su  $x_0, z_0$  nelle espressioni di  $\delta (u + z_0 \varphi)''$ ,  $\delta (w - \bar{x}_0 \varphi)''$  o, per semplicità, considerarla anche nelle  $(w - x_0 \varphi)'$ ,  $(u + z_0 \varphi)'$  o, infine, non considerarla affatto.

Con ciò si ha ormai quanto occorre per scrivere  $\Phi$  per disteso ed applicare direttamente l'algoritmo variazionale per  $\delta u, \delta w, \delta \varphi$  variazioni di  $u, w, \varphi$ . Si ottiene in conformità il sistema lineare in  $u, w, \varphi$  delle (19) con le condizioni (19 a) agli estremi  $x = 0, l$ .

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & (B_1 u'')'' + \lambda [(Nu') + (M_1 \varphi)'' + (M_1 w)'' - (M_1 x_0 \varphi)'] + (B_1 \ddot{x}_0 \varphi)'' - [k_u^{(s)}(u + x_0 \varphi)]' + k_u(u + x_0 \varphi) = 0, \\
 & (B_2 w)'' + \lambda [(Nw) + (M_2 \varphi)'' - (N x_0 \varphi)' - (M_1 u)'' - (M_1 x_0 \varphi)'] - (B_2 \ddot{x}_0 \varphi)'' - [k_w(w - x_0 \varphi)]' + k_w(w - x_0 \varphi) = 0, \\
 & [\ddot{x}_0 B_1 (u + \ddot{x}_0 \varphi)]'' - [\ddot{x}_0 B_2 (w - \ddot{x}_0 \varphi)]'' + (C_1 \varphi)'' - \lambda [(M_1 \beta_1 - M_2 \beta_2 - N r_0^2) \varphi]' + \lambda [N(x_0 u - x_0 w)]' + \\
 & + \lambda (M_1 u'' + M_2 w'') + \lambda [M_1 (\ddot{x}_0 u + \ddot{x}_0 w)]'' + \lambda (M_1 x_0 - M_2 x_0) \varphi + [x_0 k_w^{(s)}(w - x_0 \varphi)' - x_0 k_u^{(s)}(u + x_0 \varphi)]' + k_u \ddot{x}_0 (u + x_0 \varphi) - \\
 & - \lambda [M_1 (x_0 \ddot{x}_0 - x_0 \ddot{x}_0) \varphi]'' - k_w x_0 (w - x_0 \varphi) = 0.
 \end{aligned} \right. \\
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Le condizioni agli estremi che seguono dal principio variazionale risultano:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \{B_1 (u + \ddot{x}_0 \varphi)'' + \lambda [M_1 \varphi + M_1 (w - x_0 \varphi)]\} \delta u' - \{[B_1 (u + x_0 \varphi)]' - k_u^{(s)}(u + x_0 \varphi)' + \lambda [M_1 (w - \ddot{x}_0 \varphi)]' + \lambda (M_1 \varphi)' + \lambda N(u + x_0 \varphi)\} \delta u = 0 \\
 & \{B_2 (w - \ddot{x}_0 \varphi)'' + \lambda [M_2 \varphi - M_1 (u + x_0 \varphi)]\} \delta w' - \{[B_2 (w - x_0 \varphi)]' - k_w^{(s)}(w - x_0 \varphi)' - \lambda [M_1 (u + \ddot{x}_0 \varphi)]' + \lambda (M_2 \varphi)' + \lambda N(w - x_0 \varphi)\} \delta w = 0 \\
 & \{ \ddot{x}_0 B_1 (u + \ddot{x}_0 \varphi)'' - \ddot{x}_0 B_2 (w - \ddot{x}_0 \varphi)'' + C_1 \varphi'' + \lambda [M_1 (\ddot{x}_0 w' + \ddot{x}_0 u)'] - M_1 (x_0 \ddot{x}_0 - x_0 \ddot{x}_0) \varphi' + (M_1 x_0 - M_2 x_0) \varphi \} \delta \varphi' - \{ [\ddot{x}_0 B_1 (u + \ddot{x}_0 \varphi)]' - \\
 & - [\ddot{x}_0 B_2 (w - \ddot{x}_0 \varphi)]' + (C_1 \varphi)'' - C \varphi' + \lambda [M_1 (\ddot{x}_0 w' + \ddot{x}_0 u)]' + \lambda (M_1 u' + M_2 w') - x_0 k_u^{(s)}(u + x_0 \varphi)' + x_0 k_w^{(s)}(w - x_0 \varphi)' + \lambda [M_2 \beta_2 - \\
 & - M_1 \beta_1] \varphi' - \lambda [M_1 (x_0 \ddot{x}_0 - x_0 \ddot{x}_0) \varphi]' + (M_1 x_0 - M_2 x_0) \varphi + \lambda N(x_0 u' - x_0 w' + r_0^2 \varphi) \} \delta \varphi = 0.
 \end{aligned} \right. \\
 \end{aligned}
 \tag{19 a) }$$

*Osservazione:*

Si rilevi che le derivate prime e seconde  $M'$ ,  $M''$  di  $M$  si possono esprimere per tramite delle componenti  $V$ ,  $p$  del taglio rispettivamente del carico distribuito su l'asse  $y$ . Si ha precisamente, con riguardo alla fig. 5,

$$M'_1 = V_z, \quad M''_1 = -p_z; \quad M'_2 = -V_x, \quad M''_2 = p_x.$$

In una Nota successiva a questa vedremo in atto le (19), (19 a) tanto nei confronti di controllo con tutti i casi limite noti, quanto nella trattazione di casi nuovi. La estensione di questi risultati agli archi (considerata per i profili ordinari in 2<sup>a</sup> op. cit. in [1] Chap. VII e, con riguardo al principio del Dirichlet ed agli archi da ponte in generale, in [5]) viene sistematicamente trattata dal prof. G. Ferrarese in due Note [6] su questi stessi « Rendiconti ».

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] S. TIMOSHENKO, *Théorie de la flexion, torsion et flambage à parois minces et à section ouverte* « L'Ossature métallique », n. 7-8 (1947); ID., *Theory of elastic stability*, Chap. V, 2<sup>a</sup> ed. New-York, London (1961).
- [2] Si cfr. F. ed H. BLEICH, *Buckling Strength of Metal Structures*, Chap. III, Graw-Hill Book Company New-York, London (1952).
- [3] R. KAPPUS, *Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenen Profil im elastischen Bereich*, « Luftfahrtforschung », Bd. 14 (1938).
- [4] G. KRALL, *Stabilità dell'equilibrio elastico*, « Annali di Matematica », Bologna 1949.
- [5] — *Stabilità trasversale degli archi da ponte*, « Memorie fisiche dell'Accademia Nazionale dei Lincei », vol. VI (in corso di stampa) e *Ponti in cemento armato*, « Tecnica italiana », n. 8 (1959) e n. 1 (1960), Trieste.
- [6] G. FERRARESE, *Sulla stabilità dell'equilibrio di un arco in profilato sottile*. Questo fasc. di questi « Rendiconti ».