
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ANTONELLO RUBATTA

Diffusione di un'onda di Stokes da parte di un gruppo di ostacoli cilindrici verticali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 32 (1962), n.6, p. 936-941.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_936_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Idrodinamica. — *Diffusione di un'onda di Stokes da parte di un gruppo di ostacoli cilindrici verticali*^(*). Nota di ANTONELLO RUBATTA, presentata ^(**) dal Corrisp. G. SUPINO.

1. I fenomeni di diffusione connessi all'urto di onde di mare contro ostacoli rigidi possono essere studiati mantenendosi nell'ambito della teoria lineare dell'onda ed attribuendo carattere irrotazionale al moto della massa d'acqua. Come è noto, finché gli ostacoli hanno pareti verticali ed il fondo è orizzontale, il problema assume strette analogie con quelli che si presentano in altri campi della fisica matematica, e segnatamente in acustica. Adattando al particolare contesto i metodi elaborati in questi ultimi casi, è possibile determinare le caratteristiche dell'onda diffusa da un gruppo di pali cilindrici.

2. Nel seguito si impiega come riferimento la terna trirettangolare destra x, y, z , con l'asse z diretto verso l'alto e con l'origine sul pelo libero di riposo. In alternativa si utilizza pure un sistema di coordinate cilindriche r, ϑ, z , lasciando inalterata la posizione dell'asse z e contando le anomalie ϑ dalla direzione positiva dell'asse x . Il dominio occupato dalla lama d'acqua in riposo è dunque quello compreso fra i due piani di quota $z = 0$ e $z = -H$, ad esclusione delle porzioni di cilindro verticale corrispondenti ai vari pali che si considerano volta a volta presenti.

Nell'ipotesi di irrotazionalità del moto, esiste in questo dominio una funzione potenziale $\Phi(x, y, z, t)$ per la velocità, che va scelta fra le soluzioni della

$$\nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 0$$

in base alle condizioni al contorno. Si impone naturalmente che la velocità normale $\partial\Phi/\partial n$ si annulli sulle superficie rigide costituite dal fondo $z = -H$ e dalle pareti dei pali. Inoltre si richiede che sul piano $z = 0$ sia soddisfatta la relazione di Poisson

$$g \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

la quale, finché le escursioni del pelo libero sono piccole e le sue pendenze limitate, traduce il fatto che il pelo libero stesso è una superficie di confine soggetta a pressione costante. Maggiore attenzione richiedono invece le condizioni all'infinito. Per formularle è opportuno scindere il potenziale nelle sue componenti

$$\Phi = \Phi_I + \Phi_D$$

(*) Istituto di Idraulica della Facoltà di Ingegneria di Bologna.

(**) Nella seduta del 12 giugno 1962.

relative rispettivamente all'onda incidente ed a quella diffusa. Se si vuole che la perturbazione incidente sia un'onda piana di ampiezza costante procedente nel verso delle x crescenti, occorre scrivere

$$\Phi_I(x, y, z, t) = A_I \cosh k(z + H) e^{-i\sigma t} e^{ikx}$$

essendo

$$kg \operatorname{tgh} kH = \sigma^2$$

come richiesto dalla condizione di Poisson. Ciò posto, il comportamento asintotico del termine Φ_D deve risultare in accordo con la classica condizione di Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \Phi_D = 0,$$

pur mantenendosi finito e non nullo il prodotto $\sqrt{r} \Phi_D$, dato che tutti gli ostacoli possono venir racchiusi in un dominio cilindrico di raggio abbastanza grande.

Nel caso in cui sia presente un unico palo cilindrico di diametro $2r_0$, disposto con l'asse su $r = 0$, la soluzione è rappresentata dal potenziale⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \Phi(r, \vartheta, z, t) = & A_I \cosh k(z + H) e^{-i\sigma t} \left\{ e^{ikr \cos \vartheta} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} e^{i\gamma_n} \sin \gamma_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\vartheta \right\} \end{aligned}$$

con $\varepsilon_n = 1$ per $n = 0$, $\varepsilon_n = 2$ per $n \neq 0$, e

$$\operatorname{tg} \gamma_n = \frac{J'_n(kr_0)}{Y'_n(kr_0)}.$$

Va però osservato che se la lunghezza d'onda della perturbazione incidente è considerevole rispetto al diametro del palo, come avviene normalmente nel campo d'interesse tecnico, in cui difficilmente si supera il limite $kr_0 = 1$, le uniche onde diffuse di entità non trascurabile sono quelle di ordine $n = 0$ ed $n = 1$. Inoltre le onde di questi due ordini risultano tanto più cospicue quanto più aumenta il valore di kr_0 . Entrambe le osservazioni possono venir convalidate attraverso gli usuali sviluppi in serie delle funzioni $J_n(kr_0)$ ed $Y_n(kr_0)$ nel campo $kr_0 \ll 1$, ma quando kr_0 si approssima alla unità riesce più agevole ricorrere a valutazioni energetiche. All'onda diffusa corrisponde un flusso totale di energia, medio nel tempo

$$E_D = -\frac{\gamma\sigma}{2\pi g} \int_0^{2\pi} r d\vartheta \int_{-H}^0 dz \int_0^{2\pi/\sigma} \Re e \left[\frac{\partial \Phi_D}{\partial t} \right] \Re e \left[\frac{\partial \Phi_D}{\partial r} \right] dt$$

(1) J. V. WEHAUSEN, E. V. LAITONE, *Surface Waves*, « Handbuch der Physik », vol. 9, (1960).

che, per l'ortogonalità sull'intervallo $(0, 2\pi)$ delle funzioni $\cos n\vartheta$, può venir espresso quale somma dei flussi energetici

$$E_{Dn} = A_I^2 \frac{\gamma \sigma H}{2g} \left(1 + \frac{\sinh 2kH}{2kH} \right) \epsilon_n^2 \sin^2 \gamma_n$$

che competerebbero alle singole onde di ordine n , ove fossero presenti da sole. Questo permette di definire in maniera utile i coefficienti di diffusione parziali

$$\delta_n = \frac{E_{Dn}}{E_I}$$

essendo

$$E_I = kr_o A_I^2 \frac{\gamma \sigma H}{2g} \left(1 + \frac{\sinh 2kH}{2kH} \right)$$

il flusso energetico connesso all'onda piana incidente, valutato per una lunghezza di fronte pari al diametro del palo, e considerato sempre nel suo valore medio temporale. L'andamento dei valori dei coefficienti di diffusione così introdotti appare chiaro dalla Tabella I.

TABELLA I.

kr_o	δ_o	δ_1	$10^4 \cdot \delta_2$	$10^8 \cdot \delta_3$
0,2	0,00448	0,0201	0,00487	0,000147
0,5	0,0528	0,256	2,79	3,04
0,8	0,1556	0,516	66,4	479

Ne risulta che, in tutto il campo $kr_o \lesssim 1$, è possibile arrestare lo sviluppo in serie già al secondo termine. Introducendo inoltre le espressioni asintotiche delle funzioni di Hankel, utilizzabili non appena è $r \lesssim 2\pi/k$, si può porre il potenziale dell'onda diffusa nella forma approssimata

$$\Phi_D(r, \vartheta, z, t) = A_I \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cosh k(z + H) \cdot$$

$$\cdot \{ \sin \gamma_o e^{i\gamma_o} + 2 \sin \gamma_1 e^{i\gamma_1} \cos \theta \} e^{-i\sigma t} e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

I parametri γ_o e γ_1 dipendono unicamente da kr_o , ossia in definitiva dal rapporto fra il diametro del palo e la lunghezza d'onda; essi assumono i valori elencati nella seguente Tabella II.

TABELLA II.

kr_0	γ_0	γ_1
0,1	— 0,00773	+ 0,00790
0,2	— 0,0299	+ 0,0317
0,3	— 0,0646	+ 0,0706
0,4	— 0,1096	+ 0,1217
0,5	— 0,1632	+ 0,1797
0,6	— 0,224	+ 0,238
0,7	— 0,290	+ 0,288
0,8	— 0,361	+ 0,327
0,9	— 0,435	+ 0,350
1,0	— 0,513	+ 0,358

In particolare, la sopraelevazione η_D del pelo libero, che è l'aspetto più saliente del fenomeno, risulta essere

$$\eta_D = \frac{i\sigma}{g} \Phi_D(r, \vartheta, 0, t) =$$

$$= \frac{i\sigma}{g} A_I \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cosh kH \{ \sin \gamma_0 e^{i\gamma_0} + 2 \sin \gamma_1 e^{i\gamma_1} \cos \vartheta \} e^{-i\sigma t} e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}.$$

L'onda diffusa presenta perciò ritardi, rispetto alla fase in $x = 0$ dell'onda incidente,

$$\alpha = \frac{1}{4} \pi + \arg \{ \sin \gamma_0 e^{i\gamma_0} + 2 \sin \gamma_1 e^{i\gamma_1} \cos \vartheta \} + kr$$

e, lungo le linee di cresta individuale da questa equazione, le semiampiezze valgono

$$|\eta_D| = \frac{\sigma}{g} A_I \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cosh kH | \sin \gamma_0 e^{i\gamma_0} + 2 \sin \gamma_1 e^{i\gamma_1} \cos \vartheta |.$$

3. L'espressione del potenziale relativo ad un singolo palo può essere utilizzata come soluzione di base per lo studio della diffusione operata da un intero sistema di pali, tutte le volte che si possono considerare trascurabili le influenze reciproche dei pali o, se si vuole, ritenere pressoché nulle le riflessioni secondarie, cosa che risulta pienamente accettabile per poco che i pali distino fra loro. Inoltre, ciò che interessa particolarmente è la figura di diffusione ad una certa distanza dal sistema dei pali, più che il complicato intrecciarsi dei moti ondosi nella zona da essi occupata. Si può quindi limitare l'operazione di somma dei potenziali al solo campo asintotico.

Se si fa riferimento all'onda diffusa da un palo centrato sull'origine, alla quale corrisponde il potenziale

$$\Phi_{D_0} = A_I \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \cosh k(z + H) \cdot \{ \sin \gamma_0 e^{i\gamma_0} + 2 \sin \gamma_1 e^{i\gamma_1} \cos \vartheta \} e^{-i\sigma t} e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)},$$

l'onda diffusa da un secondo palo uguale posto in r_1 , ϑ_1 viene eccitata in ritardo di fase di $kr_1 \cos \vartheta_1$ e si propaga nella direzione generica ϑ con un anticipo di fase $kr_1 \cos (\vartheta_1 - \vartheta)$, così che il relativo potenziale asintotico assume la forma

$$\Phi_{D_1} = \Phi_{D_0} e^{ikr_1 \cos \vartheta_1} e^{-ikr_1 \cos (\vartheta_1 - \vartheta)}.$$

Pertanto, nel caso di pali dello stesso diametro allineati con interesse costante L_1 su file parallele inclinate di φ rispetto alla direzione di incidenza ed intervallate fra loro di L_2 , l'onda originata dal palo di posizione m_1 sulla fila m_2 ammette potenziale asintotico

$$\Phi_{D_{m_1, m_2}} = \Phi_{D_0} e^{ik(m_1 L_1 \cos \varphi + m_2 L_2 \sin \varphi)} \cdot e^{-ik(m_1 L_1 \cos (\varphi - \vartheta) + m_2 L_2 \sin (\varphi - \vartheta))}.$$

Estendendo ora la somma a tutti gli M_1 pali presenti per fila ed a tutte le M_2 file si ottiene

$$\Phi_D = \Phi_{D_0} K e^{-i(M_1 - 1) \frac{\nu}{2}} e^{-i(M_2 - 1) \frac{\mu}{2}}$$

in cui si intende

$$K = \frac{\sin \frac{M_1 \nu}{2}}{\sin \frac{\nu}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{M_2 \mu}{2}}{\sin \frac{\mu}{2}}$$

$$\nu = kL_1 [\cos (\varphi - \vartheta) - \cos \varphi]$$

$$\mu = kL_2 [\sin (\varphi - \vartheta) - \sin \varphi].$$

Meglio ancora, con una traslazione rigida degli assi che porti l'origine in posizione centrata rispetto alla palificazione, si possono eliminare i due fattori esponenziali, passando così all'espressione più compatta

$$\Phi_D = \Phi_{D_0} K.$$

Rispetto a questo nuovo riferimento, l'onda diffusa presenta dunque linee di cresta di equazione

$$\alpha = \frac{1}{4} \pi + \arg \{ \sin \gamma_0 e^{i\gamma_0} + 2 \sin \gamma_1 e^{i\gamma_1} \cos \vartheta \} + kr$$

e lungo tali linee le semiampiezze sono date da

$$|\eta_D| = \frac{\sigma}{g} A_I \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \cosh kH | \sin \gamma_0 e^{i\gamma_0} + 2 \sin \gamma_1 e^{i\gamma_1} \cos \vartheta | |K|.$$

Come si vede la palificazione considerata dà luogo a linee di fase costante aventi lo stesso andamento riscontrato nel caso di un unico palo. Ciò che in-

vece si altera in maniera sostanziale è la distribuzione dell'entità delle ampiezze lungo tali linee, per via della forte dipendenza di K dall'anomalia ϑ .

Si nota subito che possono presentarsi direzioni lungo le quali il moto ondoso si estingue. Data la particolare struttura dell'espressione K basterà considerare ciò che avviene in presenza di un'unica fila di pali, cioè ponendo $M_2 = 1$. Risulta allora $K = 0$ per

$$M_1 \nu = 2 \pi s$$

essendo s intero e non nullo, ma diverso da pM_1 , con p pure intero. Valori così fatti di s possono presentarsene effettivamente ed anche in numero notevole. Questo perché ν varia nell'intervallo $(kL_1 [1 - \cos \varphi], -kL_1 [1 + \cos \varphi])$ di ampiezza $2 kL_1$, ed è quindi possibile attribuire ad s almeno il valore $s = 1$ o quello $s = -1$, purché sia $L_1 \geq 2 \pi / M_1 k$. Anzi, per particolari valori di φ , la posizione $s = 1$ od $s = -1$ può già riuscire adeguata anche per interassi più ridotti, ma comunque mai inferiori a $\pi / M_1 k$. Al crescere poi dello sviluppo relativo $(M_1 - 1) L_1 k / 2 \pi$ della palificazione le anomalie ϑ di ampiezza nulla vanno progressivamente aumentando.

Intervallate alle anomalie nodali, esistono ovviamente delle direzioni lungo le quali l'intensità del moto ondoso è massima. I relativi valori di ϑ dovrebbero essere ricercati fra gli estremanti dell'espressione completa dell'ampiezza $2 |\eta_D|$ sotto la condizione di fase α costante, dato che l'onda elementare diffusa da ciascun palo non è uniforme rispetto a ϑ . Tuttavia i massimi stessi si mantengono normalmente a livello confrontabile con l'intensità dell'onda elementare di riferimento, e non risultano perciò di rilievo tale da giustificare una ricerca in tal senso. Ciò non è più vero, almeno in generale, per quelle anomalie ϑ che annullano il denominatore di K : intorno a queste anomalie particolari l'onda diffusa della palificazione può assumere ampiezze considerevoli. Così, ad esempio, un massimo cospicuo dell'intensità si presenta sempre nella direzione $\vartheta = 0$: su questa linea le ampiezze sono $M_1 \cdot M_2$ volte più grandi di quelle dovute ad un solo palo. Le altre eventuali linee di massimo più accentuate vanno individuate intorno a quelle che discendono da una delle relazioni

$$\nu = 2 \pi p \quad \text{o} \quad \mu = 2 \pi p$$

con p intero. Ma, perché esistano effettivamente direzioni così privilegiate, occorre che sia $L_1 \geq \pi/k$ o $L_2 \geq \pi/k$.