Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Roberto Magari

Su una classe di simboli atta a rappresentare gli elementi di un piano grafico e su un teorema di riduzione a forma normale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.1-2, p. 37–44.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_1-2_37_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Matematica. — *Su una classe di simboli atta a rappresentare gli elementi di un piano grafico e su un teorema di riduzione a forma normale* (*). Nota (**) di ROBERTO MAGARI, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

1. Nel linguaggio geometrico consueto si usano spesso espressioni come «la retta AB» e, più raramente, «il punto rs» (per «il punto comune alle rette r ed s»). Sulla stessa traccia si può dire «il punto ABCD» per «il punto comune alle rette AB e CD» e ancora «la retta [(AB) (CD) E]» per «la retta che congiunge il punto ABCD e il punto E».

Ma già in quest'ultimo caso è stato necessario ricorrere all'uso delle parentesi (occorre distinguere dalla precedente la retta A [(BC) (DE)]). Le parentesi possono essere utilmente sostituite con punti e gruppi di punti al modo di Peano, ad esempio si può scrivere AB·CD : E in luogo di [(AB) (CD)] E, AB·CD : E .·. FG in luogo di {[(AB) (CD)] E} (FG) ecc.

Questa notazione oltre che presentare un'utilità stenografica può avere qualche interesse nello studio dei piani grafici (i simboli usati per rappresentare gli elementi di un piano grafico vengono a formare una struttura algebrica connessa con la struttura d'incidenza del piano) ed è utile per esprimere proposizioni configurazionali [1] (scrivendo semplicemente ABC per affermare che i punti A, B, C sono allineati, il teorema di Pascal per l'esagono ABCDEF si scrive AB·ED : BC·EF :. CD·FA [2]).

Perché i simboli di questo tipo siano utili nello studio di un piano grafico occorre un teorema di «riduzione a forma normale». Precisamente se I è l'insieme di detti simboli e π un piano grafico occorre individuare un sottoinsieme N di I (insieme dei simboli «in forma normale») tale che comunque scelto un elemento (retta o punto) di π esista uno e un solo simbolo di N che lo rappresenti. È inoltre utile quando sia possibile dare un procedimento finito che permetta, dato un $s \in I$, di individuare l'elemento $s' \in N$ che rappresenta lo stesso elemento di π. In questo lavoro si risolve il problema per i piani grafici generati «liberamente» (cfr. n. 3) da un qualunque insieme di elementi (punti) indipendenti. Precisamente i numeri 2 e 3 sono dedicati a un'esposizione più dettagliata di quanto si è detto sopra e il n. 4 alla dimostrazione di un teorema di riduzione a forma normale nel senso indicato.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 8 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1961–1962.

(**) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1962.

(1) Cfr. LOMBARDO RADICE [2].

(2) Occorre naturalmente distinguere tra l'uso di questi simboli per indicare punti o rette e quello qui accennato; nel seguito, salvo indicazione contraria, l'uso sarà sempre il primo.

2. Sia π un qualunque piano grafico. Se, essendo x, y due punti (rette) distinti di π, xy indica la retta che li congiunge (il punto comune) allora si ha:

(1) $\quad xy = yx \qquad (x \neq y \;\; x, y$ punti (rette) di $\pi)$

(2) $\quad xy \cdot xz = x \qquad (x, y, z$ punti (rette) di π, $x \neq y$, $x \neq z$, $xy \neq xz)$.

Si ha inoltre che:

(3) *Se* x, y *sono punti (rette) di* π, *se* u *è una retta (punto) di* π *e se* $x \neq y$, $xy \neq u$, $xy \cdot u \neq x$, *allora:*

$$xy \cdot u : x = xy .$$

Le (1) (2) (3) sono conseguenze immediate della definizione di piano grafico, inoltre, in un senso che sarà precisato nel teorema che segue, la (3) è conseguenza delle (1) e (2). Per invertire le considerazioni precedenti diamo il seguente teorema:

TEOREMA 1. – *Siano* P *ed* L *due insiemi disgiunti, sia* f *una funzione che a ogni coppia di elementi distinti di* P *faccia corrispondere un elemento di* L *e ad ogni coppia di elementi distinti di* L *un elemento di* P *e si abbia:*
(1′) $f(x, y) = f(y, x)$ *(per ogni coppia* (x, y) *di elementi distinti di* P *(di* L*));*
(2′) $f(f(x, y), f(x, z)) = x$ *(tutte le volte che* (x, y) (x, z) *sono coppie di elementi distinti di* P *(di* L*) e* $f(x, y) \neq f(x, z)$*);*

allora P *ed* L *sono rispettivamente l'insieme dei punti e l'insieme delle rette di un piano grafico qualora si assuma come relazione di incidenza la seguente:* x, u *sono incidenti se e solo se esiste un* $y \neq x$ *per cui* $u = f(x, y)$ *o un* $v \neq u$ *per cui* $x = f(u, v)$.

Dim. – Per semplicità scriviamo xy al posto di $f(x, y)$, $xy \cdot zt$ al posto di $f(f(x, y), f(z, t))$ ecc. e dimostriamo che nelle nostre ipotesi vale ancora la (3) (dove si legga «elemento di P» al posto di «punto» e «elemento di L» al posto di «retta»). Siano allora x, y elementi di P (di L), u un elemento di L (di P) con $x \neq y$, $xy \neq u$, $xy \cdot u \neq x$ e poniamo $xy = v$ $xy \cdot u = z$, dobbiamo dimostrare che, posto ancora $w = xz = xy \cdot u : x$, si ha $w = v$. Se è $z = y$ si ha subito $w = zx = yx = v$. Sia invece $z \neq y$ e supponiamo che sia $w \neq v$, ora si ha: $wv = zx \cdot yx = x$ da cui $w = zx = uv \cdot wv = v$ contro l'ipotesi. La (3) è così provata.

Per dimostrare il teorema è sufficiente far vedere che dati due elementi distinti x, y di P (di L) esiste uno e un sol elemento di L (di P) incidente ad ambedue. xy è ovviamente un tal elemento. Supponiamo che ve ne sia un altro, $z \neq xy$. Allora si presenterà (salvo cambiamenti inessenziali) una delle seguenti situazioni:

(*a*) $z = xu$, $z = yv$ con $u \neq y$ e $v \neq x$. Ma in tal caso si avrebbe $z \cdot xy = xu \cdot xy = x$ e $z \cdot xy = yv . yx = y$ ossia $x = y$ contro le ipotesi;

(*b*) $z = xu$, $y = zt$ con $u \neq y$ e $t \neq xy$ (se fosse $t = xy$ sarebbe $y = zt = xu \cdot xy = x$). Allora $z \cdot xy = xu \cdot xy = x$ e $z \cdot xy = z : x \cdot zt = zt = y$ ossia di nuovo $x = y$ contro le ipotesi;

(*c*) $x = zt$, $y = zu$ con $u \neq t$ ma allora $xy = zt \cdot zu = z$ ancora contro le ipotesi.

3. Come si è osservato nel n. 2 come conseguenza delle (1) e (2) si ha:

(3) $$xy \cdot u : x = xy \quad \text{(con le restrizioni già indicate)}$$

ma in un piano grafico possono sussistere altre relazioni che non siano conseguenza della (1) e della (2) per la più generale funzione del tipo definito nel Teorema 1, che non siano cioè valide per tutti i piani grafici (a norma del Teorema 1 le due condizioni sono equivalenti).

Per precisare la questione è opportuno far riferimento all'insieme I di tutti i simboli del tipo sin qui usato costruibili a partire da un dato insieme A. I si può definire come l'unione degli insiemi M_i definiti induttivamente da $M_1 = A$, $M_2 = A^2 \cup A$, $\cdots$, $M_i = M_{i-1}^2 \cup A$ (3) e per la scrittura degli elementi di I seguiremo le convenzioni corrispondenti alle notazioni usate finora, scrivendo eventualmente un numero intero al posto di un gruppo di punti di suddivisione.

Se A è un insieme di punti che genera un piano grafico π con operazioni proiettive allora ogni elemento di π si può rappresentare con almeno un elemento di I, si può cioè definire in modo «naturale» un'applicazione di un sottoinsieme I′ di I *su* π che indicheremo con φ. Si tratta dell'applicazione che ad ogni elemento x di I′ fa corrispondere l'elemento $\varphi(x)$ di π di cui x è il simbolo nel senso illustrato in 1. Essa può essere definita per induzione (e con essa I′) nel modo seguente:

(4) $$\text{se } x \in A \quad \varphi(x) = x$$

(5) $$\text{se } \varphi(y) = y' \text{ e } \varphi(z) = z' \; (y' \neq z') \quad \text{allora } \varphi(yz) = y'z' \text{ (4)}.$$

Consideriamo ora la relazione di equivalenza R che sussiste fra due elementi x, y di I′ quando e solo quando $\varphi(x) = \varphi(y)$. La relazione di incidenza definita in π determina mediante la φ^{-1} una relazione in I′/R e di conseguenza in I′ (precisamente la relazione che sussiste fra due elementi di I′ se e solo se i loro corrispondenti nella φ sono incidenti) e due elementi x, y si corrispondono in questa relazione se e solo se esiste un y' R y per cui si possa scrivere: $x = y's$ oppure $xr = y'$ $(s, r \in I')$.

La questione a cui abbiamo accennato all'inizio di questo numero si può precisare ora nel modo seguente: sia π un piano grafico non degenere e A un insieme di punti che generi π con operazioni proiettive; allora due elementi x, y dell'insieme I′ sopra definito sono di certo equivalenti nella R se uno di essi, e sia x, si può ottenere dall'altro mediante un numero finito di trasformazioni dei seguenti tipi:

(3) La definizione porta a considerare insiemi a cui appartengono certi loro sottoinsiemi ma nel modo qui usato la cosa non dà luogo a contraddizioni.

(4) «$y'z'$» sta per «l'elemento a cui y' e z' sono incidenti», mentre «yz» indica il simbolo ottenuto scrivendo successivamente y e z e interponendo un gruppo di punti più numeroso di quelli che eventualmente figurino già in y e z (un punto se $y = uv$ con u, $v \in A$ e z non contiene punti di separazione).

(α) si scambiano fra loro gli elementi di un costituente [5] di grado [5] non nullo di y;

(β_1) in y a un costituente $w = uv \cdot us$ si sostituisce u;

(β_2) l'inverso di (β_1);

(γ_1) in y a un costituente $w = r : rs \cdot t$ si sostituisce rs;

(γ_2) l'inverso di (γ_1).

Ora si potrà viceversa affermare che se due elementi di I sono equivalenti nella R essi si ottengono l'uno dall'altro nel modo ora indicato?

Nel seguito dimostreremo che ciò è vero se π è un piano grafico generato liberamente da A (preso come insieme di punti indipendenti) [6]. Osserviamo anche che l'applicazione della trasformazione (γ_1) o della (γ_2) può sempre essere sostituita da un numero finito di applicazioni delle (α), (β_1), (β_2): in seguito dimostreremo anche che la (β_2) può essere sempre sostituita da un numero finito di applicazioni delle (α) (β_1) (γ_1) agli effetti di quella che chiameremo «riduzione di un simbolo a forma normale».

4. Sia ora π il piano grafico generato liberamente da A. Abbiamo visto (n. 3) che ogni elemento di A può rappresentarsi mediante almeno un simbolo appartenente ad I e che ogni simbolo appartenente ad I rappresenta al più un elemento di π. Sia I′ il sottoinsieme di I costituito dai simboli ciascuno dei quali rappresenta un elemento di A e sia φ l'applicazione di I′ su π che porta ciascun simbolo appartenente a I′ nell'elemento di π da esso rappresentato. Scriviamo $x \sim y$ se e solo se $\varphi(x) = \varphi(y)$ ($\sim$ è una relazione di equivalenza e per comodità useremo per indicarla la parola «equivalente»).

Sia dato un ordine totale λ su A e definiamo un ordine totale su I nel modo seguente:

sia I_n l'insieme degli elementi di I aventi grado $\leq n$, definiamo intanto per induzione rispetto ad n un ordine totale σ_n su ciascuno degli I_n:

(6) σ_0 coincide con λ

(7) se $x \in I_n$, $y \in I_n$, $n > 0$ si ha:

(7,1) se $x \in I_{n-1}$, $y \notin I_{n-1}$ x precede y in σ_n

(7,2) se $x \notin I_{n-1}$, $y \notin I_{n-1}$

(5) Definiamo il grado di un elemento di I nel modo seguente: gli elementi di A hanno grado zero; se x ha grado m e y ha grado n allora xy ha per grado il maggiore fra i due numeri $m + 1$ e $n + 1$. Ciò posto se z ha grado non nullo ($z = xy$) chiamiamo x ed y costituenti di ordine 1 di z e chiamiamo costituenti di ordine n di z gli eventuali costituenti di ordine 1 dei costituenti di ordine $n - 1$. Infine chiamiamo costituenti di z i costituenti di un qualunque ordine.

(6) Si consideri un «piano parziale» consistente di soli punti e i suoi punti siano gli elementi di A: allora la sua «estensione libera» nel senso di M. HALL [3] è ciò che intendiamo per «piano generato liberamente da A».

(ossia se x e y hanno ambedue grado n) ed è $x = uv$, $y = wt$ (7) allora quando $u \neq w$, x precede y in σ_n se u precede w in σ_{n-1}, mentre quando $u = w$, x precede y in σ_n se v precede t in σ_{n-1}.

(7,3) $$\text{se } x \in I_{n-1} \quad , \quad y \in I_{n-1}$$

x precede y in σ_n se e solo se lo precede in σ_{n-1}.

È facile vedere che σ_n è effettivamente un ordine totale in I_n.

Inoltre, in base alla (7,3), σ_{n-1} è la restrizione di σ_n ad I_{n-1}.

Pertanto possiamo definire un ordine totale σ su I nel modo seguente: se $x \in I$, $y \in I$, e n è un intero non minore del grado di x e del grado di y, x precede y in σ se e solo se x precede y in σ_n.

Definiamo ora un sottoinsieme N di I che chiameremo insieme degli elementi normali. Anzitutto un elemento si dirà seminormale se e solo se o è un elemento di $M_1 = A$ oppure è della forma xy dove x precede y.

Ciò posto gli elementi normali sono definiti induttivamente come segue:

(8) gli elementi di M_1 sono normali.

(9) gli elementi seminormali di M_2 sono normali.

(10) xy è normale se e solo se:

(10,1) è seminormale,

(10,2) x ed y sono normali,

(10,3) non esiste alcun $z \sim xy$ di grado minore di xy (o, come diremo, xy è di grado minimo).

Vogliamo ora dimostrare che:

TEOREMA 2. – *La restrizione* φ_N *all'insieme* N *della* φ *è un'applicazione biunivoca di* N *su* π *ed è tale che, se* $x \in N$, $y \in N$, $\varphi(x)$ *è incidente a* $\varphi(y)$ *se e solo se si verifica una (e quindi una sola) delle seguenti eguaglianze:*

$$(11) \quad \begin{cases} (11,1) & x = yz \\ (11,2) & x = zy \\ (11,3) & y = zx \\ (11,4) & y = xz \end{cases} \qquad (\text{con } z \in N).$$

Dim. – Sia N_h l'insieme degli elementi normali di grado h (h intero non negativo) e $\bar{N}_h$ l'insieme degli elementi normali di grado $\leq h$, sia ancora $\bar{S}_h$ lo stadio h-esimo della costruzione di π secondo Hall (Marshall Hall [3], Lombardo Radice [2]) e indichiamo con S_h l'insieme $\bar{S}_h - \bar{S}_{h-1}$.

Dimostriamo (per induzione) che:

(12) La restrizione φ_h della φ a $\bar{N}_h$ è un'applicazione biunivoca di $\bar{N}_h$ su $\bar{S}_h$ tale che $\varphi_h(x)$ è incidente a $\varphi_h(y)$ se e solo se si verifica una delle 11 con $z \in \bar{N}_h$.

Per $h = 0$ la proposizione è ovviamente vera. Supponiamola vera per $h < k$ e dimostriamola per $h = k$ ($k > 0$). Gli elementi di $\bar{S}_h$ sono quelli di

(7) Si noti che x ha grado > 0, quindi è $x = uv$ con u, v convenienti simboli di grado $< n$. Altrettanto per y.

$\bar{S}_{h-1}$ più una nuova retta (punto) per ogni coppia di punti (rette) distinti di $\bar{S}_{h-1}$ privi di congiungente (di intersezione) in $\bar{S}_{h-1}$. Sia r una retta (punto) di S_k e sia x', y' la coppia di elementi di $\bar{S}_{k-1}$ che la individuano. Tale coppia sarà priva di congiungente (di intersezione) in $\bar{S}_{k-1}$. Per l'ipotesi induttiva ciascun elemento di $\bar{S}_{k-1}$ proviene, per effetto della φ_{k-1} da uno e un solo elemento di $\bar{N}_{k-1}$, esiste perciò in $\bar{N}_{k-1}$ uno e un sol x per cui $\varphi(x) = x'$ e uno e un sol y per cui $\varphi(y) = y'$. Poiché $\varphi(x)$ e $\varphi(y)$ non sono incidenti a un medesimo elemento di $\bar{S}_{k-1}$ non può essere $xy \sim z$ con $z \in \bar{N}_{k-1}$, se infatti così fosse $\varphi(z) \in \bar{S}_{k-1}$ coinciderebbe con $\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y) = x'\,y' = r \in S_k$, il che è assurdo. Ma per la definizione di elemento normale la coppia (x, y) porta appunto in tal caso ad un (solo) elemento normale (che sarà xy o yx a seconda che sia $x < y$ o $y < x$). Tale elemento appartiene precisamente a N_k. Si è così dimostrato che ogni elemento di S_k proviene da almeno un elemento di N_k. Poiché per l'ipotesi induttiva ogni elemento di $\bar{S}_{k-1}$ proviene da un (solo) elemento di $\bar{N}_{k-1}$ ne segue che $\varphi(\bar{N}_k) \supseteq \bar{S}_k$.

Viceversa, se $s \in \bar{N}_k$, si ha $\varphi_k(s) \in \bar{S}_k$. Infatti se $s \in \bar{N}_k$, s è di grado $g \leq k$ e allora o $g = 0$ e $\varphi_k(s) \in S_0$ oppure $g > 0$ e si ha $s = xy$ con x, y elementi normali di grado $< k$ e quindi appartenenti a $\bar{N}_{k-1}$. Ma in tal caso $\varphi_k(x) = \varphi_{k-1}(x)$ e $\varphi_k(y) = \varphi_{k-1}(y)$ sono in $\bar{S}_{k-1}$ onde $\varphi_k(s) = \varphi_k(x)\,\varphi_k(y)$ è in $\bar{S}_k$.

Pertanto φ_k è un'applicazione di $\bar{N}_k$ su $\bar{S}_k$.

Proviamo ora che φ_k è biunivoca cioè che non può essere $\varphi_k(z) = \varphi_k(s) = r$ con $s \in \bar{N}_k$, $z \in \bar{N}_k$, $s \neq z$. Per $r \in \bar{S}_{k-1}$ la cosa è esclusa dall'ipotesi di induzione, tenuto conto anche del fatto che da quanto fin qui dimostrato segue $\varphi(N_k) = S_k$. Sia allora $r \notin \bar{S}_{k-1}$ e quindi $r \in S_k$, in tal caso esistono due e due soli elementi x', y' di $\bar{S}_{k-1}$ incidenti ad r. Ora se è $z \in \bar{N}_k$ e $\varphi_k(z) = r$ dev'essere $z \in N_k$ e quindi $z = xy$ con xy elementi di $\bar{N}_{k-1}$ onde $r = \varphi_k(z) = \varphi_k(x)\,\varphi_k(y)$. Ma allora $\varphi_k(x)$ e $\varphi_k(y)$ sono elementi di $\bar{S}_{k-1}$ incidenti ad r e quindi coincidono a meno dell'ordine con x' e y' e poniamo che sia $\varphi_k(x) = x'$ e $\varphi_k(y) = y'$. Poiché per l'ipotesi di induzione la φ_{k-1} è biunivoca x è l'unico elemento di $\bar{N}_{k-1}$ che ha per corrispondente (nella φ_{k-1} e quindi) nella $\varphi_k x'$ e y è l'unico che ha per corrispondente y'. Ne segue che z è l'unico elemento di $\bar{N}_k$ a cui nella φ_k corrisponde r. Resta così dimostrato che φ_k è un'applicazione biunivoca di $\bar{N}_k$ su $\bar{S}_k$.

Resta da dimostrare che se $\varphi_k(x)$ è incidente a $\varphi_k(y)$ si verifica una delle 11 con $z \in \bar{N}_{k-1}$ (l'inverso è conseguenza immediata delle definizione della φ). Se $\varphi(x)$ e $\varphi(y)$ appartengono ambedue a $\bar{S}_{k-1}$ la proposizione è vera per l'ipotesi di induzione; sia allora $\varphi(y) \in S_k$. In $\bar{S}_k\,\varphi(y)$ sarà allora incidente a due e due soli elementi (di $\bar{S}_k$ ma anzi) di $\bar{S}_{k-1}$ e saranno $\varphi(x)$ e un certo ζ con $z = \varphi_k^{-1}(\zeta) \in \bar{N}_{k-1}$. Ma si ha $\varphi(xz) = \varphi(x)\,\varphi(z) = \varphi(y)$ e analogamente $\varphi(zx) = \varphi(y)$ e inoltre uno (solo) dei due elementi zx, xz è normale. Posto, per fissare le idee, che sia normale xz, si ha, vista la biunivocità di φ_k, $\varphi_k^{-1}(y) = xz$, e la proposizione è dimostrata.

Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema 2. Sia $\xi \in \pi$, sarà allora $\xi \in S_h$ per un opportuno h intero non negativo e quindi esiste in $\bar{N}_h$ un elemento

x per cui $\varphi_h(x) = \varphi_N(x) = \varphi(x) = \xi$. Viceversa, si dimostra con analogo ragionamento che, per ogni x di N, $\varphi_N(x) \in \pi$. La φ_N è cioè un'applicazione di N su π. Siano ancora x ed y due elementi distinti di N, sarà allora per un opportuno h intero non negativo $x \in \bar{N}_h$ $y \in \bar{N}_h$ ed essendo $x \neq y$ si ha $\varphi_N(x) = \varphi_h(x) \neq \varphi_h(y) = \varphi_N(y)$, quindi la φ_N è biunivoca.

Infine dimostriamo che se $\xi \in \pi$, $\eta \in \pi$ e ξ è incidente a η allora, posto $x = \varphi_N^{-1}(\xi)$ e $y = \varphi_N^{-1}(\eta)$ per x ed y vale una delle 11. Al solito sarà $\xi \in \bar{S}_h$ e $\eta \in \bar{S}_h$ per un opportuno h intero positivo e la cosa segue dalla (12). Il Teorema 2 è così dimostrato.

Vogliamo ora dimostrare il seguente:

TEOREMA 3. – *Sia* $x \in I'$ e $\bar{x}$ *sia l'elemento normale per cui* $x \sim \bar{x}$, *allora* $\bar{x}$ *può essere ottenuto da* x *applicando al più* $4(2^m - 1)$ (*dove* m *è il grado di* x) *trasformazioni dei tipi* (α), (β_1), (γ_1),

Dim. (per induzione rispetto ad m). – Il teorema è ovviamente vero per gli elementi di gradi 0 e 1. Sia vero per $m < n (n > 1)$ e sia $x = uv$ di grado n.

Sia $\bar{x}$ l'elemento normale per cui $x \sim \bar{x}$, sarà $\bar{x}$ di grado $\leq n$. Applicando al massimo $2 \cdot 4(2^{n-1} - 1)$ trasformazioni del tipo indicato ci si può ridurre al caso che u, v siano normali, e applicando eventualmente un'ulteriore trasformazione di tipo (α) ci si può ridurre al caso in cui sia inoltre uv seminormale, ossia $u < v$.

Se $x = \bar{x}$ il teorema è vero per x. Sia dunque $x \neq \bar{x}$, allora il grado di $\bar{x}$ è minore di n, se infatti così non fosse non esisterebbero elementi di grado inferiore ad n equivalenti ad x ed essendo x seminormale ed u, v normali x sarebbe normale. Ma allora esisterebbero due elementi normali distinti equivalenti il che è assurdo per il Teorema 2. Poiché $x = uv$, $\varphi(u)$ e $\varphi(v)$ sono incidenti a $\varphi(x)$ e poiché $\varphi(x) = \varphi(\bar{x})$, sono incidenti a $\varphi(\bar{x})$. Essendo $\bar{x}$, u, v normali, per il Teorema 2 si presenterà allora per u una delle seguenti situazioni:

$$\left.\begin{array}{lc} (13,1) & u = \bar{x}t \\ (13,2) & u = t\bar{x} \\ (13,3) & \bar{x} = uw \\ (13,4) & \bar{x} = wu \end{array}\right\} \quad (t, w \in N)$$

e per v una delle seguenti:

$$\left.\begin{array}{lc} (14,1) & v = \bar{x}z \\ (14,2) & v = z\bar{x} \\ (14,3) & \bar{x} = vy \\ (14,4) & \bar{x} = yv \end{array}\right\} \quad (z, y \in N).$$

Essendo uv seminormale il grado di v è maggiore o uguale di quello di u e per conseguenza non possono presentarsi le situazioni (14,3) e (14,4); infatti in tal caso $\bar{x}$ risulterebbe di grado maggiore di quello di v e quindi anche di quello di u, e di conseguenza di grado maggiore o uguale di quello di x, contro quanto sopra osservato.

Salvo ad applicare la (α) alla coppia $z\bar{x}$ possiamo poi ridurci al caso $v = \bar{x}z$. Applicando poi eventualmente la (α) alla coppia $t\bar{x}$ o alla coppia wu possiamo in definitiva ridurci con al più due applicazioni della (α) a una delle seguenti situazioni:

$$v = \bar{x}z \quad u = \bar{x}t \qquad (z\,,\, t \in \mathrm{N}) \tag{15,1}$$

$$v = \bar{x}z \quad \bar{x} = uw \qquad (z\,,\, w \in \mathrm{N}). \tag{15,2}$$

Nel caso (15,1), essendo $x = \bar{x}t \cdot \bar{x}z\,,\, \bar{x}$ si ottiene da x applicando una sola volta la (β_1).

Nel caso (15,2) si ha $x = uv = u : uw \cdot z$ e applicando al secondo membro la (γ_1) si ottiene uw cioè $\bar{x}$.

Così x si ottiene in ogni caso da x con al più $2 \cdot 4 (2^{n-1} - 1) + 4 = 4 \cdot (2^n - 1)$ trasformazioni dei tipi indicati e il teorema è dimostrato.

Il limite superiore posto al numero di operazioni necessarie per passare da x a $\bar{x}$ può essere migliorato con un'analisi più accurata, ma l'interesse del teorema non sta in questo e abbiamo preferito non appesantire la dimostrazione.

Dal Teorema 3 segue come corollario quanto si è anticipato nell'ultimo capoverso del n. 3. L'interesse del teorema sta oltre che in detto corollario nel fatto che le trasformazioni (α), (β_1), (γ_1) sono tutte tali da non aumentare il grado del simbolo su cui operano. Inoltre dalla dimostrazione del Teorema 3 si può ricavare un procedimento di effettiva riduzione di un simbolo a forma normale, su cui non ci soffermiamo per brevità: dato cioè un elemento di I è sempre possibile riconoscere con un numero finito di trasformazioni dei tipi (α) (β_1) (γ_1) e di verifiche immediate, numero che ammette un limite superiore funzione del grado, se esso è o no in I′ e di ridurlo, se è in I′, a forma normale.

Resta aperto il problema di scegliere in modo opportuno una classe di elementi « normali » in I quando la φ sia l'applicazione di un sottoinsieme di I in un piano grafico che non sia liberamente generato da un insieme così come la si è definita in 3. Si pensi per esempio al caso del piano razionale che è generato da 4 suoi punti (indipendenti) valendo però oltre le (1) e (2) la:

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}:\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\,.\dot{}.\,\mathrm{AB}::\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}:\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\,.\dot{}.\,\mathrm{BC}\cdot::\mathrm{AC}\cdot::\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}:\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD} \tag{15}$$

[8]. che non ne è conseguenza.

BIBLIOGRAFIA.

(Ci limitiamo a indicare le opere citate nel testo rimandando per la bibliografia a LOMBARDO RADICE [1]).

[1] LUCIO LOMBARDO RADICE, *Piani grafici finiti non desarguesiani*, G. Denaro editore, Palermo 1959.

[2] LUCIO LOMBARDO RADICE, *Su alcuni caratteri dei piani grafici*, « Rend. Sem. Mat. Padova », XXIV, 312–345 (1955)

[3] MARSHALL HALL, *Projective Planes*, « Trans. of Am. Math. Soc. », *54*, 229–277 (1943).

(8) Intesa come proposizione (cfr. n. 1). Essa dà un caso particolare del piccolo teorema di Desargues.