Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Enrico Bombieri

Un principio generale della Geometria dei Numeri e sue applicazioni ai problemi non omogenei

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.1-2, p. 45–48.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_1-2_45_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Teoria dei numeri. — *Un principio generale della Geometria dei Numeri e sue applicazioni ai problemi non omogenei* (*). Nota (**) di ENRICO BOMBIERI, presentata dal Corrisp. G. RICCI.

INTRODUZIONE.

In questa Nota ci proponiamo di presentare alcuni risultati ottenuti nella Geometria dei Numeri e precisamente: una generalizzazione del classico *principio di Blichfeldt* e le relative applicazioni.

La prima di queste applicazioni riguarda i minimi non omogenei di regioni stellate, e la seconda il minimo del prodotto di n forme lineari non omogenee. L'esposizione completa delle dimostrazioni e delle osservazioni ulteriori costituiscono l'oggetto di lavori che saranno pubblicati successivamente.

1. – UNA GENERALIZZAZIONE DEL « PRINCIPIO DI BLICHFELDT ».

Sia Λ un reticolo nello spazio n–dimensionale R^n, e con $d(\Lambda)$ indichiamo il determinante di Λ. Sia ancora $\mathcal{S}$ una regione dello spazio R^n e con $\mathcal{S}(\boldsymbol{u})$ indichiamo la medesima regione traslata secondo il vettore $\boldsymbol{u}$. Poniamo infine $V(\mathcal{S})$ = volume di $\mathcal{S}$.

Potremo allora enunciare il classico *principio di Blichfeldt* nel seguente modo:

Principio di Blichfeldt:

Se nessuna regione $\mathcal{S}(\boldsymbol{x})$ traslata di $\mathcal{S}$ contiene due punti distinti di Λ, allora si ha

$$d(\Lambda) \geq V(\mathcal{S}).$$

Lo stesso Blichfeldt ha applicato questo principio ai cosiddetti problemi di tipo omogeneo, tra cui citeremo i due seguenti:

A) il problema del minimo di una forma quadratica a n variabili;

B) il minimo del prodotto di n forme lineari omogenee.

Egli ha così migliorato in modo essenziale i risultati precedentemente stabiliti usando il classico teorema di Minkowski.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del CNR (1961–62).

(**) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1962.

Osserviamo ora che possiamo modificare il principio di Blichfeldt in modo da evitare qualsiasi ipotesi sulla regione $\mathcal{S}$. Poniamo per definizione:

$$V_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{v}) = \sum_{\boldsymbol{u} \in \Lambda} V[\mathcal{S}(\boldsymbol{v}) \cap \mathcal{S}(\boldsymbol{u})]. \tag{1}$$

È chiaro che $V_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{o}) \geq V(\mathcal{S})$.

È anche ben noto (vedi ad esempio J. W. S. Cassels [1]) che:

$$V_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{o}) = V(\mathcal{S}) \tag{2}$$

se nessuna regione $\mathcal{S}(\boldsymbol{x})$ *traslata di* $\mathcal{S}$ *contiene due punti di* Λ.

Riportiamo la semplicissima dimostrazione.

Se fosse $V_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{o}) > V(\mathcal{S})$, dalla (1) seguirebbe immediatamente che, per un opportuno $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_1 \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{u}_1 \in \Lambda$, le regioni $\mathcal{S}(\boldsymbol{u}_1)$ e $\mathcal{S}(\boldsymbol{o})$ si sovrappongono. Se $\boldsymbol{y}$ è un punto comune a queste due regioni, la regione $\mathcal{S}(\boldsymbol{y})$ deve contenere i due punti $\boldsymbol{o}$ ed $\boldsymbol{u}_1$, e la (2) è così dimostrata.

Per quanto ora trovato, il seguente teorema include quindi il principio di Blichfeldt:

TEOREMA 1. – *Per ogni regione* $\mathcal{S}$ *vale la disuguaglianza*

$$d(\Lambda)\, V_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{o}) \geq V^2(\mathcal{S}).$$

Questo teorema è a sua volta un caso molto particolare del seguente teorema generale:

TEOREMA 2. – *Siano le costanti* $b_0, b_1, \cdots, b_h$ *tali che:*

$$\sum_{m=0}^{h} b_m \cos(mz) \geq 0 \quad \textit{per ogni } z \textit{ reale}. \tag{3}$$

Allora, qualunque siano il punto $\boldsymbol{v}$ *e la regione* $\mathcal{S}$, *vale la disuguaglianza*

$$d(\Lambda) \sum_{m=0}^{h} b_m V_{\mathcal{S}}(m\boldsymbol{v}) \geq (b_0 + b_1 + \cdots + b_h)\, V^2(\mathcal{S}). \tag{4}$$

Questo teorema generale è stato da noi dimostrato applicando la formula di Poisson e la formula di Parseval ad una funzione ausiliaria a n variabili, periodica mod Λ.

Il metodo analitico usato risale ad importanti lavori di L. J. Mordell [3] e C. L. Siegel [4].

2. – UNA APPLICAZIONE AL CASO DI FUNZIONI–DISTANZA.

Come è ben noto [1], una vasta classe di regioni può essere rappresentata in modo utile da una funzione–distanza $F(\boldsymbol{x})$, caratterizzata dalle seguenti proprietà:

i) $F(\boldsymbol{x})$ è non negativa;

ii) $F(\boldsymbol{x})$ è continua;

(1) Vedi ad esempio, J. W. S. CASSELS [1].

iii) $F(\boldsymbol{x})$ ha la proprietà di omogeneità espressa da $F(t\boldsymbol{x}) = tF(\boldsymbol{x})$ per $t \geq 0$ reale.

La regione descritta dalla funzione–distanza $F(\boldsymbol{x})$ è data dall'insieme di punti $\boldsymbol{x}$ per i quali sia $F(\boldsymbol{x}) < 1$; tale regione risulta stellata, nel senso che se $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ allora anche $t\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ quando $0 \leq t < 1$.

Le funzioni–distanza godono infine della seguente proprietà:

per ogni funzione–distanza $F(\boldsymbol{x})$ esiste una opportuna costante C per la quale

$$F(\boldsymbol{x}) \leq C(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|). \tag{4}$$

Le due espressioni

$$F(\Lambda) = \inf_{\substack{\boldsymbol{u} \in \Lambda \\ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}}} F(\boldsymbol{u}) \quad , \quad m(\boldsymbol{x}_0, \Lambda) = \inf_{\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}_0 (\Lambda)} F(\boldsymbol{x})$$

si dicono rispettivamente minimo omogeneo della regione $\mathcal{S}$ e minimo non omogeneo della regione $\mathcal{S}$ rispetto al punto $\boldsymbol{x}_0$. Poiché $F(t\boldsymbol{x}) = tF(\boldsymbol{x})$ quando $t \geq 0$, conviene rendere *omogenee* le espressioni di $F(\Lambda)$ e di $m(\boldsymbol{x}_0, \Lambda)$ rispetto alla quantità $d(\Lambda)$. Porremo allora, secondo la notazione corrente (2):

$$\Delta(\Lambda) = F^n(\Lambda)/d(\Lambda), \tag{5}$$

$$\mu(\boldsymbol{x}, \Lambda) = m^n(\boldsymbol{x}, \Lambda)/d(\Lambda). \tag{6}$$

Come conseguenza del teorema 2, siamo giunti al seguente teorema di carattere generale:

TEOREMA 3. – *Sia* $0 < \vartheta \leq 1$, *e sia* $N \geq (Cn)^n \Delta(\Lambda)^{-1} \vartheta^{-1}$ (3). *Allora per ogni* $\boldsymbol{x}$ *esiste un intero* h *(dipendente da* $\boldsymbol{x}, \Lambda, \mathcal{S}$*) con* $1 \leq h \leq N$ *tale che:*

$$\mu(h\boldsymbol{x}, \Lambda) \leq \vartheta\Delta(\Lambda). \tag{7}$$

La dimostrazione di questo teorema si ottiene appoggiandosi al teorema 2, con $b_0 = 1$, $b_m = 2(1 - m/N)$; si usa inoltre una importante osservazione dovuta ad A. C. Woods [6], il quale se ne è servito per applicare il principio di Blichfeldt al problema del minimo del prodotto di n forme lineari non omogenee. Segnaliamo il fatto interessante che, in questo teorema, l'intervallo nel quale è confinato l'intero h non dipende dal punto $\boldsymbol{x}$.

Infine, se la condizione $0 < \vartheta \leq 1$ presente nel teorema potesse essere portata a $0 \leq \vartheta$, si avrebbe:

$$\text{Sia } \vartheta > 0, \quad \text{e sia } N \geq (Cn)^n \vartheta^{-1}. \tag{8}$$

Allora per ogni $\boldsymbol{x}$ esiste un intero h (dipendente da $\boldsymbol{x}, \Lambda, \mathcal{S}$) con $1 \leq h \leq N$ per cui:

$$\mu(h\boldsymbol{x}, \Lambda) \leq \vartheta.$$

Attualmente non sappiamo se una tale generalizzazione del teorema 3 sia valida.

(2) Vedi J. W. S. CASSELS [1].

(3) Nota: la costante C è quella che figura nella (4).

3. – APPLICAZIONI AL PRODOTTO DI n FORME LINEARI NON OMOGENEE.

Nel caso particolare della funzione-distanza $F(\boldsymbol{x}) = |x_1 x_2 \cdots x_n|^{1/n}$ è possibile ottenere risultati più precisi di quelli ottenuti col teorema 3, a causa della particolare natura del problema. In questo caso, una ben nota congettura di Minkowski afferma: per ogni $\boldsymbol{x}$ vale la disuguaglianza

$$\mu(\boldsymbol{x}, \Lambda) \leq 2^{-n}. \tag{9}$$

Se vera, la (8) è una disuguaglianza migliore possibile. Con l'aiuto del teorema 2, dell'osservazione di Woods [6] e di un metodo dovuto a Tschebotarev [5], siamo arrivati a stabilire i seguenti teoremi:

TEOREMA 4. – *Se* $0 < \vartheta \leq 1$, e $N \geq 1/\vartheta^2$, *allora per ogni* $\boldsymbol{x}$ *esiste un intero* h (*dipendente da* $\boldsymbol{x}$ *e da* Λ), *con* $1 \leq h \leq N$, *e*

$$\mu(h\boldsymbol{x}, \Lambda) \leq \vartheta.$$

Osserviamo che in questo caso particolare l'intervallo in cui è confinato h non dipende dal reticolo Λ.

TEOREMA 5. – *Per ogni* $\boldsymbol{x}$ *esiste un intero* h (*dipendente da* $\boldsymbol{x}$ *e da* Λ) *con* $1 \leq h \leq (\sqrt{2})^{n+1}$ *tale che*

$$\mu(h\boldsymbol{x}, \Lambda) \leq 2^{-n}.$$

Il teorema 2, assumendo $h = 56$ ci dà la seguente maggiorazione per $\mu(\boldsymbol{x}, \Lambda)$ valida in ogni caso:

TEOREMA 6. – *Per ogni* $n \geq n_0$ *e per ogni* $\boldsymbol{x}$ *si ha:*

$$\mu(\boldsymbol{x}, \Lambda) \leq (3 + 10^{-4})^{-1} (2e - 1)^{-1} (\sqrt{2})^{-n}.$$

Questo teorema migliora il precedente risultato di H. Davenport [2]:

Se $n \geq n_0(\delta)$, *allora per ogni* $\boldsymbol{x}$ *si ha*

$$\mu(\boldsymbol{x}, \Lambda) \leq (2e - 1 - \delta)^{-1} (\sqrt{2})^{-n}.$$

Possiamo osservare infine che se al posto del teorema 2 si usasse il principio di Blichfeldt nella forma introdotta da Woods [6], si otterrebbe soltanto la proposizione seguente:

Se $n \geq n_0(\delta)$, *allora per ogni* $\boldsymbol{x}$ *si ha*

$$\mu(\boldsymbol{x}, \Lambda) \leq (1/2)(2e - 1 - \delta)^{-1} (\sqrt{2})^{-n}.$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] J. W. S. CASSELS, *An introduction to the Geometry of Numbers*. Springer-Verlag, Berlin (1959).

[2] H. DAVENPORT, *On a theorem of Tschebotarev*, « J. London Math. Soc. », *21*, pp. 28–34 (1946), e Corrigendum, ibidem, *24*, p. 316 (1949).

[3] L. J. MORDELL, *The lattice points in a parallelogram*, « Math. Annalen », *103*, pp. 38–47 (1930).

[4] C. L. SIEGEL, *Uber Gitterpunkte in konvexen Körpern und ein zusammenhangendes Extremalproblem*, « Acta Math. », *65*, pp. 309–323 (1935).

[5] N. TSCHEBOTAREV, *Beweis der Minkowskischen Satzes über lineare inhomogene Formen*, « Ucen. Zapiski Kazansk. Gos. Univ. », *94*, pp. 3–16 (1934).

[6] A. C. WOODS, *On a theorem of Tschebotareff*, « Duke Math. Jour. », *25*, pp. 631–638 (1958).