Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

George Ciucu

## L'ergodicità dei processi stocastici a vincoli completi

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **33** (1962), n.3-4, p. 119–121.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_3-4_119_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

**Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali**

*Ferie 1962 Settembre–Ottobre*


## NOTE PRESENTATE DA SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione).

**Calcolo delle probabilità.** — *L'ergodicità dei processi stocastici a vincoli completi.* Nota di GEORGE CIUCU, presentata (*) dal Socio F. P. CANTELLI.

1. GENERALITÀ. – Estendendo l'applicazione di metodi già impiegati [1] per dimostrare alcuni teoremi ergodici particolari dimostro qui un teorema valido per tutti i processi stocastici a vincoli completi, a meno di limitazioni di carattere generale.

Definisco anzitutto il processo come un'applicazione di uno spazio generico $\Omega$ in se stesso, tramite una famiglia $\Omega(t)$ di spazi, $t$ essendo l'elemento generico di un semigruppo G.

Il processo sarà allora rappresentato da una famiglia di funzioni misurabili $(f_t)_{t \in G}$, ed il teorema ergodico rispettivo consiste nella convergenza di $f_t$, per $t \rightarrow \infty$, verso una costante, sotto le condizioni *a*), *b*), *c*) del n. 3, già usate in parte nei lavori citati.

2. DEFINIZIONI. – Sia $\Omega$ un insieme, $\mathcal{S}(\Omega)$ l'insieme delle sue parti, $\mathfrak{B} \subset \mathcal{S}(\Omega)$ un corpo boreliano e P una probabilità su $\mathfrak{B}$; indico con $B(\Omega)$

(*) Nella seduta del 12 giugno 1962.

(1) G. CIUCU e R. THEODORESCU, *Processi con vincoli completi* (in romeno). Ed. Acad. R. P. R., 1960; O. ONICESCU e G. MIHOC, *Sur les chaînes de variables statistiques*, « Bull. Sci. Math. », 59, (1935). R. FORTET, *Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et ses applications à la théorie des probabilités en chaîne*, Thèse, Paris 1938.

lo spazio vettoriale delle funzioni $f$, definite su $\Omega$, a valori reali, limitate e B–misurabili, munito della norma

$$\|f\| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)| .$$

Sia G un semigruppo, del quale indico con $s \circ t$ la legge di composizione. Inoltre suppongo che:

1° G sia un insieme diretto (*dirigé*), cioè tale che, quali si siano $r, s \in G$, esista un $t \in G$ maggiorante (tale cioè che $t \geq r$, $t \geq s$);

2° qualunque sia $n \in N^* = \{1, 2, \cdots\}$, e per ogni $s_0 \in G$, esista un $t(n, s_0)$ tale che ogni $t \geq s_0$ sia decomponibile in $n$ fattori $t_j$ tutti superiori a $t(n, s_0)$, cioè

$$t_j \geq t(n, s_0), \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Ad ogni $t \in G$ faccio corrispondere un insieme $\Omega(t)$ e un corpo boreliano $\mathcal{B}(t) \subset \mathcal{S}(\Omega(t))$.

Considero:

1° un'applicazione $u_{t,x}$ di $\Omega$ in $\Omega$ definita per ogni $x \in \Omega(t)$ ed ogni $t \in G$, tale che per ogni $A \in \mathcal{B}$ la totalità delle coppie $(c, x)$ tali che $c \in \Omega$, $u_{t,x}(c) \in A$, appartenga allo spazio prodotto $\mathcal{B} \times \mathcal{B}(t)$;

2° una funzione reale $P_t(c, A)$, definita su $\Omega \times \mathcal{B}(t)$, con i seguenti caratteri:

*a*) qualunque sia $c \in \mathcal{B}(t)$, $P_t(c, A)$, considerato come funzione dell'insieme $A \in \mathcal{B}(t)$, sia una probabilità;

*b*) qualunque sia $A \in \mathcal{B}(t)$, $P_t(c, A)$, considerato come funzione di $c \in \Omega$, appartenga a $B(\Omega)$.

3. Il teorema ergodico. – Considero adesso una funzione $f \in B(\Omega)$. La funzione $f(u_{t,x}(c))$ può essere considerata definita anche su $\Omega \times \Omega(t)$ e come tale anche $\mathcal{B} \times \mathcal{B}(t)$–misurabile. Dunque

$$g_t(c) = \int_{\Omega(t)} f(u_{t,x}(c))\, P_t(c, dx)$$

esiste ed appartiene a $B(\Omega)$. Si osservi anche che $\|g\| \leq \|f\|$.

Teorema. – *Sia* $(f_t)_{t \in G}$ *una famiglia di funzioni appartenenti a* $B(\Omega)$. *Supposto che*:

a) *esista un* $\lambda > 0$, *e una famiglia* $(p_t)_{t \in G}$ *di probabilità definite sui rispettivi* $\mathcal{B}(t)$, *per cui risulti*

$$P_t(c, A) \geq \lambda\, p_t(A)$$

*quali si siano* $c \in \Omega$, $A \in \mathcal{B}(t)$ *e* $t \in G$;

b) *esista una funzione reale positiva* $\varepsilon(t)$ *dei* $t \in G$, *tale che* $\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0$ *per cui si abbia*

$$|f_r(u_{s,x}(c')) - f_r(u_{s,x}(c''))| \leq \varepsilon(s)$$

*quali si siano* $r, s \in G$, $x \in \Omega(s)$ *e* $c', c'' \in \Omega$;

c) *valga la relazione*

$$f_{s\circ t}(c) = \int_{\Omega(t)} f_s(u_{t,x}(c))\, P_t(c, dx)$$

*quali si siano* $s, t \in G$ *e* $c \in \Omega$;

*allora la famiglia* $f_t$ *converge uniformemente verso una costante quando* $t \to \infty$.

4. DIMOSTRAZIONE. – Si ponga, per ogni $t \in G$,

$$\bar{f}_t = \sup_{z \in \Omega} f_t(z) \quad , \quad \underline{f}_t = \inf_{z \in \Omega} f_t(z),$$

si indichi (per ogni $c', c'' \in \Omega, t \in G, A \in \mathfrak{B}(t)$)

$$q_t(c', c''; A) = p_t(c', A) - p_t(c'', A)$$

e si consideri una partizione $\{U_t, V_t\}$ di $\Omega$, costruita con insiemi di $\mathfrak{B}(t)$, tale che

$$q_t(c', c''; A) \geq 0 \text{ se } A \subset U_t \text{ e } q_t(c', c''; A) < 0 \text{ se } A \subset V_t.$$

Si ha

$$q_t(c', c''; U_t) = |q_t(c', c''; V_t)| \leq h = 1 - \frac{1}{2}\lambda$$

(evidentemente, è $0 < h < 1$).

Siano $t, s, r \in G$ e soddisfacenti la relazione $t = s \circ r$; allora è

$$f_t(c') - f_t(c'') = \int_{\Omega(t)} q_s(c', c''; dx) f_r(u_{s,x}(c')) +$$

$$+ \int_{\Omega(t)} p_s(c'', dx) \{f_r(u_{s,x}(c')) - f_r(u_{s,x}(c''))\},$$

qualunque siano $c', c'' \in \Omega$.

In tale espressione il secondo addendo è maggiorato da $\varepsilon(s)$ ed il primo (come si può dimostrare) da $h(\bar{f}_r - \underline{f}_r)$; ne risulta che

$$a(t) = \bar{f}_t - \underline{f}_t \leq h \cdot (\bar{f}_r - \underline{f}_r) + \varepsilon(s) \leq a \cdot h + \varepsilon(s)$$

dove si è posto

$$a = \sup_{t \in G} a(t).$$

Fissato ora ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si scelgano un $s_0 \in G$ tale che $\varepsilon(s) \leq \varepsilon$ se $s \geq s_0$, ed un $n \in N^*$ tale che $h^n \leq \varepsilon$.

Allora, se $t \geq s_0$, si può scrivere, in base all'ipotesi (2) del n. 2, $t = t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_n$, con $t_j \geq t(n, s_0), j = 1 \cdots n$. E si può concludere che è, per $t \geq s_0$

$$a(t) \leq ah^n + (1 + h + \cdots + h^{n-1})\varepsilon \leq \left(a + \frac{1}{1-h}\right)\varepsilon;$$

per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, il teorema risulta dimostrato.

5. OSSERVAZIONE. – Sia il semigruppo additivo che il semigruppo moltiplicativo dei numeri reali positivi verificano le condizioni assegnate al semigruppo G; basta prendere, nel primo caso, $t(n, s_0) = s_0/n$, e nel secondo $t(n, s_0) = \sqrt[n]{s_0}$.