Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luigi Amerio

Soluzioni quasi-periodiche delle equazioni lineari iperboliche quasi-periodiche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.5, p. 179–186.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_5_179_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Matematica. — *Soluzioni quasi-periodiche delle equazioni lineari iperboliche quasi-periodiche* (*). Nota (**) del Corrisp. LUIGI AMERIO.

1. Siano X e Y due spazi di Hilbert; X sia separabile, $\subset$ Y, denso in Y e con immersione continua. Diciamo J l'intervallo $-\infty < t < +\infty$, Δ_0 l'intervallo $|t| \leq 1/2$, Δ un qualunque intervallo limitato.

Indichiamo con $a(t, u, v)$, $b(t, u, v)$, $c(t, u, v)$ tre forme sesquilineari, rispettivamente su $X \times X$, $Y \times X$, $X \times Y$, limitate per ogni $t \in J$.

Si può interpretare la forma $a(t, u, v)$ come una funzione di t, $a(t) = \{a(t, u, v); u \in X, v \in X\}$, a valori nello spazio $\mathfrak{A}$, di Banach, avente come elementi le forme sesquilineari limitate su $X \times X$; per l'elemento $a = \{a(u, v); u \in X, v \in X\} \in \mathfrak{A}$ assumeremo la norma

$$\| a \|_{\mathfrak{A}} = \operatorname*{Sup}_{u,v \neq 0} \frac{|a(u, v)|}{\| u \|_X \| v \|_X} .$$

Analogamente si procede per le funzioni $b(t) = \{b(t, u, v); u \in Y, v \in X\}$, $c(t) = \{c(t, u, v); u \in X, v \in Y\}$, nei rispettivi spazi $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Supponiamo che le funzioni $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ siano limitate in J, risulti cioè

$$\operatorname*{Sup}_{t \in J} \| a(t) \|_{\mathfrak{A}} = A \quad , \quad \operatorname*{Sup}_{t \in J} \| b(t) \|_{\mathfrak{B}} = B \quad , \quad \operatorname*{Sup}_{t \in J} \| c(t) \|_{\mathfrak{C}} = C,$$

con

$$A, B, C < +\infty.$$

Sia poi $f(t)$, $t \in J$, una funzione $\in L^2(\Delta, Y)$ per ogni Δ (cioè a valori in Y, per quasi tutti i t, sommabile secondo Bochner in ogni intervallo limitato e con norma di quadrato ivi sommabile).

Consideriamo ora l'*equazione funzionale indefinita* (del tipo introdotto da Lions (1))

$$(1,1) \qquad \int_J \{(x'(t), h'(t))_Y - a(t, x(t), h(t))\} \, dt =$$
$$= \int_J \{b(t, x'(t), h(t)) + c(t, x(t), h(t)) + (f(t), h(t))_Y\} \, dt.$$

La funzione $x(t)$ si supporrà definita in J e tale che sia, per ogni Δ,

$$(1,2) \qquad x(t) \in L^2(\Delta, X) \quad , \quad x'(t) \in L^2(\Delta, Y).$$

La derivata $x'(t)$ va intesa nel senso delle distribuzioni.

(*) Istituto Matematico del Politecnico di Milano. Gruppo di ricerca n. 12 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1961-62.

(**) Presentata nella seduta del 17 novembre 1962.

(1) J. L. LIONS, *Problemi misti nel senso di Hadamard classici e generalizzati*, « Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano », *38*, pp. 149-188 (1959).

Osserviamo che $x(t)$ *risulta* Y–*continua* (cioè continua come funzione a valori in Y) *in tutto* J.

Affinché $x(t)$ sia soluzione della (1,1) si richiede, per definizione, che la (1,1) risulti soddisfatta *comunque* si prenda la *funzione di confronto* $h(t)$, nell'insieme $\mathcal{H}$ definito dalle condizioni:

$$h(t) \in L^2(\Delta, X) \quad , \quad h'(t) \in L^2(\Delta, Y) \qquad \text{(per ogni } \Delta),$$

$h(t)$ *è a supporto compatto.*

Perciò, se $h(t) \in \mathcal{H}$, anche $h(t+\tau) \in \mathcal{H}$, per ogni $\tau \in J$.

È immediato allora riconoscere che l'incognita x soddisfa, per ogni $t \in J$, all'equazione

$$(1,3) \qquad \int_J \{x'(t+\eta), h'(\eta))_Y - a(t+\eta, x(t+\eta), h(\eta))\} \, d\eta =$$

$$= \int_J \{b(t+\eta, x'(t+\eta), h(\eta)) + c(t+\eta, x(t+\eta), h(\eta)) +$$

$$+ (f(t+\eta), h(\eta))_Y\} \, d\eta .$$

Se $\Delta = \Delta_0$, scriveremo $L_0^2(X)$, $L_0^2(Y)$ in luogo di $L^2(\Delta_0, X)$, $L^2(\Delta_0, Y)$ rispettivamente.

Si indicherà poi con W_0 lo spazio hilbertiano formato dalle funzioni $w(\eta)$, $\eta \in \Delta_0$, tali che sia

$$(1,4) \qquad w(\eta) \in L_0^2(X) \quad , \quad w'(\eta) \in L_0^2(Y),$$

assumendo come prodotto scalare la quantità

$$(1,5) \qquad (w_1, w_2)_{W_0} = \int_{\Delta_0} (w_1(\eta), w_2(\eta))_X \, d\eta + \int_{\Delta_0} (w_1'(\eta), w_2'(\eta))_Y \, d\eta =$$

$$= (w_1, w_2)_{L_0^2(X)} + (w_1', w_2')_{L_0^2(Y)},$$

cui corrisponde la norma

$$(1,6) \qquad \|w\|_{W_0} = \left\{ \|w\|_{L_0^2(X)}^2 + \|w'\|_{L_0^2(Y)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Sia $x(t)$ una soluzione della (1,1); allora $\{x(t+\eta); \eta \in \Delta_0\}$ definisce una funzione di t a valori di W_0, che indicheremo ancora con $x(t)$, sicché risulterà:

$$(1,7) \qquad \|x(t)\|_{W_0} = \left\{ \int_{\Delta_0} \|x(t+\eta)\|_X^2 \, d\eta + \int_{\Delta_0} \|x'(t+\eta\|_Y^2 \, d\eta \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \|x(t)\|_{L_0^2(X)}^2 + \|x'(t)\|_{L_0^2(Y)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Si osservi che $x(t)$ *è* W_0*–continua*, si ha cioè, in tutto J,

$$\lim_{\tau \to 0} \| x(t+\tau) - x(t) \|_{W_0} = 0 .$$

Pertanto $x(t)$ *e* $x'(t)$ *sono, rispettivamente,* $L_0^2(X)$ *ed* $L_0^2(Y)$*–continue*: si riconosce inoltre che $x'(t)$ *definisce anche la* $L_0^2(Y)$*–derivata di* $x(t)$ (cfr. loc. cit. in [4]).

Infine, *il termine noto* $f(t)$ *risulta* $L_0^2(Y)$*–continuo*.

In un recente lavoro [2] ho studiato l'equazione (1,1) (o meglio, un caso particolare la cui teoria si estende, peraltro, all'equazione qui considerata), nell'ipotesi che le forme $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ siano rispettivamente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$–quasi–periodiche (q.p.) e che il termine noto $f(t)$ sia $L_0^2(Y)$–debolmente quasi–periodico (d.q.p.).

Scopo di tale ricerca è stato di provare l'esistenza di soluzioni W_0–q.p., in modo da ottenere una estensione dei classici teoremi dati da Favard per i sistemi lineari ordinari q.p.

Tale estensione è conseguita, in [2], con enunciati che possono dirsi una naturale estensione di quelli di Favard, quando però ci si limiti a dimostrare la W_0*–quasi–periodicità debole della soluzione minimale* (corrispondente al *teorema di minimax* [3]).

La W_0–quasi–peridicità (forte) della stessa soluzione si dimostra, invece, ammettendo la validità di un teorema di dipendenza continua, ovvio per i sistemi ordinari, ma che per la (1,1) occorre provare caso per caso.

In una Memoria, attualmente in corso di stampa negli Annali di Matematica [4], ho ottenuto per altra via il teorema di quasi–periodicità forte, senza ricorrere al suddetto teorema. Si è dovuto, per questo, supporre che *l'immersione di* X *in* Y *sia completamente continua, anzichè continua*: si perviene però ad un enunciato molto semplice, che è possibile applicare a classici problemi di propagazione per le equazioni iperboliche a coefficienti dipendenti dal posto e dal tempo.

Nella presente Nota sono riportate, senza le dimostrazioni, la proposizione conclusiva ottenuta e le applicazioni dedotte.

2. Ammesso, come si è fatto nel § 1, che le forme $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ siano q.p., diciamo $l = \{l_n\}$ una successione reale, *regolare* rispetto a tali funzioni, per la quale cioè risulti, uniformemente in J,

$$(2,1) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} a(t+l_n) = a_l(t), \\ \lim\limits_{n \to \infty} b(t+l_n) = b_l(t), \\ \lim\limits_{n \to \infty} c(t+l_n) = c_l(t). \end{cases}$$

(2) L. AMERIO, *Sulle equazioni lineari quasi–periodiche negli spazi hilbertiani*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », *31* (1961), Nota I, pp. 110–117, Nota II, pp. 197–205.

(3) L. AMERIO, loc. cit. in (2), pp. 113–115.

(4) L. AMERIO, *Soluzioni quasi–periodiche di equazioni quasi–periodiche negli spazi hilbertiani*, « Annali di Matematica » (in corso di stampa).

Le funzioni $a_l(t)$, $b_l(t)$, $c_l(t)$ risultano q.p., al pari di $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$.

Associamo poi alla (1,1) (come in [2], e analogamente a quanto fatto da Favard per i sistemi ordinari) la famiglia di equazioni omogenee

$$(2,2) \qquad \int_J \{(u'(t), h'(t))_Y - a_l(t, u(t), h(t))\}\, dt = $$
$$= \int_J \{b_l(t, u'(t), h(t)) + c_l(t, u(t), h(t))\}\, dt,$$

nell'incognita $u(t)$.

Indicata con Γ_0 la classe delle *funzioni* $z(t)$ *a valori in* W_0, W_0–*limitate e* W_0–*uniformemente continue in* J, vale allora il seguente *teorema di quasi–periodicità (forte)*.

Siano soddisfatte le ipotesi:

1) *l'immersione di* X *in* Y *è completamente continua;*

2) *le forme* $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ *sono q.p.; risulta inoltre (condizione di ellitticità)*

$$\Re\, a(t, x, x) \geq \nu \|x\|_X^2, \qquad (\nu > 0);$$

3) *il termine noto* $f(t)$ *è* $L_0^2(Y)$*–d.q.p.;*

4) *esiste, in corrispondenza di ogni equazione* (2,2), *una costante* $\sigma_l > 0$ *tale che, per ogni soluzione* $u(t) \in \Gamma_0$ *della* (2,2), *risulti*

$$(2,3) \qquad \operatorname*{Inf}_{t \in J} \|u(t)\|_{W_0} \geq \sigma_l \operatorname*{Sup}_{t \in J} \|u(t)\|_{W_0};$$

5) *l'equazione* (1,1) *ha una soluzione* $x_0(t) \in \Gamma_0$.

Allora l'equazione (1,1) *ammette una soluzione* $\mathring{x}(t)$ W_0–q.p.

Precisamente: *risulta* W_0*–q.p. la soluzione minimale (in* Γ_0*),* $\mathring{x}(t)$ *(della quale, come in* [2], *si dimostra l'esistenza, l'unicità e la* W_0*–quasi periodicità debole).*

Si noti che la (2,3) esclude che le soluzioni (non nulle) $\in \Gamma_0$ delle equazioni omogenee associate (2,2) abbiano lo zero come valore limite: si tratta di una proprietà richiesta anche nei teoremi di Favard per i sistemi ordinari [5].

3. Possiamo applicare il teorema ora enunciato all'*equazione iperbolica:*

$$(3,1) \quad \frac{\partial^2 x(t,\xi)}{\partial t^2} = \sum_{j,k}^{1\cdots m} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(a_{jk}(t,\xi)\frac{\partial x(t,\xi)}{\partial \xi_k}\right) + \sum_{j}^{1\cdots m} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(b_j(t,\xi)\frac{\partial x(t,\xi)}{\partial t}\right) +$$
$$- b_0(t,\xi)\frac{\partial x(t,\xi)}{\partial t} - \sum_{j}^{1\cdots m} c_j(t,\xi)\frac{\partial x(t,\xi)}{\partial \xi_j} - c_0(t,\xi)\, x(t,\xi) - f(t,\xi).$$

Nella (3,1) supporremo $t \in J$, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_m) \in \Omega$, insieme *aperto, limitato e connesso* dello spazio euclideo S_m.

(5) J. FAVARD, *Leçons sur les fonctions presque–périodiques*, Gauthier–Villars, 1933, pp. 90–95.

I coefficienti $a_{jk}, b_j, c_i, b_0, c_0$ si supporranno complessi, *limitati in* $J \times \Omega$ *e q.p. come funzioni di t a valori in* $L^\infty(\Omega)$:

$$a_{jk}(t) = \{a_{jk}(t, \xi) \quad ; \quad \xi \in \Omega\}, \cdots, c_0(t) = \{c_0(t, \xi) \quad ; \quad \xi \in \Omega\}.$$

Se $s = \{s_n\}$ è una arbitraria successione reale, esiste allora, per il criterio di Bochner, una sottosuccessione $l = \{l_n\}$ tale che risulti, uniformemente in J (nella norma di $L^\infty(\Omega)$):

$$\lim_{n\to\infty} a_{jk}(t + l_n) = a_{jk}^{(l)}(t), \cdots, \lim_{n\to\infty} c_0(t + l_n) = c_0^{(l)}(t)$$

cioè, uniformemente in $J \times \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} a_{jk}(t + l_n, \xi) = a_{jk}^{(l)}(t, \xi), \cdots, \lim_{n\to\infty} c_0(t + l_n, \xi) = c_0^{(l)}(t, \xi).$$

Anche i limiti $a_{jk}^{(l)}(t, \xi), \cdots, c_0^{(l)}(t, \xi)$ risultano q.p., come funzioni di t a valori in $L^\infty(\Omega)$.

Assumeremo $Y = L^2(\Omega)$, supponendo perciò che il termine noto $f(t, \xi)$ sia a valori in $L^2(\Omega)$, come funzione di $t: f(t) = \{f(t, \xi); \ \xi \in \Omega\}$. Inoltre, $f(t)$ dev'essere $L_0^2(Y)$-d.q.p.: ciò significa che, per ogni $g(\eta, \xi) \in L^2(\Delta_0 \times \Omega)$, il prodotto scalare

$$(f(t), g)_{L_0^2(Y)} = \int_{\Delta_0} d\eta \int_\Omega f(t + \eta, \xi) \bar{g}(\eta, \xi) \, d\Omega$$

risulta funzione q.p. di t (con $\bar{\alpha}$ si è indicato il coniugato del numero complesso α).

Ammetteremo inoltre che, per ogni m-pla complessa $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$, sia soddisfatta la limitazione:

$$\sum_{j,k}^{1\cdots m} a_{jk}(t, \xi) \lambda_k \bar{\lambda}_j \geq \nu \sum_j^{1\cdots m} |\lambda_j|^2 \qquad (\nu > 0). \tag{3,2}$$

Detta σ la frontiera di Ω, consideriamo il problema consistente nel determinare le soluzioni, in $J \times \Omega$, della (3,1) soddisfacenti alla condizione (di Dirichlet, omogenea):

$$x(t, \xi)|_\sigma = 0. \tag{3,3}$$

Cerchiamo le soluzioni deboli, nel senso di Ladyzenskaja. Per questo, detta $h(t, \xi)$ una funzione a supporto compatto e $\subset J \times \Omega$, continua con le derivate prime, si moltiplichino entrambi i membri della (3,1) per $\bar{h}(t, \xi)$ e si integri in $J \times \Omega$. Applicando la formula di Green otteniamo, formalmente:

$$\begin{aligned} -\int_J dt \int_\Omega \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} d\Omega = &-\int_J dt \int_\Omega \sum_{j,k}^{1\cdots m} a_{jk}(t, \xi) \frac{\partial x}{\partial \xi_k} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi_j} d\Omega + \\ &-\int_J dt \int_\Omega \frac{\partial x}{\partial t} \left\{ \sum_j^{1\cdots m} b_j(t, \xi) \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi_j} + b_0(t, \xi) \bar{h} \right\} d\Omega + \\ -\int_J dt \int_\Omega \left\{ \sum_j^{1\cdots m} c_j(t, \xi) \frac{\partial x}{\partial \xi_j} + c_0(t, \xi) x \right\} \bar{h} \, d\Omega &- \int_J dt \int_\Omega f(t, \xi) \bar{h} \, d\Omega. \end{aligned} \tag{3,4}$$

Sia ora $X = H_0^1(\Omega)$, spazio formato dalle funzioni $x(\xi)$ continue con le derivate prime, a supporto $\subset \Omega$, e dai limiti di queste nella norma

$$\|x\|_X = \left\{ \int_\Omega |\operatorname{grad} x(\xi)|^2 d\Omega \right\}^{1/2}.$$

È noto che *l'immersione di* X *in* Y *è completamente continua.*

Interpretiamo, nella (3,4), $x(t, \xi)$ come funzione di t a valori in X, ponendo $x(t) = \{x(t, \xi); \xi \in \Omega\}$; la derivata $x'(t) = \left\{ \frac{\partial x(t, \xi)}{\partial t}; \xi \in \Omega \right\}$ si supporrà a valori in Y. Si pongano inoltre, per la funzione di confronto $h(t) = \{h(t, \xi); \xi \in \Omega\}$, le condizioni assegnate per $x(t)$, ammettendo, in più, che $h(t)$ abbia, in J, supporto compatto.

Dalla (3,4) segue allora che $x(t)$ verifica un'equazione del tipo:

$$\int_J \{(x'(t), h'(t))_Y dt - a(t, x(t), h(t))\} dt = \tag{3,5}$$
$$= \int_J \{b(t, x'(t), h(t)) + c(t, x(t), h(t)) + (f(t), h(t))_Y\} dt,$$

ove le *forme sesquilineari* $a(t, u, v)$, $b(t, u, v)$, $c(t, u, v)$ sono definite, in modo ovvio, mediante la (3,4) e *soddisfano alle condizioni poste nel teorema di quasi-periodicità*: risulta infatti

$$\|a(t+\tau) - a(t)\|_{\mathfrak{A}} \leq \sum_{j,k}^{1\cdots m} \|a_{jk}(t+\tau) - a_{jk}(t)\|_{L^\infty(\Omega)},$$

e analogamente per le altre forme. Le soluzioni $x(t)$ della (3,5) sono dette *soluzioni deboli della* (3,1), con la condizione (3,3). Ci riferiremo esclusivamente a tali funzioni che diremo, senz'altro, *soluzioni* della (3,1).

Risulta inoltre

$$\|x(t)\|_{W_0} = \left\{ \int_{\Delta_0} d\eta \int_\Omega |\operatorname{grad}_\xi x(t+\eta, \xi)|^2 d\Omega + \int_{\Delta_0} d\eta \int_\Omega \left| \frac{\partial x(t+\eta, \xi)}{\partial \eta} \right|^2 d\Omega \right\}^{1/2}$$

e le equazioni (2,2) si ricavano (come la (3,5) dalla (3,1)) a partire dalle equazioni omogenee associate:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j,k}^{1\cdots m} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(a_{jk}^{(l)}(t, \xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_k}\right) + \cdots - c_0^{(l)}(t, \xi)\, u, \tag{3,6}$$

nell'incognita $u(t, \xi)$.

Per poter applicare il teorema di quasi-periodicità occorre perciò che:

I) *esista, per ogni equazione* (3,6), *una costante* $\sigma_l > 0$ *tale che ogni soluzione* $u(t) = \{u(t, \xi); \xi \in \Omega\}$ *appartenente a* Γ_0 *soddisfi alla limitazione*

$$\operatorname*{Inf}_{t \in J} \|u(t)\|_{W_0} \geq \sigma_l \operatorname*{Sup}_{t \in J} \|u(t)\|_{W_0}; \tag{3,7}$$

II) *la* (3,1) *ammetta una soluzione* $x_0(t, \xi) \in \Gamma_0$.

In tali ipotesi, la (3,1) *ammette una soluzione* $\tilde{x}(t\,,\xi)$ W_0*-q.p.: la soluzione minimale.*

Si noti, inoltre, che la (3,7) è soddisfatta, in virtù del principio di conservazione dell'energia, se la (3,1) si riduce alla classica equazione delle onde.

In questo caso, anzi, tutte le soluzioni risultano q.p., poiché tali sono, come è noto, le soluzioni dell'equazione omogenea delle onde.

Consideriamo la seguente, più generale, equazione:

$$(3,8) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \varphi^2(t)\left\{\sum_{j,k}^{1\cdots m}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(a_{jk}(\xi)\frac{\partial x}{\partial \xi_k}\right) - c_0(\xi)\,x - f(t\,,\xi)\right\} + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\frac{\partial x}{\partial t}$$

$$(c_0(\xi) \geq 0),$$

supponendo $\varphi(t) \geq \rho > 0$, $\varphi(t)$ q.p. insieme alla derivata $\varphi'(t)$.

Sia $l = \{l_n\}$ una successione regolare rispetto a $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$: posto

$$\varphi_l(t) = \lim_{n\to\infty}\varphi(t + l_n)$$

(e quindi

$$\varphi'_l(t) = \lim_{n\to\infty}\varphi'(t + l_n)),$$

le equazioni omogenee associate alla (3,8) diventano:

$$(3,9) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi_l^2(t)\left\{\sum_{j,k}^{1\cdots m}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(a_{jk}(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\right) - c_0(\xi)\,u\right\} + \frac{\varphi'_l(t)}{\varphi_l(t)}\frac{\partial u}{\partial t}\,.$$

Con la sostituzione

$$(3,10) \qquad \tau = \int_0^t \varphi_l(\eta)\,d\eta,$$

otteniamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\varphi_l(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\varphi_l^2(t) + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\varphi'_l(t)}{\varphi_l(t)}$$

e la (3,9) si trasforma nell'equazione delle onde:

$$(3,11) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \sum_{j,k}^{1\cdots m}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(a_{jk}(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\right) - c_0(\xi)\,u.$$

Si ricava allora, per il principio di conservazione dell'energia, detta K_u una costante ≥ 0 (dipendente solo dall'integrale $u(\tau\,,\xi)$),

$$\int_\Omega\left\{\sum_{j,k}^{1\cdots m}a_{jk}(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_j} + c_0(\xi)\,|\,u\,|^2\right\}d\Omega + \int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|^2 d\Omega = K_u^2$$

cioè

$$\int_\Omega\left\{\sum_{j,k}^{1\cdots m}a_{jk}(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_j} + c_0(\xi)\,|\,u\,|^2\right\}d\Omega + \frac{1}{\varphi_l^2(t)}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 d\Omega = K_u^2.$$

Si deducono di qui le limitazioni:

$$\alpha K_u \leq \{\| u(t) \|_X^2 + \| u'(t) \|_Y^2\}^{1/2} \leq \beta K_u$$

con α, β costanti positive, indipendenti da l e da u: ne segue la (3,7), con $\sigma_l = \alpha/\beta$.

Possiamo perciò applicare alla (3,8) il teorema di quasi–periodicità e dimostrare (se è soddisfatta la condizione II) l'esistenza di *una* soluzione $\tilde{x}(t, \xi)$ W_0–q.p. Non si può però, in generale, dedurre di qui la quasi–periodicità di *tutte* le soluzioni $x(t, \xi)$: si dimostra infatti, utilizzando un risultato di Favard (loc. cit. in [5], pp. 105–106), che *condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione omogenea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi^2(t) \left\{ \sum_{j,k}^{1\ldots m} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(a_{jk}(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_k}\right) - c_0(\xi)\, u \right\} + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \frac{\partial u}{\partial t} \tag{3,12}$$

abbia soluzioni (non nulle) W_0–*q.p. è che risulti*

$$\int_0^t \varphi(\eta)\, d\eta = pt + \psi(t), \tag{3,13}$$

con $\psi(t)$ *funzione q.p.,* p *costante.*

Precisamente: *se vale la* (3,13) *tutte le soluzioni della* (3,12) *sono* W_0–*q.p.; se la* (3,13) *non è soddisfatta, la* (3,12) *non ammette soluzioni* W_0–*q.p.* (esclusa la soluzione nulla). *In questo caso la minimante* $\tilde{x}(t, \xi)$ *è perciò l'unica soluzione* W_0–*q.p. della* (3,8).