Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Tricomi

Sulle equazioni a derivate parziali del secondo tipo misto

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.6, p. 385–388.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_6_385_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 15 dicembre 1962

Presiede il Presidente GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Sulle equazioni a derivate parziali del secondo tipo misto.* Nota (*) del Socio FRANCESCO GIACOMO TRICOMI.

1. I moderni studiosi delle equazioni a derivate parziali, per lo più si occupano di equazioni (o sistemi) complicate o soggette a condizioni eccessivamente generali, su cui si pongono (e talvolta risolvono) dei problemi spesso artificiosi, che sogliono provocare dei commenti poco benevoli da parte dei cultori di matematica applicata che, per caso, ne vengono a conoscenza. Questo potrebbe far credere che lo studio dei classici « problemi al contorno » per equazioni del genere di quelle che si presentano nelle applicazioni (e loro ragionevoli generalizzazioni) sia completamente esaurito, mentre ciò non è. Esistono invero intere classi di equazioni a derivate parziali di notevole interesse applicativo, su cui poco o nulla si sa. Per esempio, questo si può dire per le equazioni (di second'ordine) del *secondo tipo misto* che, nelle condizioni più semplici possibili, sono equazioni della forma

$$x^n \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

essendo n un intero positivo.

Lo studio di queste equazioni fu iniziato, molti anni or sono, dall'allora mia Assistente Maria Cibrario (ora Sig.ra Cinquini) che però, nel caso particolarmente interessante di n dispari, non giunse a risultati in qualche modo

(*) Presentata nella seduta del 15 dicembre 1962.

esaurienti che nel caso $n = 1$ [1]. Invece nell'Aerodinamica transonica [2] si presentano equazioni del tipo (1) in cui n non è neanche intero, precisamente è $n = 1/2$.

Posto per brevità

$$x^{[r]} = |x|^r \cdot \operatorname{sgn} x, \tag{2}$$

interesserebbe dunque (con una ben spontanea generalizzazione) lo studio delle equazioni del tipo

$$x^{[r]} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

dove r è un numero reale positivo, che conviene supporre minore di *due*.

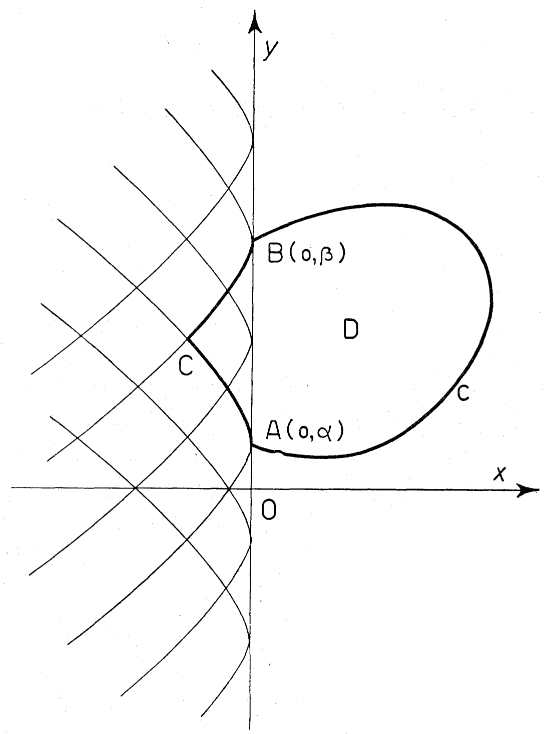

Fig. 1.

La presente breve Nota ha principalmente lo scopo di richiamare l'attenzione degli studiosi su questa interessante classe di equazioni, indicando, a titolo d'esempio, una delle loro più importanti proprietà: un teorema di unicità di un genere un po' insolito.

(1) I numerosi lavori della prof. Cinquini-Cibrario sulle equazioni di tipo misto, si trovano elencati, e parzialmente riassunti, nella sua conferenza: *Equazioni a derivate parziali di tipo misto*, in « Rend. Seminario Mat. Fis. Milano », *25*, 18–40 (1953–54).

(2) Vedi: F. G. TRICOMI, *Transsonische Strömungen und Gleichungen des zweiten gemischten Typus*, nei rendiconti (in corso di stampa) del *Symposium Transsonicum* di Aachen (sett. 1962).

2. L'equazione (3) è visibilmente di tipo ellittico nel semipiano $x > 0$, di tipo iperbolico nel semipiano $x < 0$, e gode della basilare proprietà che *tutte le sue soluzioni sufficientemente regolari* [3] *si riducono a funzioni lineari di* y *sulla «linea parabolica»* $x = 0$, su cui l'equazione si riduce a $\partial^2 z/\partial y^2 = 0$. Quanto alle sue caratteristiche (reali nel semipiano iperbolico $x < 0$), la loro equazione differenziale è

$$(-x)^r\, dy^2 - dx^2 = 0,$$

donde segue subito

$$\frac{dy}{dx} = \pm(-x)^{-r/2} \quad , \quad y - y_0 = \mp \frac{1}{1 - r/2}(-x)^{1-r/2},$$

essendo y_0 una costante arbitraria. Quindi, se è

(4) $$0 < r < 2,$$

come qui vogliamo supporre, tali caratteristiche sono tangenti alla linea parabolica nel punto $(0\,,\,y_0)$ in cui vanno a finire su di essa e presentano l'aspetto indicato nella parte sinistra della figura precedente, che si riferisce particolarmente al caso $r = 1/2$. (Nel caso $r = 1$ tali caratteristiche sono delle ordinarie parabole).

3. La circostanza che le soluzioni *regolari* della (3) si riducono necessariamente a funzioni lineari sulla linea parabolica, lascia intravedere che, per l'equazione in discorso, dovranno valere dei teoremi di esistenza ed unicità sotto condizioni meno impegnative del consueto, per esempio, per le equazioni del primo tipo misto. A giustificazione di ciò, ci limiteremo a far qui vedere che alla (3) può estendersi l'insolito teorema di unicità dimostrato dalla Cinquini–Cibrario nel caso $r = 1$ e cioè che:

Detta c *una «qualsiasi» curva* [4] *del semipiano ellittico* ($x > 0$), *terminante nei due punti* $A \equiv (0\,,\,\alpha)$ *e* $B \equiv (0\,,\,\beta)$ *della linea parabolica* (con $\alpha \leq \beta$), *nel dominio* D *compreso fra tale curva e il segmento* AB *dell'asse* y, *non può esistere più di una soluzione «regolare»* [5] *dell'equazione* (3), *con* $0 < r < 2$, *assumente assegnati valori sulla curva* c *soltanto.*

Infatti faremo vedere che, se una siffatta soluzione si annulla sulla curva c, essa è necessariamente nulla in tutto il dominio D.

(3) La cosa essenziale è che risulti

$$\lim_{x \to 0} |x|^r \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

(4) Questa curva potrà avere lo stesso grado di generalità di quelle che intervengono nella classica teoria delle equazioni di tipo ellittico; in ispecie dovrà essere lecita l'applicazione che è da farsi del lemma di Gauss.

(5) Essenzialmente si richiede che la funzione z sia continua anche al contorno di D, e che esistano le derivate e gli integrali che dovranno essere considerati.

All'uopo giova moltiplicare l'equazione, che nel semipiano $x \geq 0$ assume la forma

$$x^r \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

per la quantità $x^{1-r} z$ [6] e servirsi delle identità

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xz \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2} z^2\right) = xz \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{1-r} z \frac{\partial z}{\partial y}\right) = x^{1-r} z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x^{1-r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

le quali permettono di scrivere che

$$0 = -x^{1-r} z \left(x^r \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) =$$

$$= x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + x^{1-r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial x}\left(xz \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2} z^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^{1-r} z \frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Ciò posto, integriamo duplicemente nel dominio D applicando il lemma di Gauss; avremo così

$$\iint_D \left[x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + x^{1-r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy + \oint_{c+BA} \left[\left(xz \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2} z^2\right)\frac{dx}{dn} + \left(x^{1-r} z \frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dn}\right] ds = 0,$$

ma sulla curva c si ha $z = 0$ mentre sul segmento BA si ha

$$x = 0 \quad , \quad \frac{dx}{dn} = 1 \quad , \quad \frac{dy}{dn} = 0,$$

dunque la precedente identità può più semplicemente scriversi

$$\iint_D \left[x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + x^{1-r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy - \frac{1}{2}\int_B^A z^2\, ds = 0$$

cioè

$$\iint_D \left[x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + x^{1-r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta z^2\, dy = 0.$$

Basta questo – considerato che ambo gli integrandi sono essenzialmente non negativi – per concludere che deve necessariamente essere

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{\partial z}{\partial y} \equiv 0, \text{ (in D)} \quad ; \quad z \equiv 0, \text{ (su AB)},$$

il che implica $z \equiv 0$ in tutto D.

Notiamo finalmente che, dal fatto che su AB è $z \equiv 0$, $\partial z / \partial x \equiv 0$, non deve essere difficile dedurre rigorosamente che z è identicamente nulla anche nel triangolo mistilineo ABC della figura, determinato dalle caratteristiche (di diverso sistema) uscenti dai due punti A e B. All'uopo non c'è che da generalizzare il metodo all'uopo usato dalla Cinquini–Cibrario nel caso $r = 1$ [7].

(6) La riuscita della dimostrazione dipende dalla scelta di questo fattore.

(7) Vedi specialmente la Memoria dell'Autrice: *Intorno ad una equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto iperbolico–ellittica*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa » [2], *3*, 255–285 (1934).