Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Douglas Derry

Sui poligoni aperti d'ordine n in uno spazio proiettivo reale di dimensione n. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.6, p. 405–411.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_6_405_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Geometria. — *Sui poligoni aperti d'ordine n in uno spazio proiettivo reale di dimensione n.* Nota II di DOUGLAS DERRY, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Il problema di costruire una curva differenziabile d'ordine n chiusa nello spazio proiettivo reale di dimensione n, che contenga un arco differenziabile d'ordine n, venne studiato da Sauter [2] e da Scherk [3]. Entrambi dettero condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una curva siffatta, e ne costruirono una per un arco soddisfacente alle suddette condizioni. La presente Nota, la quale fa seguito ad una precedente Nota lincea dell'autore, dal titolo: *Sugli spazi osculatori dei poligoni d'ordine n*, si occupa del problema analogo per i poligoni: costruire, nello spazio proiettivo reale di dimensione n, un poligono chiuso d'ordine n, contenente un poligono aperto d'ordine n arbitrariamente assegnato. Vengono costruiti tutti i poligoni siffatti ed inoltre, quale risultato sussidiario, si ottiene la duale di una costruzione dei poligoni d'ordine n, dovuta all'autore [1].

La numerazione dei paragrafi di questa Nota continua quella della precedente Nota lincea.

4. – UNA COSTRUZIONE DEI POLIGONI π_n.

4.1. Se $n = 1$, σ_1 denoterà un poligono π_1. Se $n > 1$, siano $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$ un poligono π_{n-1} chiuso ed $\bar{L}_{n-1}$ l'iperpiano che lo contiene. Sia $B_n A_{n+1}$ un segmento qualsiasi, tale che $A_{n+1} \notin \bar{L}_{n-1}$. I segmenti $A_i B_i$, $n+1 \leq i \leq r$; $A_i A_{i+1}$, $n+1 \leq i < r$; $A_{i+1} B_i$, $n+1 \leq i < r$, si definiscono nel modo seguente. $A_{n+1} B_{n+1}$ è il segmento assieme a cui $B_n A_{n+1}$ ed il lato $B_n B_{n+1}$ di π_{n-1} formano un triangolo dispari. Supposto $A_i B_i$ già definito, sia A_{i+1} un punto interno di $A_i B_i$ e siano $A_i A_{i+1}$, $A_{i+1} B_i$ i suoi sottosegmenti, $n+1 \leq i < r$. Allora $A_{i+1} B_{i+1}$ è il segmento assieme a cui $A_{i+1} B_i$ ed il lato $B_i B_{i+1}$ di π_{n-1} formano un triangolo pari ($B_r = B_1$). Indicheremo ora con $\sigma_n(A_{n+1})$ il poligono costituito dalle porzioni $B_1 B_2 \cdots B_n$, $B_{n+1} B_{n+2} \cdots B_{r-1} B_1$ di π_{n-1} e da $B_n A_{n+1}$, $A_{n+1} B_{n+1}$. Supposto poi $\sigma_n(A_i)$, $n+1 \leq i < r$, già definito, $\sigma_n(A_{i+1})$ designerà il poligono delle porzioni $B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_i$ di $\sigma_n(A_i)$, $B_{i+1} \cdots B_{r-1} B_1$ di π_{n-1} e di $A_i A_{i+1}$, $A_{i+1} B_{i+1}$.

4.2. *Un iperpiano* L_{n-1} *interseca un poligono* $\sigma_n(A_i)$, $1 < n < i \leq r$, *definito mediante un poligono* π_{n-1}: $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$ *di uno spazio* $\bar{L}_{n-1}$, *in al più n punti, ove si supponga* $L_{n-1} \neq \bar{L}_{n-1}$.

Dimostrazione. – Dalla definizione dell'ordine di π_{n-1}, segue che L_{n-1} interseca π_{n-1} in al più $n - 1$ punti, se $L_{n-1} \neq \bar{L}_{n-1}$; infatti $L_{n-1} \cap \pi_{n-1} = L_{n-1} \cap \bar{L}_{n-1} \cap \pi_{n-1}$ ed $L_{n-1} \cap \bar{L}_{n-1}$ è un iperpiano dello spazio $\bar{L}_{n-1}$. Di-

(*) Nella seduta del 15 dicembre 1962.

mostriamo il teorema per un poligono $\sigma_n(A_{n+1})$: $B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} B_{n+1} \cdots B_{r-1}$. Se L_{n-1} interseca la porzione aperta $B_n A_{n+1} B_{n+1}$ in un sol punto, L_{n-1} interseca $\sigma_n(A_{n+1})$ in al più n punti, in quanto $B_{n+1} B_{n+2} \cdots B_{r-1} B_1 \cdots B_n$ è una porzione di π_{n-1}. Nel caso opposto, in cui L_{n-1} intersecasse la porzione aperta $B_n A_{n+1} B_{n+1}$ in due punti, L_{n-1} intersecherebbe il lato $B_n B_{n+1}$ del triangolo dispari $B_n A_{n+1} B_{n+1}$ in un punto. Quindi L_{n-1} intersecherebbe la porzione $B_{n+1} B_{n+2} \cdots B_{r-1} B_1 \cdots B_n$ in al più $n-2$ punti. Dunque, anche in questo caso, L_{n-1} interseca $\sigma_n(A_{n+1})$ in al più n punti. Il teorema è così stabilito in ogni caso per i poligoni $\sigma_n(A_{n+1})$.

Assumendolo vero per i poligoni $\sigma_n(A_{i-1})$, lo dimostreremo per i poligoni $\sigma_n(A_i)$, $n+1 < i \leq r$. Sia $\sigma_n(A_i)$: $B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_i B_i \cdots B_{r-1}$ un poligono siffatto, costruito a partire da un poligono $\sigma_n(A_{i-1})$: $B_1 B_2 \cdots \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_{i-1} B_{i-1} B_i \cdots B_{r-1}$ sostituendo la porzione $A_i B_{i-1} B_i$ di quello col lato $A_i B_i$ di $\sigma_n(A_i)$. Il teorema è chiaro nel caso che ogni punto d'intersezione di L_{n-1} e $\sigma_n(A_i)$ è anche punto d'intersezione di L_{n-1} e $\sigma_n(A_{i-1})$. Altrimenti, invero, o L_{n-1} interseca $A_i B_i$ in un punto interno, oppure $A_i, B_{i-1} \in L_{n-1}$. Nel primo caso, L_{n-1} interseca la porzione aperta $A_i B_{i-1} B_i$ in un punto perché, secondo 4.1, questa porzione ed il lato $A_i B_i$ formerebbero un triangolo pari. Nel secondo caso, L_{n-1} interseca $\sigma_n(A_{i-1})$ in B_{i-1} che non è un punto di $\sigma_n(A_i)$. In entrambi i casi, L_{n-1} interseca $\sigma_n(A_{i-1})$ e $\sigma_n(A_i)$ nello stesso numero di punti; quindi L_{n-1} interseca $\sigma_n(A_i)$ in al più n punti. Il teorema segue ora per induzione.

4.3. *Un poligono* $\sigma_n(A_r)$: $B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_r$, *definito mediante un poligono* π_{n-1}: $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$, $n > 1$, *ha ordine* n.

Dimostrazione. – Sia $\bar{L}_{n-1}$ l'iperpiano che contiene π_{n-1}. Segue dalla definizione 4.1 che $\bar{L}_{n-1} \cap \sigma_n(A_r)$ è la porzione $B_1 B_2 \cdots B_n$. Dunque $\bar{L}_{n-1}$ interseca $\sigma_n(A_r)$ negli n punti $B_1, B_2, \cdots, B_n$. Ora, a norma di 4.2, si ha che nessun iperpiano interseca $\sigma_n(A_r)$ in più di n punti. Dato che $[A_{n+1}, B_1, B_2, \cdots, B_n] = L_n$, nessun iperpiano contiene $\sigma_n(A_r)$; quindi $\sigma_n(A_r)$ è un poligono π_n ed il teorema rimane stabilito.

Ne discende che si può definire come segue l'insieme $S(A_r B_1)$ per un poligono $\sigma(A_r)$: $B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_r$. Sia $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2, \cdots, A_n = B_n$. Si ha allora da 3.2 (1) che $S(A_r B_1)$ è l'interno di un n-simplesso, i cui vertici sono: $P_1 = B_1$, $P_2 = [B_1, B_2] \cap [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-n+1}]$, $P_3 = [B_1, B_2, B_3] \cap \cap [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-n+2}], \cdots, P_n = [B_1, B_2, \cdots, B_n] \cap [A_r, A_{r-1}]$, $P_{n+1} = A_r$. Sia $\bar{L}_{n-1} = [B_1, B_2, \cdots, B_n]$. Poiché $A_i \notin \bar{L}_{n-1}$, $n+1 \leq i \leq r$, da 4.1 si ha che $B_i = [A_i, A_{i+1}] \cap L_{n-1}$, $n \leq i \leq r-1$. Ne segue, mediante la definizione di $A_1, A_2, \cdots, A_n$, che $[B_{r-1}, B_{r-2}, \cdots, B_{r-k}] \subseteq [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-k}] \cap \bar{L}_{n-1}$, $1 \leq k \leq n-1$. I due spazi testè considerati, avendo la stessa dimensione, coincidono: $[B_{r-1}, B_{r-2}, \cdots, B_{r-k}] = [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-k}] \cap \bar{L}_{n-1}$, $1 \leq k \leq n-1$. Ne segue che $P_1 = B_1$, $P_2 = [B_1, B_2] \cap \bar{L}_{n-1} \cap [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-n+1}] = = [B_1, B_2] \cap [B_{r-1}, B_{r-2}, \cdots, B_{r-n+1}]$, $P_3 = [B_1, B_2, B_3] \cap \bar{L}_{n-1} \cap [A_r, A_{r-1}, \cdots \cdots, A_{r-n+2}] = [B_1, B_2, B_3] \cap [B_{r-1}, B_{r-2}, \cdots, B_{r-n+1}], \cdots, P_n = B_{r-1}$. Ma, a norma di 3.2 (1), queste intersezioni sono i vertici dell'$(n-1)$-simplesso $\bar{S}(B_{r-1}, B_1)$. Abbiamo così stabilito che:

4.4. *Se* $P_1, P_2, \cdots, P_n$ *sono i vertici dell'*$(n-1)$*-simplesso* $\bar{S}(B_{r-1} B_1)$ *di un poligono* $\pi_{n-1}: B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$, *i vertici dell'n-simplesso* $\bar{S}(A_r B_1)$ *di un poligono* $\sigma(A_r)$: $B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_r$, *definito mediante* π_{n-1}, *sono* $P_1, P_2, \cdots, P_n$ *e* $P_{n+1} = A_r$.

Proveremo ora la seguente proposizione.

4.5. (1) *Se* $B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_r$ *è un poligono* $\sigma_n(A_r)$, $n > 1$, *definito mediante un poligono* $\pi_{n-1}: B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$, *la faccia* $P_1 P_2 \cdots P_n$ *dell'n-simplesso* $\bar{S}(A_r B_1)$, *definito da* $\sigma_n(A_r)$, *è l'*$(n-1)$*-simplesso* $\bar{S}(B_{r-1} B_1)$, *definito da* π_{n-1}.

(2) *Per ogni poligono chiuso* π_n: $A_1 A_2 \cdots A_r$, $n > 1$, *esiste un poligono* π_{n-1}: $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$ *ed esiste un poligono* $\sigma_n(A_r)$: $B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_r$ *definito mediante* π_{n-1} *e tale che* π_n *e* $\sigma_n(A_r)$ *coincidano.*

(3) *Se l'insieme* $S(A_r A_1)$, *definito da un poligono aperto* π_n: $A_1 A_2 \cdots A_r$, *contiene i punti interni di un qualsiasi poligono* $A_r A_{r+1} A_1$, *allora* $A_1 A_2 \cdots A_r A_{r+1} A_1$ *è un poligono d'ordine n.*

Dimostrazione. – Se $n = 1$, la (3) è banale. Dimostriamo il teorema assumendo (3) valida per i poligoni π_{n-1}, $n > 1$. Sia $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$ un poligono π_{n-1}, $n > 1$, e sia B_r un punto dell'insieme $S(B_{r-1} B_1)$ definito da π_{n-1}. Sia $B_{r-1} B_r B_1$ il poligono costruito mediante B_r in $\bar{S}(B_{r-1} B_1)$. Applicando la (3) al poligono π_{n-1}, si deduce che $B_1 B_2 \cdots B_{r-1} B_r$ è un poligono π'_{n-1} d'ordine $n-1$. Sia ora $B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_r$ un poligono $\sigma_n(A_r)$, definito mediante π_{n-1}. Se $S(A_r B_1)$ è definito da $\sigma_n(A_r)$, mostriamo che $[A_r, B_r] \cap S(A_r B_1)$ è l'insieme dei punti interni di un segmento $A_r B_r$ ed inoltre, se i punti interni di un poligono $A_r A_{r+1} B_1$ sono contenuti in $S(A_r B_1)$ ed $A_{r+1} \in [A_r, B_r]$, che $B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_r A_{r+1}$ è un poligono $\sigma_n(A_{r+1})$ definito mediante π'_{n-1}.

A tale scopo, sia $A_r B_{r-1}$ il segmento utilizzato nella definizione 4.1 di $\sigma_n(A_r)$. Sia $A_r B_r$ il segmento assieme a cui $A_r B_{r-1}$ ed il lato $B_{r-1} B_r$ di π'_{n-1} formano un triangolo pari se $r > n+1$, dispari se $r = n+1$. La porzione $B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_r$ di $\sigma_n(A_r)$, assieme ad $A_r B_r$ ed al lato $B_r B_1$ di π'_{n-1}, forma un poligono $\sigma'_n(A_r)$, definito mediante π'_{n-1}. Se A_{r+1} è un punto interno qualsiasi di $A_r B_r$ ed $A_r A_{r+1}$, $A_{r+1} B_r$ sono i suoi sottosegmenti, sia $A_{r+1} B_1$ il segmento assieme a cui $A_{r+1} B_r$ ed il lato $B_r B_1$ di π'_{n-1} formano un triangolo pari. Segue da 4.1 che il segmento $B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_r$ di $\sigma'_n(A_r)$, $A_r A_{r+1}$ ed $A_{r+1} B_1$ formano un poligono $\sigma'_n(A_{r+1})$: $B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_{r+1}$, definito mediante π_{n-1}: $B_1 B_2 \cdots B_{r-1} B_r$. Segue allora da 4.3 che $\sigma'_n(A_{r+1})$ ha ordine n. Poiché $\sigma_n(A_r)$:$B_1 B_2 \cdots B_n A_{n+1} \cdots A_r$ ha ordine n, segue da 3.3 che la porzione aperta $A_r A_{r+1} B_1$ di $\sigma'_n(A_{r+1})$ è contenuta in $S(A_r B_1)$. Ma A_{r+1} era un punto interno qualsiasi di $A_r B_r$, quindi ogni punto interno di $A_r B_r$ è punto di $S(A_r B_1)$. Secondo 4.4, A_r è un vertice del simplesso $\bar{S}(A_r B_1)$; pertanto $A_r \notin S(A_r B_1)$. Ancora a norma di 4.4, si ha che $B_r \in S(B_{r-1} B_1) \subseteq [P_1, P_2, \cdots, P_n]$. Poiché $[P_1, P_2, \cdots, P_n]$ è l'iperpiano che contiene la faccia $P_1 P_2 \cdots P_n$ del simplesso $\bar{S}(A_r B_1)$, si ha che $B_r \notin S(A_r B_1)$. Ne segue che i punti A_r e B_r del segmento $A_r B_r$ sono sulla frontiera di $S(A_r B_1)$. Dato che $\bar{S}(A_r B_1)$ è un simplesso, $[A_r B, r] \cap S(A_r B_1)$ è l'insieme dei punti interni del segmento $A_r B_r$. Abbiamo così dimostrato il risultato enunciato nel precedente capoverso.

A norma di 4.4, il simplesso $\bar{S}(B_{r-1} B_1)$ e la faccia $P_1 P_2 \cdots P_n$ di $\bar{S}(A_r B_1)$ hanno gli stessi vertici. Ma abbiamo visto che un punto interno B_r di $\bar{S}(B_{r-1} B_1)$ è in $[P_1, P_2, \cdots, P_n]$ ed anche sulla frontiera di $\bar{S}(A_r B_1)$, onde segue che $B_r \in P_1 P_2 \cdots P_n$. Quindi i simplessi $\bar{S}(B_{r-1} B_1)$ e $P_1 P_2 \cdots P_n$ coincidono, ed (1) è stabilito.

Possiamo ora dimostrare (2). Sia $B_1 B_2 \cdots B_n$ la porzione $A_1 A_2 \cdots A_n$ del poligono $\pi_n : A_1 A_2 \cdots A_r$, $n > 1$. Secondo 1.6, tale porzione è essa stessa un poligono, d'ordine $n-1$. Sia $\pi(B_n)$ il poligono $B_1 B_2 \cdots B_n$ chiuso col segmento $B_n B_1$, scelto, secondo 1.7, in modo che il poligono stesso abbia ordine $n-1$. Sia poi π il poligono π_n stesso nel caso $r = n+1$, ed il poligono chiuso $A_1 A_2 \cdots A_{n+1}$ d'ordine n nel caso $r > n+1$. Per dimostrare che π è un poligono $\sigma(A_{n+1})$ definito mediante $\pi(B_n)$, basta provare che il triangolo $A_n A_{n+1} A_1$, formato dalla porzione $A_n A_{n+1} A_1$ di π e dal lato $B_n B_1$ di $\pi(B_n)$, è dispari. A tale scopo consideriamo un iperpiano L_{n-1} che non contenga alcuno dei vertici $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ né alcun punto del lato $B_n B_1$. Se n è pari (dispari), L_{n-1} interseca π in un numero pari (dispari) di punti, mentre invece esso interseca $\pi(B_n)$ in un numero dispari (pari) di punti. Pertanto L_{n-1} interseca la porzione $A_n A_{n+1} A_1$ di π in esattamente un punto. Dunque il triangolo $A_n A_{n+1} A_1$ è dispari e π è un poligono $\sigma(A_{n+1})$, definito mediante $\pi(B_n)$. Resta così stabilita l'affermazione (2) nel caso particolare $r = n+1$.

Sia ora $r > n+1$; supponiamo di aver già costruito un poligono $\pi(B_{k-1})$ d'ordine $n-1$, tale che il poligono chiuso d'ordine n: $A_1 A_2 \cdots A_k$ sia un poligono $\sigma_n(A_k)$ definito mediante $\pi(B_{k-1})$, $n+1 \leq k < r$. Se $S(A_k A_1)$ è definito da $\sigma(A_k)$, a norma di 3.3, la porzione aperta $A_k A_{k+1} A_1$ del poligono chiuso $A_1 A_2 \cdots A_{k+1}$ d'ordine n è contenuto in $S(A_k A_1)$; quindi $[A_k, A_{k+1}]$ interseca la faccia di $\bar{S}(A_k A_1)$ opposta al vertice A_k in un punto interno B_k. Ma, secondo (1), questa faccia coincide col simplesso $\bar{S}(B_{k-1} B_1)$. Se $B_{k-1} B_k B_1$ è il poligono costruito mediante B_k, in virtù del primo capoverso della presente dimostrazione $A_1 A_2 \cdots A_{k+1}$ è un poligono $\sigma_n(A_{k+1})$, definito mediante il poligono d'ordine $n-1$ $\pi(B_k)$: $B_1 B_2 \cdots B_k$. Segue ora, per induzione, che esiste un poligono $\pi(B_{r-1})$: $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$ d'ordine $n-1$, tale che $A_1 A_2 \cdots A_r$ sia un poligono $\sigma_n(A_r)$ definito mediante $\pi(B_{r-1})$. La (2) è così stabilita.

Possiamo ora assumere che il poligono π_n di (3) sia la porzione $A_1 A_2 \cdots A_r$ di un poligono chiuso $\sigma_n(A_r)$: $A_1 A_2 \cdots A_r$, definito mediante un poligono π_{n-1}: $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$. Poiché $A_{r+1} \in S(A_r A_1)$, così $[A_r, A_{r+1}]$ interseca la faccia $\bar{S}(B_{r-1} B_1)$ di $\bar{S}(A_r A_1)$ in un punto interno B_r, a norma di (1). Se $B_{r-1} B_r B_1$ è il poligono definito mediante B_r in $\bar{S}(B_{r-1} B_1)$, segue, dal risultato formulato nel primo paragrafo, che $A_1 A_2 \cdots A_r A_{r+1}$ è un poligono $\sigma_n(A_{r+1})$, definito mediante il poligono $B_1 B_2 \cdots B_{r-1} B_r$ d'ordine $n-1$. Poiché, a norma di 4.3, $\sigma_n(A_{r+1})$ ha ordine n, l'affermazione (3) rimane stabilita. La dimostrazione segue quindi per induzione.

Come già accennato, il teorema (3) fornisce la duale di una costruzione data dall'autore [1]; utilizzandola, si possono costruire t u t t i i poligoni π_n.

5. – I POLIGONI APERTI π_n.

5.1. Introduciamo le seguenti notazioni: $P_1, P_2, \cdots, P_{n+1}$ siano i vertici del simplesso $\bar{S}(A_r A_1)$ definito, secondo 3.2 (1), da un poligono aperto π_n: $A_1 A_2 \cdots A_r$; $\overline{P_i P_{i+1}}$, $1 \leq i \leq n$, sia l'insieme complementare sulla retta proiettiva, congiungente P_i e P_{i+1}, a quello dei punti interni alla faccia $P_i P_{i+1}$ di $\bar{S}(A_r A_1)$. Si ha allora che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un poligono chiuso $A_1 A_2 \cdots \cdots A_r A_{r+1} \cdots A_{r+k}$, $k > 0$, *abbia ordine n, è che il poligono chiuso* $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} A_{r+1} \cdots A_{r+k}$ *abbia ordine n.*

Dimostrazione. – Se $r = n + 1$, da 3.2 (1) segue che $P_i = [A_1, A_2, \cdots, A_i] \cap \cap [A_i, A_{i+1}, \cdots, A_{n+1}] = A_i$, $1 \leq i \leq n + 1$. Inoltre, mediante 3.4, si ha che $\overline{P_i P_{i+1}} = A_i A_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$. Dunque i poligoni $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} A_{n+2} \cdots A_{r+k}$ ed $A_1 A_2 \cdots A_{n+1} A_{n+2} \cdots A_{r+k}$ coincidono, ed il teorema risulta in tal caso banale. Possiamo quindi assumere d'ora innanzi $r > n + 1$.

Nel caso $n = 1$, $S(A_r A_1)$ è, per definizione, l'insieme complementare a quello dei punti del poligono aperto π_1: $A_1 A_2 \cdots A_r$ sulla retta proiettiva, mentre $P_1 = A_1$, $P_2 = A_r$; quindi $\overline{P_1 P_2}$ è l'insieme dei punti di π_1 stesso. Ne consegue che $A_1 A_2 \cdots A_r A_{r+1} \cdots A_{r+k}$ è un poligono chiuso d'ordine 1 se, e soltante se, $\overline{P_1 P_2} A_{r+1} \cdots A_{r+k}$ è d'ordine 1. Il risultato resta così stabilito per i poligoni π_1.

Assumendo il teorema vero per i poligoni π_{n-1}, $n > 1$, lo dimostreremo per un poligono π_n. Segue da 1.7 e 4.5 (2) che, per un poligono aperto π_n: $A_1 A_2 \cdots A_r$, esiste un poligono aperto π_{n-1}: $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$ tale che π_n sia la porzione (aperta) di un poligono $\sigma_n(A_r)$: $A_1 A_2 \cdots A_r$, definita mediante il poligono chiuso d'ordine $n - 1$ $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$. Consideriamo anzitutto il simplesso $\bar{S}(A_r A_1)$: $P_1 P_2 \cdots P_{n+1}$, definito da π_n. A norma di 3.1, questo è il simplesso definito dal corrispondente poligono chiuso $\sigma_n(A_r)$. Poiché $r > n + 1$, $\sigma_n(A_r)$ viene definito secondo 4.1, mediante un poligono $\sigma_n(A_{r-1})$: $A_1 A_2 \cdots A_{r-1} B_{r-1}$, dove A_r è un punto interno al lato $A_{r-1} B_{r-1}$. Poiché il lato $A_r A_{r-1}$ di π_n è un sottosegmento del lato $A_{r-1} B_{r-1}$ di $\sigma_n(A_{r-1})$, l'altro sottosegmento $A_r B_{r-1}$ di $A_{r-1} B_{r-1}$ non contiene alcun punto interno di $A_{r-1} A_r$. In conseguenza di 4.4, si ha così: $P_{n+1} = A_r$, $P_n = B_{r-1}$. Ne discende, mediante 3.4, che $A_r B_{r-1}$ è la faccia $P_{n+1} P_n$ del simplesso $\bar{S}(A_r A_1)$. Per la 4.5 (1), il simplesso $\bar{S}(B_{r-1} B_1)$, definito da π_{n-1}, è la faccia $P_1 P_2 \cdots P_n$ di $\bar{S}(A_r A_1)$. Ne risulta che la porzione $\overline{P_1 P_2 \cdots P_n}$ di $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}}$ è quella definita da $\bar{S}(B_{r-1} B_1)$.

Sia π'_n: $A_1 A_2 \cdots A_r \cdots A_{r+k}$ un poligono chiuso, $k > 0$. Secondo 3.2 (1), si ha: $P_{n+1} = A_r$, $P_1 = A_1$. Si possono dunque anche scrivere i lati $A_r A_{r+1}$, $A_{r+k} A_1$ di π'_n rispettivamente come $P_{n+1} A_{r+1}$, $A_{r+k} P_1$, e si può quindi definire un poligono chiuso $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} A_{r+1} \cdots A_{r+k}$. Ci proponiamo di stabilire che quest'ultimo ha ordine n.

A norma di 4.5 (2), esiste un poligono π'_{n-1}: $B_1 B_2 \cdots B_{r-1} \cdots B_{r+k-1}$, mediante il quale viene definito un poligono $\sigma'_n(A_{r+k})$ che coincide con π'_n. Siano $\sigma'_n(A_i)$: $A_1 A_2 \cdots A_i B_i \cdots B_{r+k-1}$, $n + 1 \leq i \leq r + k$, i poligoni di 4.1, mediante cui viene definito $\sigma_n(A_{r+k})$. Dato che $r > n+1$, viene così definito il poligono $\sigma'_n(A_{r-1})$. Inoltre, A_r è un punto interno al lato $A_{r-1}B_{r-1}$ di questo poligono. Segue, dalla costruzione di $\sigma'_n(A_{r-1})$ e da 1.7, che si possono chiudere le porzioni $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$ di π'_{n-1} e $A_1 A_2 \cdots A_{r-1} A_r$ di $\sigma'_n(A_{r-1})$ in modo che il poligono chiuso $A_1 A_2 \cdots A_r$ sia un poligono $\sigma_n(A_r)$, definito mediante il poligono chiuso d'ordine $n-1$ $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$. Applicando il teorema alla porzione $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$ di π'_{n-1}, si deduce che il poligono $\overline{P_1 P_2 \cdots P_n} B_r \cdots B_{r+k-1}$ ha ordine $n-1$. Denoteremo quest'ultimo poligono col simbolo $\overline{\pi}_{n-1}$.

Per dimostrare che $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} A_{r+1} \cdots A_{r+k}$ ha ordine n, basta provare, a norma di 4.3, ch'esso è un poligono $\overline{\sigma}_n(A_{r+k})$, definito mediante $\overline{\pi}_{n-1}$. Per quanto visto sopra, la porzione $\overline{P_1 P_2 \cdots P_n}$ di $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}}$ coincide con quella corrispondentemente definita da $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$ e quindi colla $\overline{P_1 P_2 \cdots P_n}$ di $\overline{\pi}_{n-1}$. Dalla costruzione del poligono $\sigma'_n(A_r)$: $A_1 A_2 \cdots A_r B_r \cdots B_{r+k-1}$ si sa che il lato $A_r B_r$ di questo, il segmento $A_r B_{r-1}$ del lato $A_{r-1} B_{r-1}$ di $\sigma'_n(A_{r-1})$ ed il lato $B_{r-1} B_r$ di π'_{n-1} definiscono un triangolo pari. Ma, per ciò che precede, $A_r B_{r-1}$ è la faccia $P_{n+1} P_n$ di $\overline{S}(A_r A_1)$; mentre, per la definizione di $\overline{\pi}_{n-1}$, $B_{r-1} B_r$ è il lato $P_n B_r$ di $\overline{\pi}_{n-1}$. Dunque, $A_r B_r$, $P_{n+1} P_n$ e $P_n B_r$ formano un triangolo pari; ne segue che $A_r B_r$, $\overline{P_{n+1} P_n}$ e $P_n B_r$ formano un triangolo dispari; inoltre il poligono $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} B_r \cdots B_{r+k-1}$ costituito dalla porzione $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}}$ e dalla $A_r B_r \cdots B_{r+k-1} B_1$ di $\sigma'_n(A_r)$ formano un poligono $\overline{\sigma}_n(P_{n+1})$, definito mediante $\overline{\pi}_{n-1}$. Poiché A_{r+1} è un punto interno al lato $A_r B_r$ di $\overline{\sigma}_n(P_{n+1})$, si può definire il poligono $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}}$ $A_{r+1} B_{r+1} \cdots B_{r+k-1}$ costituito dalla porzione $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} A_{r+1}$ di $\overline{\sigma}_n(P_{n+1})$ e dalla $A_{r+1} B_{r+1} \cdots B_{r+k-1} B_1$ di $\sigma'_n(A_{r+1})$. È chiaro, tenuto conto della definizione di $\sigma'_n(A_{r+1})$, che $A_{r+1} B_{r+1}$ il segmento $A_{r+1} B_r$ del lato $A_r B_r$ di $\sigma_n(A_r)$ ed il lato $B_r B_{r+1}$ di π'_{n-1} definiscono un triangolo pari. Dato che $B_r B_{r+1}$ è anche un lato di $\overline{\pi}_{n-1}$, si ha che $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} A_{r+1} B_{r+1} \cdots B_{r+k-1}$ è un poligono $\overline{\sigma}_n(A_{r+1})$, definito mediante $\overline{\pi}_{n-1}$. Se è già definito un poligono $\overline{\sigma}_n(A_i)$: $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} A_{r+1} \cdots A_i B_i \cdots B_{r+k-1}$, $r+1 \leq i < r+k$, in modo che la porzione $A_i B_i \cdots B_{r+k-1} B_1$ sia anche porzione di $\sigma'_n(A_i)$: $A_1 A_2 \cdots \cdots A_i B_i \cdots B_{i+k-1}$, si può definire un poligono chiuso $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} A_{r+1} \cdots \cdots A_i A_{i+1} B_{i+1} \cdots B_{r+k-1}$ costituito dalla porzione $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} A_{r+1} \cdots A_{i+1}$ di $\overline{\sigma}_n(A_i)$ e dalla $A_{i+1} B_{i+1} \cdots B_{r+k-1} B_1$ di $\sigma'_n(A_{i+1})$. Dalla definizione di $\sigma'_n(A_{i+1})$, segue che $A_{i+1} B_{i+1}$, il segmento $A_{i+1} B_i$ del lato $A_i B_i$ di $\sigma'_n(A_i)$ ed il lato $B_i B_{i+1}$ di π'_{n-1} definiscono un triangolo pari. Ma $B_i B_{i+1}$ è anche un lato di $\overline{\pi}_{n-1}$, onde $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} A_{r+1} \cdots A_{i+1} B_{i+1} \cdots B_{r+k-1}$ è un poligono definito mediante $\overline{\pi}_{n-1}$. Finalmente, per induzione, si ha che $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}}$ $A_{r+1} \cdots A_{r+k}$ è un poligono $\overline{\sigma}_n(A_{r+k})$, definito mediante $\overline{\pi}_{n-1}$ e quindi un poligono d'ordine n.

Per dimostrare l'inverso, sia $\overline{\pi}_n$: $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} A_{r+1} \cdots A_{r+k}$ un poligono chiuso, $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}}$ essendo definito mediante il simplesso $\overline{S}(A_r A_1)$, determinato da π_n: $A_1 A_2 \cdots A_r$. Occorre mostrare che il poligono chiuso $A_1 A_2 \cdots A_r A_{r+1} \cdots A_{r+k}$ ha ordine n. Poiché $P_{n+1} = A_r$, $P_1 = A_1$, i lati $A_r A_{r+1}$, $A_{r+k} A_1$ vengono rispettivamente definiti come i lati $P_{n+1} A_{r+1}$, $A_{r+k} P_1$ di $\overline{\pi}_n$. Per il teorema 4.5 (2), π_n e $\overline{\pi}_n$ possono scriversi come poligoni $\sigma_n(A_r)$

e $\bar{\sigma}_n(A_{r+k})$, definiti rispettivamente mediante π_{n-1}: $B_1 B_2 \cdots B_{r-1}$ e $\bar{\pi}_{n-1}$: $\overline{P_1 P_2 \cdots P_n} B_r \cdots B_{r+k-1}$. La porzione $\overline{P_1 P_2 \cdots P_n}$ di $\bar{\pi}_n$ viene definita come parte della porzione $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}}$ di $\bar{\pi}_n$. Poiché quest'ultima coincide con la corrispondente porzione definita mediante il simplesso $\bar{S}(B_{r-1} B_1)$, si può applicare il teorema a π_{n-1} e $\overline{P_1 P_2 \cdots P_n} B_r \cdots B_{r+k-1}$; ne discende che $B_1 B_2 \cdots B_{r-1} B_r \cdots B_{r+k-1}$ è un poligono d'ordine $n-1$. Denotiamo tale poligono col simbolo π'_{n-1}.

Per terminare la dimostrazione, basta mostrare che $A_1 A_2 \cdots A_r A_{r+1} \cdots A_{r+k}$ è un poligono $\sigma'_n(A_{r+k})$, definito mediante π'_{n-1}. Poiché $r > n+1$, $\sigma_n(A_r)$ è definito, secondo 4.1, mediante un poligono $\sigma_n(A_{r-1})$: $A_1 A_2 \cdots A_{r-1} B_{r-1}$. Segue, dalla costruzione di questo poligono, che il poligono $A_1 A_2 \cdots A_{r-1}$ $B_{r-1} B_r \cdots B_{r+k-1}$ costituito dalla porzione $A_1 A_2 \cdots A_{r-1} B_{r-1}$ di $\sigma_n(A_{r-1})$ e dalla $B_{r-1} B_r \cdots B_{r+k-1} B_1$ di π'_{n-1} è un poligono $\sigma'_n(A_{r-1})$, definito mediante π'_{n-1}. Per la 4.1, $\bar{\sigma}_n(A_{r+k})$ viene definito mediante poligoni $\bar{\sigma}_n(A_i)$: $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} A_{r+1} \cdots A_i B_i \cdots B_{r+k-1}$, $r \leq i < r+k$. Poiché A_r è un punto interno al lato $A_{r-1} B_{r-1}$ di $\sigma_n(A_{r-1})$, si può costruire il poligono $A_1 A_2 \cdots A_{r-1} A_r B_r \cdots B_{r+k}$ costituito dalle porzioni $A_1 A_2 \cdots A_{r-1} A_r$ di $\sigma'_n(A_{r-1})$ e dalla $A_r B_r \cdots B_{r+k-1}$ di $\bar{\sigma}_n(A_r)$. Secondo la definizione di $\bar{\sigma}_n(A_r)$, i lati $\overline{P_n P_{n+1}}$ e $A_r B_r$, assieme al lato $P_n B_r = B_{r-1} B_r$ di $\bar{\pi}_{n-1}$, determinano un triangolo dispari; quindi $P_n P_{n+1}$, $A_r B_r$ e $B_{r-1} B_r$ definiscono un triangolo pari. Ma $P_n P_{n+1}$ è il sottosegmento $B_{r-1} A_r$ di $B_{r-1} A_{r-1}$; ne risulta che $A_1 A_2 \cdots A_{r-1} A_r B_r \cdots B_{r+k}$ è un poligono $\sigma'_n(A_r)$, definito mediante π'_{n-1}. Se si è già costruito un poligono $\sigma'_n(A_i)$: $A_1 A_2 \cdots A_i B_i \cdots B_{r+k-1}$, di cui il lato $A_i B_i$ sia un lato del poligono $\bar{\sigma}_n(A_i)$, $r \leq i < r+k$, si può definire un poligono $A_1 A_2 \cdots A_i A_{i+1} \cdots B_{r+k-1}$ mediante le porzioni $A_1 A_2 \cdots A_i A_{i+1}$ di $\sigma'_n(A_i)$ ed $A_{i+1} B_{i+1} \cdots B_{r+k-1} B_1$ di $\bar{\sigma}_n(A_{i+1})$. Dalla costruzione di $\bar{\sigma}_n(A_{i+1})$, è noto che il triangolo avente per lati il segmento $A_{i+1} B_{i+1}$, il lato $B_i B_{i+1}$, di $\bar{\pi}_{n-1}$ ed il segmento $A_{i+1} B_i$ del lato $A_i B_i$ di $\bar{\sigma}_n(A_i)$ è pari. Poiché $B_i B_{i+1}$ è anche un lato di π'_{n-1}, si ha che $A_1 A_2 \cdots A_i A_{i+1} B_{i+1} \cdots B_{r+k-1}$ è un poligono $\sigma'_n(A_{i+1})$ definito mediante π'_{n-1}. Si vede infine che $A_1 A_2 \cdots A_{r+k}$ è un poligono $\sigma'_n(A_{r+k})$ definito mediante π'_{n-1}, sicché $A_1 A_2 \cdots A_{r+k}$ ha ordine n. La dimostrazione segue ora per induzione.

5.2. Sia $A_1 A_2 \cdots A_r$ un dato poligono aperto π_n. Mediante 3.2 (2) e 3.4, si può induttivamente costruire il simplesso $\bar{S}(A_r A_1)$: $P_1 P_2 \cdots P_{n+1}$. Dato che sia già costruito un poligono $\bar{\pi}_{n-1}$: $\overline{P_1 P_2 \cdots P_n} B_r B_{r+1} \cdots B_{r+k-1}$, si può poi costruire un poligono $\bar{\pi}_n$: $\overline{P_1 P_2 \cdots P_{n+1}} A_{r+1} \cdots A_{r+k}$ mediante 4.1. In base a 4.5 (2) si ha che tutti i poligoni aperti d'ordine n che contengono il dato vengono costruiti in quel modo. Segue poi da 5.1 che anche tutti i poligoni chiusi d'ordine n $A_1 A_2 \cdots A_r A_{r+1} \cdots A_{r+k}$ possono venire così costruiti.

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. DERRY, *On polygons in real projective n-space*, «Math. Scand.», *6*, 50–66 (1958).
[2] I. SAUTER, *Zur Theorie der Bogen n-ter (Realitaets) Ordnung im Projektiven* R_n, «I. Mitt. Math. Z.», *41*, 507–536 (1936).
[3] P. SCHERK, *Über differenzierbare Kurven und Bögen*, «Časopis pro Pěstování, mat. a fys.», *66*, 172–191 (1937).