Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Miron Nicolescu

Sur un théorème de moyenne de M. Mauro Picone

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.1, p. 40–44.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_1_40_0¿

Analisi matematica. — *Sur un théorème de moyenne de M. Mauro Picone.* Nota di MIRON NICOLESCU, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1\. En 1936, le Prof. Mauro Picone a donné [1] un important théorème de moyenne, caractérisant les fonctions polyharmoniques.

Dans un travail récent [2], j'ai montré comment, en suivant la marche des idées de M. Mauro Picone, on peut caractériser les fonctions sous–harmoniques d'ordre p, par les propriétés de leurs moyennes, considérées comme fonctions du rayon de la sphère.

Le but de ce travail est de montrer comment le théorème de moyenne de M. Mauro Picone peut être transposé aux fonctions que j'ai introduites et que j'ai étudiées, dès 1954, sous le nom de fonctions polycaloriques [3], nom qui paraît avoir été déjà adopté par les chercheurs.

Dès lors, toute la théorie que j'ai faite dans [2] peut être facilement transposée aux fonctions que j'ai étudiées dans [3] sous le nom de fonctions sous–caloriques d'ordre p.

2\. Dans le plan des variables (x, t), nous considérerons la bande $B = R \times [0, \delta]$. Pour toute fonction continue $u : B \rightarrow R$, telle que

$$|u(x, t)| < Me^{Kx^2} \quad , \quad K < \frac{1}{4\delta}, \tag{1}$$

nous poserons

$$\mu_0(u; h)(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4h}} \cdot u(\xi, t-h)\, d\xi$$

et appellerons $\mu_0(u; h)(x, t)$ la *moyenne* (pondérée) de u sur la droite $t-h$, par rapport au point (x, t) de la bande B.

Dans le Mémoire [3] de 1954 j'ai obtenu les résultats suivants:

Posons

$$\Delta^1 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad \Delta^{s+1} u = \Delta(\Delta^s u), \quad s = 1, 2, \cdots,$$

$$\mu_s(u; h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h h' \mu_{s-1}(u; h')\, dh', \qquad s = 1, 2, \cdots$$

Alors, si $|D^n u(x, t)| < Me^{Kx^2}$, $(n = 0, 1, 2, \cdots, 2p)$, on a

$$\mu_s(u; h) = u + \frac{2^s}{3^s} \frac{h}{1!} \Delta u + \cdots + \frac{2^s}{(p+1)^s} \cdot \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} \Delta^{p-1} u + \\ + \frac{2^s}{(p+2)^s} \cdot \frac{h^p}{p!} (\Delta^p u + \varepsilon_p^s(h)), \tag{2}$$

les valeurs des diverses fonctions étant prises au point (x, t).

(*) Nella seduta del 12 gennaio 1963.

De plus,

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_p^s(h) = 0, \qquad (s = 0, 1, 2, \cdots).$$

On en déduit, si $\Delta^p u(x, t) \neq 0$,

$$u(x,t) - \frac{V\left(\mu, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{2}{p+1}\right)}{V\left(1, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{2}{p+1}\right)} = \tag{3}$$

$$= (-1)^p \cdot h^p \frac{V\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \cdots, \frac{2}{p+2}\right)}{V\left(1, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{2}{p+1}\right)} (\Delta^p u(x,t) + \varepsilon_p),$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_p = 0$. Les expressions $V\left(1, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{2}{p+1}\right)$, $V\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \cdots, \frac{2}{p+2}\right)$ sont des déterminants de Vandermonde des nombres entre paranthèses. De plus

$$V\left(\mu, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{2}{p+1}\right) = \begin{vmatrix} \mu_0 & 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \frac{2}{3} & \cdots & \frac{2}{p+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mu_{p-1} & \frac{2^{p-1}}{3^{p-1}} & \cdots & \frac{2^{p-1}}{(p+1)^{p-1}} \end{vmatrix}.$$

Si $\Delta^p u(x, t) = 0$, le premier membre de (3) est nul [3]. Réciproquement, si le premier membre de (3) est nul, on a $\Delta^p u = 0$. Ainsi donc, les fonctions polycaloriques d'ordre p, vérifiant les conditions indiquées à l'infini (nous supposerons toujours que ces conditions sont vérifiées, même si nous ne le dirons plus) sont *caractérisées* par la relation intégrale

$$u(x,t) = \frac{V\left(\mu, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{2}{p+1}\right)}{V\left(1, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{2}{p+1}\right)}. \tag{4}$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme

$$u(x,t) = C_0 \mu_0(u;h)(x,t) + C_1 \mu_1(u;h)(x,t) + \cdots \tag{4'}$$
$$\cdots + C_{p-1} \mu_{p-1}(u;h)(x,t),$$

les valeurs des coefficients $C_0, C_1, \cdots, C_{p-1}$ résultant de (3). Retenons seulement que

$$C_0 + C_1 + \cdots + C_{p-1} = 1. \tag{5}$$

La relation (4') est d'ailleurs parfaitement équivalente à la suivante

$$u(x,t) = C_0 \mu_s(u;h)(x,t) + C_1 \mu_{s+1}(u;h)(x,t) + \cdots \tag{4''}$$
$$\cdots + C_{p-1} \mu_{s+p-1}(u;h)(x,t).$$

On remarquera la parfaite analogie entre les formules (4′), (4″) et la formule intégrale de moyenne par laquelle nous avons jadis caractérisé [4] les fonctions polyharmoniques.

3. Posons–nous le problème inverse: supposons que la fonction u vérifie une relation de la forme

$$u(x,t) = D_0\,\mu_0(u;h)(x,t) + D_1\,\mu_1(u;h)(x,t) + \cdots \\ \cdots + D_{p-1}\,\mu_{p-1}(u;h)(x,t). \tag{5}$$

Que peut–on affirmer sur la fonction u?

Il est visible, tout d'abord, que les coefficients D_k doivent vérifier la relation

$$D_0 + D_1 + \cdots + D_{p-1} = 1. \tag{6}$$

Ensuite, on peut montrer, par des calculs assez laborieux mais élémentaires [1] que si u vérifie une relation de la forme (5), alors u est indéfiniment différentiable. Dans ces conditions, il suffit d'écrire des développements de la forme (2) pour chaque moyenne $\mu_s(u;h)$. La relation (5) devient ainsi, si l'on tient compte de (6),

$$0 = \Delta u \sum_{s=0}^{p-1} \frac{2^s}{3^s} D_s + \frac{1}{2!} h\Delta^2 u \sum_{s=0}^{p-1} \frac{2^s}{4^s} D_s + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(p-1)!} h^{p-2} \Delta^{p-1} u \sum_{s=0}^{p-1} \frac{2^s}{(p-1)^s} D_s + \frac{1}{p!} h^{p-1} \sum_{s=0}^{p-1} \frac{2^s}{(p+2)^s} (\Delta^p u + \varepsilon_p^s).$$

Si les coefficients de $\Delta u, \Delta^2 u, \cdots, \Delta^{p-1} u$ ne sont pas tous nuls, on en déduit que u est une fonction polycalorique d'ordre $< p$. Supposons donc ces coefficients nuls. Alors la relation précédente se réduit à

$$0 = \Delta^p u \cdot \sum_{s=0}^{p-1} \frac{2^s}{(p+2)^s} D_s.$$

Si l'on avait

$$\sum_{s=0}^{p-1} \frac{2^s}{(p+2)^s} D_s = 0,$$

on en déduirait que les D_s vérifieraient un système linéaire et homogène à déterminant (de Vandermonde) non nul, ce qui est absurde, en vertu de (6). Ainsi donc $\Delta^p u = 0$. Mais alors u vérifie la relation (4′), donc $D_s = C_s$, $(s = 0, 1, \cdots, p-1)$ et ceci démontre *l'unicité de la représentation intégrale* (4′).

4. Passons maintenant au théorème de M. Mauro Picone. Ce théorème caractérise les fonctions polyharmoniques d'ordre p à l'aide d'une seule valeur moyenne, par exemple, μ_0, prise sur p sphères concentriques. En suivant l'idée de M. Picone, nous allons tâcher de caractériser les fonctions polycalori-

ques d'ordre p à l'aide de la seule valeur moyenne μ_0, prise sur *droites* de la bande B.

Soit donc u une fonction polycalorique d'ordre p dans B. Pour tout point (x, t) et pour toute suite

$$0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_p < t, \tag{7}$$

on aura les développements

$$\mu_0(u; h_i)(x, t) = u(x, t) + \frac{h_i}{1!}\Delta u + \frac{h_i^2}{2!}\Delta^2 u + \cdots + \frac{h_i^{p-1}}{(p-1)!}\Delta^{p-1} u$$

$$(i = 1, 2, \cdots, p).$$

En éliminant les $p-1$ fonctions

$$\Delta u, \Delta^2 u, \cdots, \Delta^{p-1} u,$$

on obtient la formule

$$\begin{vmatrix} 1 & h_1 & \cdots & h_1^{p-1} \\ 1 & h_2 & \cdots & h_2^{p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & h_p & \cdots & h_p^{p-1} \end{vmatrix} u(x, t) = \begin{vmatrix} \mu_0(u; h_1)(x, t) & h_1 & \cdots & h_1^{p-1} \\ \mu_0(u; h_2)(x, t) & h_2 & \cdots & h_2^{p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_0(u; h_p)(x, t) & h_p & \cdots & h_p^{p-1} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

toute analogue à la formule de M. Mauro Picone.

On peut montrer que cette relation *Caractérise* les fonctions polycaloriques d'ordre p.

Remarquons seulement, ce qui nous sera utile pour les applications, que on peut obtenir une relation analogue à la relation (8), mais où cette fois-ci la fonction u ne figure plus. Il suffit d'ajouter à la suite (7) le nombre $h_{p+1} \in (h_p, t)$. On obtiendra ainsi la relation

$$\begin{vmatrix} \mu_0(u; h_1)(x, t) & h_1 & \cdots & h_1^{p-1} \\ \mu_0(u; h_2)(x, t) & h_2 & \cdots & h_2^{p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_0(u; h_{p+1})(x, t) & h_{p+1} & \cdots & h_{p+1}^{p-1} \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

5. Nous allons montrer que : *si pour une fonction u continue, la relation (9) a lieu pour toute suite $h_1 < h_2 < \cdots < h_{p+1}$, alors u est polycalorique d'ordre p.*

En effet, en développant (9) suivant la première ligne et en posant, pour la simplicité, $h_1 = h$, on obtient

$$\mu_0(u; h)(x, t) = v(x, t) + hv_1(x, t) + \cdots + h^{p-1} v_{p-1}(x, t). \tag{10}$$

Il est évident que $v_r, v_1, \cdots, v_{p-1}$ ne dépendent pas de h. En particulier,

$$\begin{vmatrix} 1 & h_2 & \cdots & h_2^{p-1} \\ 1 & h_3 & \cdots & h_3^{p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & h_{p+1} & & h_{p+1}^{p-1} \end{vmatrix} v(x, t) = \begin{vmatrix} \mu_0(u; h_2)(x, t) & h_2 & \cdots & h_2^{p-1} \\ \mu_0(u; h_3)(x, t) & h_3 & \cdots & h_3^{p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_0(u; h_{p+1})(x, t) & h_{p+1} & \cdots & h_{p+1}^{p-1} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Dans ces conditions, dans (10) on peut faire $h \to 0$.

Il vient $v(x, t) = u(x, t)$.

Ainsi, donc, u vérifie la relation (8).

Pour montrer que u est polycalorique d'ordre p, on déduira, d'abord, de (10) les relations

$$\mu_s(u; h)(x, t) = u(x, t) + \left(\frac{2}{3}\right)^s hv_1(x, t) + \cdots + \left(\frac{2}{p+1}\right)^s h^{p-1} v_{p-1}(x, t)$$

$$(s = 0, 1, 2, \cdots, p-1).$$

En éliminant les termes

$$hv_1, h^2 v_2, \cdots, h^{p-1} v_{p-1}$$

entre ces relations, on obtient la relation (4), donc u est polycalorique d'ordre p.

Nous donnerons, dans une autre Note, des applications de la formule (9).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] MAURO PICONE, *Sulla convergenza delle succesioni di funzioni iperarmoniche* (da una lettera al prof. Miron Nicolescu), « Bull. Math. de la Soc. Roumaine des Sciences », t. 38, pp. 105–112 (1936).

[2] MIRON NICOLESCU, *O nekotoryh svoistvah subgarmoniceskih funktü vyscih poriadkov* (*Su qualche proprietà delle funzioni subarmoniche d'ordine superiore*), « Soobscenia Akademii Nauk Gruzinskoi S. S. R. », t. XXIX, pp. 393–400 (1962).

[3] MIRON NICOLESCU, *Ecuaţia iterată a căldurii*, « Studii si Cercetări Matematice », t. V, pp. 243–332 (1954).

[4] MIRON NICOLESCU, *Sur les fonctions de n variables, harmoniques d'ordre p*, « Bull. Soc. Math. France », t. 60 pp. 129–151 (1932).