ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GAETANO FICHERA

Sul problema elastostatico di Signorini con ambigue condizioni al contorno

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.2, p. 138–142.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_2_138_0¿

Matematica. — *Sul problema elastostatico di Signorini con ambigue condizioni al contorno* [(*)]. Nota di GAETANO FICHERA, presentata [(**)] dal Socio A. SIGNORINI.

Nel 1959, in una serie di conferenze tenute all'Istituto Nazionale di Alta Matematica, Antonio Signorini, riprendendo alcune Sue precedenti ricerche, ha considerato una nuova classe di problemi elastostatici tridimensionali che, tradotti da Lui analiticamente, conducono a studiare un tipo nuovo di problemi al contorno per i sistemi di equazioni alle derivate parziali, costituenti le cosidette *equazioni indefinite* dell'equilibrio elastico [(1)]. La novità consiste in questo: a differenza dei classici problemi, dove le condizioni al contorno sono espresse dall'assegnare per le funzioni incognite *ben determinate equazioni al contorno*, nel problema di Signorini, su parte, o, eventualmente, su tutto il contorno, le funzioni incognite debbono verificare all'una o all'altra di due certe condizioni *espresse non da equazioni, ma da disequazioni*. Né si conosce « a priori » se in un fissato punto del contorno è verificata l'una o l'altra di tali condizioni. Da ciò il nome proposto dal Signorini di *ambigue condizioni al contorno*. Esempio tipico è quello di un corpo elastico appoggiato su un suolo piano rigido e privo di attrito. Non escludendo che nella configurazione di equilibrio una parte della potenziale superficie d'appoggio Σ_1 possa staccarsi dal piano, nei punti di questa sarà positiva la componente normale u_ν dello spostamento e nulla la reazione normale t_ν del vincolo qualora vi sia distacco effettivo dal suolo, *oppure* sarà $u_\nu = 0$ e $t_\nu \geq 0$ se, invece, in quel punto il corpo rimane appoggiato al suolo.

Enuncerò qui il problema di Signorini, riferendolo agli schemi della ordinaria teoria matematica dell'elasticità e farò conoscere alcuni risultati di una mia ricerca, che verrà in seguito pubblicata *in extenso*, nella quale viene studiato il problema analitico proposto da Signorini. La questione a me pare abbia notevole interesse anche da un punto di vista strettamente analitico. Se, infatti, si pone mente al fatto che, l'esprimere le condizioni di equilibrio del sistema elastico tramite il principio dei lavori virtuali, equivale, nel caso di vincoli bilaterali, a servirsi della *impostazione debole* del corrispondente problema al contorno, si riconosce che nel caso di vincoli unilaterali, quali sono quelli del problema di Signorini, non si hanno più sistemi di infinite equazioni integrali per definire le soluzioni deboli, ma, invece, *sistemi di disequazioni integrali*. Inoltre le « funzioni di prova » (che, in ultima analisi, corrispon-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 21 del C.N.R.

(**) Nella seduta del 9 febbraio 1963.

(1) Cfr. A. SIGNORINI, *Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata*, « Rend. di Matem. » (1–2) vol. 18, pp. 95–139 (1959); *Sopra alcune questioni di Elastostatica*, « Atti della Soc. Ital. per il Progresso delle Scienze, XXI Riunione », vol. II, pp. 1–8 (1933).

dono agli spostamenti virtuali compatibili coi vincoli) non possono più scegliersi in uno spazio vettoriale, ma costituiscono una varietà non lineare (2).

Sia A un campo limitato dello spazio cartesiano X^3. A rappresenta il corpo elastico nella sua configurazione naturale. Tale corpo elastico sarà da noi denotato con la stessa lettera A. Supporremo che A sia un campo *propriamente regolare* secondo una definizione da me data diversi anni addietro e che include tutti quei campi, anche dotati di singolarità alla frontiera, che di ordinario si incrontrano nelle applicazioni (3).

Sia Σ la frontiera di A e sia questa decomposta in due parti Σ_1 e Σ_2 ciascuna composta di porzioni di superficie regolare aventi al più punti del loro bordo in comune. Non escludiamo il caso che, riuscendo Σ_2 vuota, sia $\Sigma_1 \equiv \Sigma$. Supporremo che A sia assoggettato a date forze di massa, rappresentate, per ogni elemento di volume dx, da fdx, e su Σ_2 ad assegnate forze superficiali $\varphi d\sigma$. Inoltre il corpo A sia appoggiato lungo la parte Σ_1 della sua frontiera, supponendo la superficie di appoggio rigida e priva di attrito.

Il problema elastostatico equivale analiticamente ad integrare il sistema alle derivate parziali

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = f_i \quad (1)$$

(4)

con le condizioni al contorno su Σ_2

$$\sigma_{ik} \nu_k = \varphi_i \quad (2)$$

e per ogni punto regolare di Σ_1 le *ambigue condizioni*

$$\left\{\begin{array}{l} u_k \nu_k > 0 \\ \sigma_{ik} \nu_i \nu_k = 0 \\ \sigma_{ik} \tau_i \nu_k = 0 \end{array}\right. \quad \textit{oppure} \quad \left\{\begin{array}{l} u_k \nu_k = 0 \\ \sigma_{ik} \nu_i \nu_k \geq 0 \\ \sigma_{ik} \tau_i \nu_k = 0 . \end{array}\right. \quad (3)$$

Con σ_{ik} si è denotato un tensore simmetrico, che sarà chiamato, in accordo alla teoria classica della meccanica dei mezzi continui, *tensore degli sforzi*, con ν il versore normale interno ad A in ogni punto regolare di Σ, con u il vettore spostamento e con τ un qualsivoglia vettore tangente a Σ in un suo punto regolare.

(2) Siffatto tipo di problema non lineare, di natura del tutto nuova, sembra giustificare appieno le seguenti affermazioni del Signorini: « Estremamente difficili, inevitabilmente complesse, sono le questioni di esistenza e unicità, di effettiva integrazione, che così vengono a prospettarsi. Si resta anzi di fronte a problemi analitici di tipo tutt'altro che banale ... Certo il non volere escludere un'area di distacco, a priori incognita, – se insieme si rinunzia a più o meno discutibili procedimenti per una sua preventiva determinazione – complica terribilmente le cose; sia per quanto può riguardare questioni di esistenza e unicità, sia per l'integrazione effettiva » loc. cit. (1) pp. 127 e 129.

(3) Cfr. G. FICHERA, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari*, Atti del Convegno Internazionale sulle equazioni alle derivate parziali, Trieste, agosto 1954, pp. 174–227, Edit. Cremonese, Roma.

(4) Adopero la convenzione sommatoria secondo cui un indice ripetuto due volte sottintende una sommazione. Inoltre, se $f, \varphi, \cdots$ sono vettori, con $f_i, \varphi_i, \cdots$ $(i = 1, 2, 3)$ ne denoto le componenti cartesiane ortogonali.

Evidentemente le (1), (2), (3) vanno completate dalle relazioni che legano le componenti di deformazioni ε_{ik} a quelle σ_{ik} del tensore degli sforzi e che caratterizzano il *tipo di elasticità* che si considera per il corpo A.

Ciò equivale ad assegnare il *potenziale elastico* W (ε), cioè una funzione delle sei componenti di deformazione, ed assumere

$$\sigma_{ik} = -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}}. \tag{4}$$

Pertanto, tenendo conto che

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

la (1) fornisce un sistema alle derivate parziali nelle componenti dello spostamento.

In questa Nota mi limiterò ad esporre i risultati conseguiti nel caso della *elasticità lineare*, senza tuttavia restringermi a quello dei corpi isotropi e omogenei. Viene assunta pertanto come W una forma quadratica del tipo seguente: $W(\varepsilon) = a_{ik,jh}(x)\, \varepsilon_{ik}\, \varepsilon_{jh}$, essendo le $a_{ik,jh}(x)$ funzioni del punto x definite nella chiusura $\bar{A}$ di A ed ivi sufficientemente regolari (per semplicità le supporrò di classe C^∞) ed essendo la forma W (ε) definita positiva nelle ε_{ik} per ogni $x \in \bar{A}$.

Signorini, nella sua Memoria, dimostra un *teorema della minima energia potenziale*. Precisamente, egli fa vedere che se esiste il minimo dell'integrale dell'energia

$$E[u] = \frac{1}{2}\int_A W(\varepsilon)\, dx - \int_A u_i f_i\, dx - \int_{\Sigma_2} u_i \varphi_i\, d\sigma$$

nella classe degli spostamenti compatibili con i vincoli e di classe $C^1(\bar{A})$, il vettore minimante è la soluzione (unica a meno di eventuali spostamenti rigidi) del sistema (1), (2), (3), (4).

Viceversa, se tale sistema ammette soluzione in $C^1(\bar{A})$, questa fornisce il minimo di $E[u]$ nella classe anzidetta. La compatibilità col vincolo d'appoggio intendendosi, nel caso da noi considerato, espressa dalla condizione

$$u_i \nu_i \geq 0 \qquad \text{su} \quad \Sigma_1. \tag{5}$$

In generale però il funzionale $E[u]$ non ammette minimo nella classe anzidetta. Occorre invece introdurre una classe più ampia di vettori u, precisamente quelli dotati di derivate prime (nel senso di Friedrichs e Sobolev) appartenenti ad $\mathfrak{L}^2(A)$ e tali che la *traccia* [5] di u verifichi la (5). Denoteremo con U tale classe. Nell'ipotesi che riesca $f_i \in \mathfrak{L}^2(A)$ e $\varphi_i \in \mathfrak{L}^2(\Sigma_2)$ ho dimostrato

(5) Nel senso che chi scrive ha introdotto per primo. Cfr. G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, « Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa », ser. III, vol. IV (1950), teor. XXXII e loc. cit. (3) p. 208.

che esiste il minimo nella classe U del funzionale $E[u]$ se e solo se per ogni spostamento rigido $r(x)$ appartenente ad U riesce:

$$\int_A r_i f_i \, dx + \int_{\Sigma_2} r_i \varphi_i \, d\sigma \leq 0 .$$

Tale condizione era già stata indicata da Signorini come necessaria per l'equilibrio.

Detta U_r la sottoclasse (eventualmente vuota) di U costituita da tutti gli spostamenti rigidi, per il conseguimento dell'esistenza del minimo, si è rivelata essenziale la seguente formula di maggiorazione valida per ogni $u \in U$

$$\inf_{r \in U_r} \int_A |u - r|^2 dx \leq K \int_A W(\varepsilon) \, dx ,$$

essendo K indipendente da u.

Si dimostra inoltre che la minimante $E[u]$ in U è unica a meno dell'addizione di un vettore di U_r.

Per vedere in che senso la minimante verifica il sistema (1), (2), (3), (4), occorre opportunamente generalizzare le condizioni al contorno (3), ciò che tuttavia renderà il problema analitico vieppiù aderente alla realtà fisica. Ciò non è necessario per le condizioni (1), (2), (4), dato che se f e φ si suppongono uniformemente hölderiani nei rispettivi insiemi di definizione, allora la minimante u di $E[u]$ in U è di classe due in A e di classe uno in ogni punto regolare di Σ_2, talché le (1), (2), (4) sono verificate in senso classico.

Per verificare le (3) occorre abbandonare la interpretazione puntuale delle forze agenti su Σ_1 e pensarle invece come funzioni d'insieme completamente additive definite sui boreliani di Σ_1. Ciò sembra ragionevole fare anche da un punto di vista strettamente fisico. Si adotta allora una veduta da me introdotta nello studio dei problemi elastici fin dal 1949 [(6)]. Precisamente, si dimostra che esiste una funzione vettoriale d'insieme completamente additiva, definita sui boreliani di Σ_1: $t(B)$, tale che, fissata una porzione di superficie regolare Γ su Σ_1 e detta Γ_ϱ la superficie « parallela » a Γ, secondo il versore interno ν, ed a distanza ρ, si ha:

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\Gamma_\varrho} \sigma_{ik} \nu_k \, d\sigma_\varrho = t_i(\Gamma) .$$

Il verificarsi di una delle due alternative prospettate dalle (3) è subordinato all'essere $u_k \nu_k > 0$ oppure $u_k \nu_k = 0$. Ora, poiché u è un vettore di $\mathfrak{L}^2(\Sigma)$ e quindi determinato a meno dei valori su un *arbitrario* insieme di misura nulla, la discriminazione dei due casi apparirebbe priva di senso, se

(6) Cfr. loc. cit. [(5)], cap. II.

essi non venissero interpretati opportunamente. Occorre all'uopo introdurre la funzione $\psi(x)$ così definita in ogni punto regolare di Σ_1:

$$\psi(x) = \lim_{\varrho \to 0} \underset{|x-y|<\varrho}{p.\,inf.}\; u_k \nu_k ,$$

avendo indicato con $\underset{|x-y|<\varrho}{p.\,inf.}$ lo pseudo-estremo inferiore di $u_k \nu_k$ nell'insieme dei punti y di Σ_1 tali che $|x-y| < \rho$.

La condizione $u_k \nu_k > 0$ va allora interpretata come $\psi > 0$ e la $u_k \nu_k = 0$ come $\psi = 0$.

Orbene, mentre per ogni $\Gamma \subset \Sigma_1$ riesce

$$\int_\Gamma \tau_i \, dt_i = 0 ,$$

qualunque sia il vettore τ tangente a Γ, si ha invece, qualunque sia $\Gamma \subset \Sigma_1$:

$$\int_\Gamma \nu_i \, dt_i \geq 0 .$$

Se in un punto x è $\psi(x) > 0$, esiste allora un intorno circolare di tale punto tale che per ogni Γ contenuta in esso ed appartenente a Σ_1 si ha

$$\int_\Gamma \nu_i \, dt_i = 0 .$$

Ciò mostra che la soluzione trovata verifica condizioni integrali, perfettamente corrispondenti alle condizioni (3) di Signorini ed alle quali esse si riducono se u è di classe uno in $\bar{A}$. Ciò però, in generale, non si verifica, come può mostrarsi con esempi.