Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carlo Cattaneo

Sulla struttura locale delle equazioni dinamiche di un sistema anolonomo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.4, p. 396–402.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_4_396_0¿

Meccanica. — *Sulla struttura locale delle equazioni dinamiche di un sistema anolonomo.* Nota di CARLO CATTANEO, presentata [*] dal Socio G. KRALL.

Elemento principale di questo breve studio sarà l'utilizzazione in meccanica analitica di un operatore differenziale – la *derivazione trasversa* (ordinaria o covariante) – già introdotta anni or sono in questioni relativistiche [1]. Mostreremo (n. 3) come, mercè l'uso di tale derivazione, le equazioni dinamiche del moto di un sistema materiale in presenza di un vincolo anolonomo lineare indipendente dal tempo assumano formalmente la stessa struttura locale delle ordinarie equazioni lagrangiane di un sistema olonomo.

Il risultato non sembra essere puramente formale, riattaccandosi esso evidentemente all'identità geometrica *locale* tra vincoli olonomi e vincoli anolonomi lineari. Come tale identità si perde non appena i vincoli vengano considerati più in grande, così è naturale che differenze sostanziali tra i corrispondenti sistemi differenziali si presentino in tutti i problemi che implichino considerazioni non puramente locali.

Ad ogni modo la conseguita semplificazione locale consente anche la traduzione formale delle equazioni di moto in veste hamiltoniana, pur di conservarvi l'impiego della derivazione trasversa (n. 4). Se si pensa allo ufficio fondamentale del formalismo canonico nella trascrizione quantistica della meccanica, non è escluso che l'interesse del risultato vada oltre il semplice progresso formale.

1. PREMESSE. – Sia S un generico sistema olonomo a $n+1$ gradi di libertà, a vincoli fissi; x^i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ sue coordinate lagrangiane arbitrarie; $T(x \mid \dot{x}) \equiv \frac{1}{2} g_{hk}(x)\, \dot{x}^h \dot{x}^k$ l'energia cinetica; $\delta L \equiv F_h\, \delta x^h$ il lavoro virtuale della sollecitazione attiva. Supposto assente ogni attrito, il moto di S è retto dalle $n+1$ equazioni

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^h} - \frac{\partial T}{\partial x^h} = F_h \qquad (h = 0, 1, \cdots, n). \tag{1}$$

Se, al modo classico, introduciamo la varietà riemanniana rappresentativa V_{n+1} (spazio delle configurazioni) di metrica positiva $ds^2 \equiv g_{hk}\, dx^h dx^k$, sono ben note le seguenti interpretazioni geometriche [2]:

(*) Nella seduta del 20 aprile 1963.

(1) Cfr. « Il Nuovo Cimento », *10*, pp. 318–337 (1958); « Annali di Matematica », volume XLVIII, pp. 361–386 (1959).

(2) Cfr. per esempio E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, Cambridge University Press, 1937, p. 417.

1° l'insieme delle $n+1$ velocità lagrangiane $v^h \equiv \dot{x}^h$ individua un vettore controvariante $\boldsymbol{v}$ di V_{n+1}, chiamato *velocità* (rappresentativa) di S. Le $n+1$ derivate parziali

$$v_h = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^h} = g_{hk}\, \dot{x}^h \tag{2}$$

(*momenti* del sistema S) rappresentano in forma covariante lo stesso vettore. L'energia cinetica T si identifica con la semi-norma di $\boldsymbol{v}$: $T \equiv \frac{1}{2} v^2 \equiv \frac{1}{2} v_h v^h$;

2° per il significato intrinseco di δL e il carattere vettoriale di $\{\delta x^h\}$, anche le $n+1$ quantità F_h individuano, in forma covariante, un vettore $\mathbf{F}$ che può chiamarsi la *forza attiva* (globale) agente su S;

3° le equazioni (1), esplicitato il secondo termine e tenuto conto delle (2), si scrivono

$$\frac{dv_h}{dt} - \frac{1}{2} \partial_h g_{rs} v^r v^s = F_h \tag{3}$$

o anche, introducendo il simbolo D di derivazione assoluta in V_{n+1},

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{4}$$

In tale forma sintetica le equazioni di moto del sistema si presentano simili a quelle di un punto materiale fittizio di massa unitaria mobile in V_{n+1} sotto l'azione della forza $\mathbf{F}$.

2. INTRODUZIONE DI UN VINCOLO ANOLONOMO. RICHIAMI SUL METODO DELLE PROIEZIONI E SULLA DERIVAZIONE TRASVERSA. – Supponiamo che al sistema S sia ulteriormente imposto un vincolo anolonomo lineare *indipendente dal tempo*:

$$\gamma_h(x)\, \dot{x}^h = 0\,. \tag{5}$$

Il significato invariantivo del vincolo e il carattere vettoriale di $\{\dot{x}^h\}$ assicurano che gli $n+1$ coefficienti $\gamma_h(x)$ individuano, in ogni punto di V_{n+1}, un vettore γ non nullo che potremo supporre unitario

$$\gamma_i \gamma^i = 1\,. \tag{6}$$

Si può pertanto dire che un vincolo anolonomo lineare fisso è individuato da un campo di vettori unitari $\gamma(x)$ di V_{n+1} o, ciò che fa lo stesso, dalla congruenza Γ delle linee ad essi tangenti. In ogni punto di V_{n+1} il vincolo (5) impone al vettore $\boldsymbol{v}$, velocità di S, di appartenere alla faccetta n-dimensionale Σ ortogonale a γ (*faccetta vincolare*). Naturalmente se il vincolo è veramente anolonomo, se cioè le faccette vincolari non si raccordano in ipersuperficie, Γ non è una congruenza normale.

Una notevole semplificazione formale può ottenersi mediante un cambiamento di coordinate lagrangiane tale che le linee di Γ si identifichino con un sistema di linee coordinate, per esempio le linee x^0 (3). Siffatte coordinate verranno dette *coordinate adattate* al vincolo anolonomo (5) (4). In coordinate adattate le componenti del vettore γ, che conveniamo di orientare secondo le x^0 crescenti, assumono i valori

$$\gamma^\alpha = 0 \quad \gamma^0 = 1/\sqrt{g_{00}} \qquad ; \qquad \gamma_i = g_{0i}/\sqrt{g_{00}}\,. \tag{7}$$

Sempre in coordinate adattate, se la velocità $\boldsymbol{v}$ del sistema si esprime in forma covariante, il vincolo anolonomo (5) resta espresso dalla semplicissima condizione

$$v_0 = 0\,. \tag{5'}$$

Da ora in poi l'uso di tali coordinate sarà sempre sottinteso.

In un generico punto P di V_{n+1} diremo *verticali* tutti i vettori collineari a γ, *orizzontali* tutti i vettori ortogonali ad esso. I primi costituiscono un sottospazio tangente unidimensionale Θ, i secondi un sottospazio tangente a n dimensioni che si identifica con la faccetta vincolare Σ; Θ e Σ sono mutuamente ortogonali e supplementari. In coordinate adattate i vettori orizzontali sono caratterizzati [cfr. (5')] dall'annullarsi della loro componente covariante d'indice zero. I vettori verticali [cfr. (7)] hanno invece nulle le componenti controvarianti d'indice diverso da zero.

Ciò premesso si consideri, in un qualsiasi punto di V_{n+1}, un generico vettore $\mathbf{V}$; esso è univocamente decomponibile nella somma di due vettori $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{N}$, il primo parallelo e l'altro normale a γ: li diremo rispettivamente *proiezione verticale* ($\mathcal{P}_\Theta \mathbf{V}$) e *proiezione orizzontale* ($P_\Sigma \mathbf{V}$) di $\mathbf{V}$. Un calcolo semplicissimo mostra che

$$\begin{cases} A_i \equiv \mathcal{P}_\Theta V_i = \gamma_i \gamma_r V^r \\ N_i \equiv \mathcal{P}_\Sigma V_i = \gamma_{ir} V^r \end{cases} \tag{8}$$

ove si è posto

$$\gamma_{ir} = g_{ir} - \gamma_i \gamma_r\,. \tag{9}$$

Lo spezzamento di $\mathbf{V}$ nella somma di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{N}$ verrà detto la *decomposizione naturale* di $\mathbf{V}$.

L'operazione di proiezione su Θ e su Σ si estende in modo evidente ai tensori d'ordine qualunque, operando su ciascun indice mediante il *proiettore verticale* $\gamma_i \gamma_r$ o il proiettore *orizzontale* γ_{ir}. Si avrà per esempio, con notazioni evidenti:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\Sigma\Sigma} T_{ij} &= \gamma_{ir}\gamma_{js} T^{rs} \quad , \quad & \mathcal{P}_{\Sigma\Theta} T_{ij} &= \gamma_{ir}\gamma_j \gamma_s T^{rs} \\ \mathcal{P}_{\Theta\Sigma} T_{ij} &= \gamma_i \gamma_r \gamma_{js} T^{rs} \quad , \quad & \mathcal{P}_{\Theta\Theta} T_{ij} &= \gamma_i \gamma_j \gamma_r \gamma_s T^{rs}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

(3) Chiameremo x^α ($\alpha = 1, 2, \cdots, n$) le altre n coordinate. In tutto il presente lavoro conveniamo che gli indici latini varino da 0 ad n, gli indici greci da 1 ad n.

(4) La determinazione di coordinate adattate comporta la risoluzione di un sistema differenziale del 1° ordine; le eventuali difficoltà che esso può presentare non interessano in questa sede, ove si ha di mira la *struttura locale* delle equazioni di moto.

Il tensore doppio simmetrico γ_{ir} definito dalla (9) ha identicamente nulle le componenti covarianti in cui uno o entrambi gli indici assumono il valore 0; esso è pertanto un tensore orizzontale, cioè appartenente alla faccetta vincolare Σ; oltre all'ufficio di proiettare su Σ vettori e tensori, esso ha anche quello di *tensore metrico orizzontale*, cioè di tensore metrico indotto nella faccetta vincolare Σ.

Assegnata in V_{n+1} una qualsiasi funzione scalare $f(x^0, x^1, \cdots, x^n)$ consideriamone il suo gradiente, $\mathrm{grad} f \equiv \{\partial_i f\}$, e punto per punto di V_{n+1} effettuiamone la proiezione su Σ; il campo di vettori orizzontali che così si ottiene dà il cosidetto *gradiente trasverso* di f: $\overgroup{\mathrm{grad}} f \equiv \mathcal{P}_\Sigma (\partial_i f)$. Da tale definizione segue immediatamente, tenuto conto di $(8)_2$ e di (9):

$$\overgroup{\mathrm{grad}} f \equiv \{\tilde{\partial}_i f\} = \{(\partial_i - \gamma_i \gamma^0 \partial_0) f\}. \tag{11}$$

L'operazione differenziale $\tilde{\partial}_i \equiv \partial_i - \gamma_i \gamma^0 \partial_0$ $(\tilde{\partial}_0 \equiv 0)$, che ha un ovvio carattere tensoriale in quanto applicata ad uno scalare f ne fornisce il gradiente trasverso, dicesi *derivazione parziale trasversa*. Mediante essa si definisce anche un *differenziale trasverso* secondo un qualsiasi vettore dx^i

$$\tilde{d} f \equiv \tilde{\partial}_i f \, dx^i. \tag{12}$$

Si noti che se dx^i è un vettore orizzontale il differenziale trasverso coincide col differenziale ordinario

$$\tilde{d} f \equiv df \qquad (dx \in \Sigma). \tag{13}$$

In modo analogo si può definire un'operazione di derivazione trasversa covariante, che opera su vettori (o tensori) orizzontali e dà origine a tensori orizzontali. Sia s_j un campo di vettori orizzontali $(s_0 = 0)$ e $\nabla_i s_j$ la sua derivata covariante in V_{n+1}; nessuno degli indici di $\nabla_i s_j$ avrà generalmente carattere orizzontale. Chiamasi *derivata covariante trasversa* del campo di vettori s_j il tensore orizzontale $\tilde{\nabla}_i s_j$, proiezione di $\nabla_i s_j$ su Σ:

$$\tilde{\nabla}_i s_j \equiv \mathcal{P}_{\Sigma\Sigma} \nabla_i s_j = \gamma_i^h \gamma_j^k \nabla_h s_k. \tag{14}$$

Un calcolo un po' lungo mostra che tale derivata si esplicita formalmente come un'usuale derivata covariante

$$\tilde{\nabla} s_j = \tilde{\partial}_i s_j - \overgroup{\left\{ {h \atop ij} \right\}} s_h \tag{15}$$

con i seguenti adattamenti: 1) la sostituzione della derivazione trasversa $\tilde{\partial}_i$ alla derivazione parziale ordinaria ∂_i 2) l'uso di simboli di Christoffel *orizzontali*, di prima e di seconda specie, costruiti mediante il tensore metrico orizzontale γ_{ij} ancora con l'uso della $\tilde{\partial}_i$ in luogo di ∂_i:

$$\begin{cases} \overgroup{(ij, h)} = \frac{1}{2}(\tilde{\partial}_i \gamma_{jh} + \tilde{\partial}_j \gamma_{hi} - \tilde{\partial}_h \gamma_{ij}) \\ \overgroup{\left\{ {k \atop ij} \right\}} = g^{hk}\, \overgroup{(ij, h)}. \end{cases} \tag{16}$$

La derivazione covariante trasversa gode di tutte le proprietà formali di una qualsiasi derivazione covariante e si estende in modo evidente ai tensori (orizzontali) di ordine qualunque. Vale per essa un teorema analogo a quello di *Ricci*, relativamente al tensore metrico orizzontale

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\alpha}\,\gamma_{\varrho\tau}=0. \tag{17}$$

Mediante la derivata covariante trasversa si definisce una differenziazione trasversa e una derivazione totale trasversa lungo una qualunque linea l di equazioni parametriche $x^i = x^i(t)$:

$$\frac{\overset{\circ}{\mathrm{D}}\, s_j}{dt} = \overset{\circ}{\nabla}_i\, s_j \frac{dx^i}{dt} = \frac{ds_j}{dt} - \left\{ \begin{matrix} \overset{\frown}{r} \\ ij \end{matrix} \right\} s_r \frac{dx^i}{dt}. \tag{18}$$

L'espressione di $\overset{\circ}{\mathrm{D}}\, s_j/dt$ che compare al terzo membro della (18) ha significato anche se s_j non è un vero campo vettoriale ma è definito soltanto *nei punti della linea* l.

Quanto precede non è che l'ovvio adattamento al caso di una varietà dotata di metrica definita positiva di considerazioni già svolte anni or sono per una varietà a metrica indefinita.

3. EQUAZIONI DI MOTO DI UN SISTEMA ANOLONOMO. – Quando al sistema olonomo S considerato al n. 1 si impone il vincolo anolonomo (5) la sua energia cinetica può esprimersi nelle sole velocità lagrangiane di indice non nullo, eliminando la $\dot{x}^0$ mediante la (5) (che fornisce $\dot{x}^0 = -\gamma_\beta\, \dot{x}^\beta/\gamma_0$). Si ha allora una nuova funzione $\mathcal{T}(x^0, x^1, \cdots, x^n \mid \dot{x}^1, \cdots, \dot{x}^n)$ nelle $n+1$ variabili di posizione x^i e nelle n velocità lagrangiane $\dot{x}^\alpha$:

$$\mathcal{T}(x^0, x^1, \cdots, x^n \mid \dot{x}^1, \cdots, \dot{x}^n) = \tag{19}$$

$$= \mathrm{T}(x^0, x^1, \cdots, x^n \mid \dot{x}^0, \dot{x}^1, \cdots \dot{x}^n)_{\dot{x}^0=-\gamma_\beta \dot{x}^\beta/\gamma_0} = \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta.$$

Tra le derivate parziali rispetto alle $\dot{x}^\alpha$ della nuova forma quadratica $\mathcal{T}$ (nelle n variabili $\dot{x}^\alpha$) e le corrispondenti derivate dell'antica forma quadratica T (nelle $n+1$ variabili $\dot{x}^i$) sussistono evidentemente le relazioni seguenti

$$\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{x}^\alpha} = \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}^\alpha}\right)_{\dot{x}^0=-\gamma_\beta \dot{x}^\beta/\gamma_0} + \frac{\partial \dot{x}^0}{\partial \dot{x}^\alpha}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}^0}\right)_{\dot{x}^0=-\gamma_\beta \dot{x}^\beta/\gamma_0}$$

e cioè, stante la (5'),

$$\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{x}^\alpha} = \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}^\alpha}\right)_{\dot{x}^0=-\gamma_\beta \dot{x}^\beta/\gamma_0}. \tag{20}$$

Ciò significa che calcolare le derivate parziali di T rispetto a $\dot{x}^\alpha$ ($\alpha = 1, \cdots, n$) e poi imporre il vincolo (5) equivale ad imporre prima a T il vincolo (5) e poi calcolare la derivata parziale rispetto a $\dot{x}^\alpha$. Tali derivate parziali danno naturalmente i *momenti* del sistema S soggetto al vincolo (5):

$$v_\alpha \equiv \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{x}^\alpha} \equiv \gamma_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\beta. \tag{21}$$

Veniamo ora alle equazioni di moto. Anche in presenza del vincolo (5) esse possono conservare la forma (1) al patto di completare i secondi membri con le $n+1$ componenti lagrangiane di una *sollecitazione vincolare* che in assenza di attrito potranno scriversi nella forma $\lambda\gamma_h$, λ essendo un opportuno moltiplicatore,

$$\frac{\mathrm{D}v_h}{dt} = \mathrm{F}_h + \lambda\gamma_h . \tag{22}$$

Punto per punto della traiettoria di S consideriamo ora la proiezione della equazione (22) su Σ. Indicata con $\overset{\approx}{\mathrm{F}}_\alpha$ la proiezione orizzontale di $\mathbf{F}$ non è difficile riconoscere, *tenuto anche conto del vincolo* (5), che l'equazione può scriversi

$$\frac{\overset{\approx}{\mathrm{D}}v_\alpha}{dt} = \overset{\approx}{\mathrm{F}}_\alpha \tag{23}$$

ove a primo membro compare la derivazione assoluta trasversa ricordata al n. 2.

La (23) mostra come l'introduzione della derivazione covariante trasversa permetta, anche in presenza di un vincolo anolonomo, di conservare all'equazione di moto una tipica forma newtoniana analoga a quella di un semplice punto materiale.

In termini più espliciti, ricordando la (2) e la (13), l'equazione (23) può scriversi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{x}^\alpha} - \overset{\curvearrowright}{(\alpha\rho\,,\tau)}\,\dot{x}^\rho\,\dot{x}^\tau = \overset{\approx}{\mathrm{F}}_\alpha . \tag{24}$$

Osservato che per il carattere orizzontale di $\partial\mathcal{T}/\partial\dot{x}^\alpha$ è valida la (13), e che

$$\overset{\curvearrowright}{(\alpha\rho\,,\tau)}\,\dot{x}^\rho\,\dot{x}^\tau \equiv \frac{1}{2}\,\overset{\approx}{\partial}_\alpha\,\gamma_{\rho\tau}\,\dot{x}^\rho\,\dot{x}^\tau \equiv \frac{\overset{\approx}{\partial}\mathcal{T}}{\partial x^\alpha} , \tag{25}$$

l'equazione (24) assume la forma lagrangiana

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{x}^\alpha} - \frac{\overset{\approx}{\partial}\mathcal{T}}{\partial x^\alpha} = \overset{\approx}{\mathrm{F}}_\alpha . \tag{26}$$

Alle n equazioni (26) va naturalmente aggiunta l'equazione vincolare (5) sì che nel complesso esse costituiscono un sistema di $n+1$ equazioni nelle $n+1$ incognite $x^0(t)\,, x^1(t)\,,\cdots, x^n(t)$. L'aspetto lagrangiano compete naturalmente soltanto alle n equazioni direttamente corrispondenti agli n gradi di libertà localmente superstiti.

4. LE EQUAZIONI DEL MOTO IN FORMA HAMILTONIANA. – Supponiamo la sollecitazione conservativa di potenziale $\mathrm{U}(x^0\,, x^1\,,\cdots, x^n)$. Risulta allora

$$\mathrm{F}_h = \frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x^h} \quad , \quad \overset{\approx}{\mathrm{F}}_\alpha = \frac{\overset{\approx}{\partial}\mathrm{U}}{\partial x^\alpha} . \tag{27}$$

Introdotta la funzione lagrangiana

$$\mathfrak{L}(x^0\,, x^1\,,\cdots, x^n \mid \dot{x}^1\,,\cdots, \dot{x}^n) \equiv \mathcal{T} + \mathrm{U} \tag{28}$$

le equazioni (26) (5) divengono

$$
(29) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}} - \dfrac{\tilde{\partial} \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \\[2ex] \gamma_i(x)\, \dot{x}^i = 0. \end{cases}
$$

Secondo un procedimento classico poniamo ulteriormente

$$
(30) \qquad \mathcal{H}(x^0, x^1, \ldots, x^n \mid v_1, \ldots, v_n) =
$$

$$
= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\beta}} \dot{x}^{\beta} - \mathcal{L} \equiv v_{\beta}\, \dot{x}^{\beta} - \mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} v_{\alpha} v_{\beta} - \mathrm{U}(x^0, x^1, \ldots, x^n)
$$

intendendo che a secondo membro tutte le $\dot{x}^{\alpha}$ siano espresse in termini delle v_{β} (mediante risoluzione delle (21): $\dot{x}^{\beta} = \gamma^{\beta\rho} v_{\rho}$). Dalla (30) derivando trasversalmente rispetto a x^{α}, sia direttamente, sia per il tramite delle $\dot{x}^{\beta} \equiv \equiv \gamma^{\beta\rho} v_{\rho}$, si ricava

$$
(31) \qquad \frac{\tilde{\partial} \mathcal{H}}{\partial x^{\alpha}} = v_{\beta} \frac{\tilde{\partial} \dot{x}^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\tilde{\partial} \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\beta}} \frac{\tilde{\partial} \dot{x}^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = - \frac{\tilde{\partial} \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} .
$$

Similmente derivando rispetto a v_{α} si ha

$$
(32) \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_{\alpha}} = \dot{x}^{\alpha} + v_{\beta} \frac{\partial \dot{x}^{\beta}}{\partial v_{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\beta}} \frac{\partial \dot{x}^{\beta}}{\partial v_{\alpha}} = \dot{x}^{\alpha}.
$$

Se ne trae che le (29) equivalgono complessivamente al sistema del primo ordine

$$
(33) \qquad \begin{cases} \dfrac{dv_{\alpha}}{dt} = - \dfrac{\tilde{\partial} \mathcal{H}(x \mid v)}{\partial x^{\alpha}} \\[2ex] \dfrac{dx^{\alpha}}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}(x \mid v)}{\partial v_{\alpha}} \\[2ex] \dfrac{dx^0}{dt} = - \gamma^0 \gamma_{\rho} \gamma^{\rho\tau} v_{\tau} \end{cases}
$$

che, salvo per l'ultima equazione, ha aspetto tipicamente hamiltoniano.