Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Grioli

Questioni di dinamica del corpo rigido

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.1-2, p. 35–39.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_1-2_35_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Meccanica. — *Questioni di dinamica del corpo rigido.* Nota di GIUSEPPE GRIOLI, presentata [*] dal Socio B. FINZI.

Di recente ho stabilito alcuni teoremi di Cinematica dei moti rigidi [1] che permettono di caratterizzare i moti di precessione in forma diversa dalle abituali. Più in generale, anzi in [G] è data una speciale caratterizzazione cinematica di moti che possono dirsi *precessioni generalizzate*, cioè moti per i quali non la velocità angolare ω ma il suo trasformato $\varepsilon\,\omega$ mediante un'omografia costante rispetto ad assi solidali è parallelo alla giacitura determinata da una direzione solidale e da una fissa, in particolare il momento delle quantità di moto.

Da tale caratterizzazione discende la possibilità di rappresentare ogni vettore invariabile dello spazio mediante una speciale espressione dipendente direttamente dalle componenti di ω rispetto ad assi solidali.

Ciò permette di stabilire un metodo generale che può riuscire particolarmente agevole per la determinazione di soluzioni del problema dinamico del moto attorno ad un punto O, specialmente se si conoscono due integrali primi. Appunto, ponendomi nel caso fisicamente interessante di forze il cui momento rispetto ad O dipende da ω e da un vettore invariabile $\mathbf{H}$ [peso, forze di Coriolis, di Lorentz, di potenza nulla, ecc.], studio la questione di esistenza di due integrali primi e accenno ad un possibile procedimento di costruzione di soluzioni, dandone un esempio.

1. EQUAZIONE DINAMICHE GENERALI. – Sia O un punto solidale al sistema rigido e A, B, C, A′, B′, C′ i momenti d'inerzia e quelli di deviazione relativi agli assi di una terna solidale, trirettangola e levogira di origine O e versori $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$. Può sempre darsi alla terna solidale un opportuno orientamento intorno all'asse di versore $\boldsymbol{i}_3$ in modo che risulti $C' = 0$. L'omografia d'inerzia σ è allora rappresentata dalla matrice simmetrica

$$\sigma = \begin{vmatrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A & C \end{vmatrix} . \tag{1}$$

Le forze esterne – comprese in esse quelle apparenti del moto relativo – siano tali che il loro momento risultante rispetto ad O dipenda unicamente dalla velocità angolare ω e da un vettore invariabile nello spazio, $\mathbf{H}$, oltre che, eventualmente, da un certo numero di parametri costanti rispetto agli assi solidali.

(*) Nella seduta del 13 giugno 1963.

(1) G. GRIOLI, *Qualche teorema di Cinematica dei moti rigidi*, « Rend. Acc. dei Lincei ». Nel seguito accennerò con [G] tale lavoro.

Sotto tali ipotesi, supposto O fisso oppure coincidente con il baricentro, l'equazione dinamica dei momenti – com'è ben noto – assume la forma

$$\frac{d\sigma\,\omega}{dt} = \mathbf{M}_0(\omega\,,\mathbf{H}), \tag{2}$$

a cui va associata l'equazione

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \dot{\mathbf{H}} + \omega \wedge \mathbf{H} = 0, \tag{3}$$

esprimente l'invariabilità di $\mathbf{H}$ nello spazio, il punto sul simbolo di un vettore denotando derivazione rispetto al tempo con riferimento agli assi solidali. Evidentemente rientra nel sistema (2), (3) il caso del solido pesante.

Rientra altresì nelle (2), (3) il caso delle forze di Coriolis che si presentano nel problema del moto di un corpo rigido intorno al suo baricentro con referenza alla Terra, cioè rispetto ad una terna avente l'origine nel baricentro G e assi di orientamento invariabile rispetto ad una terna solidale alla Terra. In tal caso, dalla diretta definizione di $\mathbf{M}_0$:

$$\mathbf{M}_0 = -2\int_C \mu\,\mathrm{OP} \wedge [\mathbf{H} \wedge (\omega \wedge \mathrm{OP})]\,dC, \tag{4}$$

ove ora $\mathbf{H}$ denota la velocità angolare della Terra, si deduce, con qualche sviluppo

$$\mathbf{M}_0 = \omega \wedge (\lambda - 2\,\sigma)\,\mathbf{H} \tag{5}$$

ove λ è l'invariante lineare di σ.

Ma più in generale rientra nel caso (2), (3) quello di un corpo sede di cariche elettriche solidali e immerso in un campo magnetico $2\,\mathbf{H}$ invariabile nello spazio. In tal caso si è in presenza delle forze di Lorentz e da una definizione analoga alle (4) si deduce

$$\mathbf{M}_0 = \omega \wedge (\lambda^* - 2\,\sigma^*)\,\mathbf{H}, \tag{6}$$

ove σ^* è l'omografia che si deduce da quella d'inerzia sostituendo alla densità materiale μ, quella della distribuzione elettrica, μ^* e λ^* il suo invariante lineare. Denotando con A^*, B^* ecc., i corrispondenti di A , B, ecc., non può però, ora supporsi $C'^* = 0$, se già si è supposto $C' = 0$.

In seguito sarà comodo dire che il corpo è soggetto a *forze di Coriolis generalizzate quando* $\mathbf{M}_0$ è esprimibile nella forma (6), intendendo di comprendere in tale caso anche quello di Coriolis.

Anche nel caso di un corpo rigido con una cavità piena di un liquido incomprimibile in moto stazionario rispetto al corpo, l'equazione dinamica dei momenti assume l'aspetto [2] (2).

(2) V. V. RUMIANZEV, *Ob ustoicivosti vrasceniia volcka s palastiu zapolniennoi viaskoi jidkostiu*, « Acc. delle Scienze dell'URSS. Matematica applicata e Meccanica », T. XXIV (1960).

2. INTEGRALI PRIMI. – Ai fini applicativi è interessante vedere quando il sistema (2), (3) ammette integrali primi. Poiché nel caso speciale del peso [con vincolo liscio] è ben nota l'esistenza, in generale, dell'integrale dell'energia e di un secondo integrale primo esprimente l'invariabilità della componente verticale di $\sigma\,\boldsymbol{\omega}$, qui si porrà il quesito di vedere se e quando sussistono per il sistema dinamico (2), (3) due integrali primi del tipo di quelli noti nel caso del peso, nel senso che a questi essi si riducono in questo caso particolare. Precisamente, si tratta di riconoscere se e quando sussiste l'integrale dell'energia che, con ovvio significato dei simboli, si scrive

$$\frac{1}{2}\,\sigma\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}-\mathrm{U}=\mathrm{E} \tag{7}$$

e un secondo integrale primo del tipo

$$\sigma\,\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{H}=\mathrm{L}\,(\mathbf{H}) \tag{8}$$

ove L ($\mathbf{H}$) è una funzione scalare di $\mathbf{H}$ che si riduce a una costante nel caso del solido pesante.

La questione non è difficile. È evidente che supposto U dipendente solo da $\mathbf{H}$, condizione necessaria e sufficiente affinché sussista l'integrale dell'energia e che risulti

$$\mathbf{M}_0=\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\omega}+\operatorname*{grad}_{\mathrm{H}}\,\mathrm{U}\wedge\mathbf{H}, \tag{9}$$

ove $\boldsymbol{\beta}$ è una funzione vettoriale arbitraria di $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{H}$. Infatti l'esistenza dell'integrale primo (7) richiede come condizione necessaria e sufficente che sia

$$\mathbf{M}_0\times\boldsymbol{\omega}=\frac{d\mathrm{U}}{dt}=\operatorname*{grad}_{\mathrm{H}}\,\mathrm{U}\times\dot{\mathbf{H}}=\operatorname*{grad}_{\mathrm{H}}\,\mathrm{U}\times\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{\omega} \tag{10}$$

la cui soluzione più generale è la (9).

Si riconosce altresì facilmente che affinché sussista un integrale primo del tipo (8) occorre e basta che sia

$$\mathbf{M}_0=\boldsymbol{\nu}\wedge\mathbf{H}+\boldsymbol{\omega}\wedge\operatorname*{grad}_{\mathrm{H}}\,\mathrm{L}, \tag{11}$$

con $\boldsymbol{\nu}$ arbitraria funzione di $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{H}$.

Infatti, l'esistenza di un'integrale del tipo (8) richiede come necessaria e sufficiente la condizione

$$\mathbf{M}_0\times\mathbf{H}=\frac{d\mathrm{L}}{dt}=\operatorname*{grad}_{\mathrm{H}}\,\mathrm{L}\times\dot{\mathbf{H}}=\mathrm{grad}\,\,\mathrm{L}\times\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{\omega} \tag{12}$$

che porta proprio a (11).

Supposto che $\mathbf{M}_0$ verifichi la (9) per assegnati $\boldsymbol{\beta}$ e U, affinché sussista oltre all'integrale dell'energia anche quello espresso da (8) occorre e basta che esista una scalare $\gamma\,(\boldsymbol{\omega}\,,\,\mathbf{H})$ per il quale si abbia

$$\mathrm{rot}\,\,\boldsymbol{\beta}=\operatorname*{grad}_{\mathrm{H}}\,\gamma\wedge\mathbf{H}. \tag{13}$$

Infatti, da (9), (11) si trae subito

$$(\boldsymbol{\nu} - \operatorname*{grad}_{\mathrm{H}} \mathrm{U}) \wedge \mathbf{H} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\operatorname*{grad}_{\mathrm{H}} \mathrm{L} + \boldsymbol{\beta}) = 0, \tag{14}$$

da cui, prescindendo in $\boldsymbol{\nu}$ da un termine inessenziale parallelo ad $\mathbf{H}$ e in $\operatorname*{grad}_{\mathrm{H}} \mathrm{L}$ da uno parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$, si trae

$$\boldsymbol{\nu} = \operatorname*{grad}_{\mathrm{H}} \mathrm{U} + \gamma \boldsymbol{\omega} \quad , \quad \operatorname*{grad}_{\mathrm{H}} \mathrm{L} = -\boldsymbol{\beta} + \gamma \mathbf{H}. \tag{15}$$

La (15.2) richiede come necessaria e sufficiente per l'esistenza di L proprio la (13).

Le (9), (13) sussistono in ognuno dei casi richiamati al n. 1. In particolare, nel caso di forze di Coriolis generalizzate esse sussistono per $\mathrm{U} = 0$, $\gamma = 0$, com'è facile riconoscere in base a (6). In tal caso l'integrale primo (8) si esplicita [3] in

$$\sigma \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \sigma^{*} \mathbf{H} \times \mathbf{H} + h \tag{16}$$

con h costante.

3. Ricerca di moti di precessione generalizzata dinamicamente possibili. – I teoremi di cinematica contenuti in [G] permettono di stabilire un metodo generale per la determinazione dei moti di precessione generalizzata di un corpo rigido. Tale metodo riesce più agevole se sussistono i due integrali primi (7), (8). Per brevità considererò solo tale caso.

L'idea direttrice è la seguente. In base al teorema [G. II] è possibile rappresentare il vettore invariabile $\mathbf{H}$ nella forma [G, (17)], cioè come prodotto del suo modulo H per il suo versore $\boldsymbol{\mu}$ espresso proprio da [G, (17)]. La (3) è di conseguenza soddisfatta e il sistema scalare differenziale corrispondente all'equazione dinamica (2) dipende in ultima analisi solo dalle componenti p_1, p_2, p_3, di $\boldsymbol{\omega}$ e da θ [o, se si vuole, da p_1 , p_2 , p_3 , θ e μ – si veda [G, (15)]]. Fatto analogo capita per gli integrali primi (7), (8). Le (2) dipendono linearmente da $\dot{p}_1$, $\dot{p}_2$, $\dot{p}_3$ che è facile dedurre da esse, mentre la (8), essendo lineare in p_3 ne permette la sua determinazione in funzione delle altre variabili. In definitiva da (2), (8) si deduce facilmente

$$\dot{p}_1 = \mathrm{F}_1(p_1, p_2, \theta, \mu) \quad , \quad \dot{p}_2 = \mathrm{F}_2(p_1, p_2, \theta, \mu) \quad , \quad p_3 = \mathrm{F}_3(p_1, p_2, \theta, \mu). \tag{17}$$

Queste, introdotte nelle equazioni caratteristiche [G, (2)] e nell'integrale primo dell'energia dànno luogo ad un sistema del tipo

$$\begin{cases} \mathrm{N}(p_1, p_2, \theta, \mu) = 0 \qquad \dot{\theta} + \mathrm{F}(p_1, p_2, \theta, \mu) = 0, \\ \left[\frac{1}{2} \sigma \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - \mathrm{U}\right]_{p_1, p_2, \theta, \mu} - \mathrm{E} = 0. \end{cases} \tag{18}$$

(3) L'integrale primo (16) è stato ottenuto per via diretta nel caso di semplici forze di Coriolis [G. Grioli, *Sul moto di un corpo rigido soggetto a forze di potenza nulla*, « Rend. del Sem. Mat. dell'Università di Padova », vol. XXVII (1957)].

Moti di precessione generalizzata esistono allora e solo allora che le (18) sono compatibili con la [G, (15)] e con una delle equazioni (17) da esse indipendente.

Il caso più semplice si presenta se il vettore $\boldsymbol{c}$ [G, (8)] è parallelo ad **H**. Infatti in tal caso si ha $\eta = 0$ e le [G, (16)] dànno per f_1, f_2, f_3 delle costanti, sicché le (18) non dipendono da μ e non occorre considerare la [G, (15)].

Nel caso di moti di pura precessione si deve ritenere $\dot{\theta} = 0$ e identicamente verificata la (18.2). Di conseguenza si richiede la compatibilità tra le (18.1), (18.3), una delle (17) e la [G, (15)]. Se, in particolare, l'asse di precessione è parallelo ad **H**, le (18) non dipendono da μ e per l'esistenza occorre e basta che una soluzione p_1 (p_2) dedotta da una di esse soddisfi all'altra.

4. PRECESSIONI REGOLARI NEL CASO DI FORZE DI CORIOLIS GENERALIZZATE. – Nel caso di forze di Coriolis generalizzate e, più in generale, di forze di potenza nulla risulta $U \equiv 0$ [vedi (6), (9)] e l'integrale dell'energia esprime la costanza di $\sigma\, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}$. Se la precessione è regolare anche il modulo di $\boldsymbol{\omega}$ è costante e ciò implica l'invariabilità del momento d'inerzia del solido rispetto all'asse di moto. Ciò vuol dire che in ogni eventuale precessione regolare l'asse di figura deve coincidere con una delle due rette ortogonali ai piani delle sezioni circolari dell'ellissoide d'inerzia relativo ad O, mentre p_3 deve essere nulla [(4)]. Di conseguenza, in corrispondenza al polo della precessione deve risultare

$$(19) \qquad A - B = 0 \quad , \quad B' = C' = 0 \quad , \quad A' \neq 0.$$

Si può dimostrare che, se sono soddisfatte le condizioni

$$(20) \quad (2A^* - C^*)A' - 2AA'^* = 0 \;,\; B'^* = C'^* = 0 \;,\; A^* = B^* \;,\; A'^* \neq 0,$$

esiste una classe di precessioni regolari aventi l'asse di precessione parallelo ad **H** e caratterizzate dalle equazioni

$$(21) \qquad \begin{cases} \ddot{p}_1 + \rho^2 p_1 = 0 \quad , \quad \ddot{p}_2 + \rho^2 p_2 = 0 \quad , \quad p_3 = 0; \\ \mathbf{H} = -\dfrac{A'}{2A'^*}\boldsymbol{\omega} + H\cos\theta\, \boldsymbol{i}_3 \quad , \quad \rho^2 = \dfrac{4H^2\cos\theta\, A'^{*2}}{A'^2} \end{cases}$$

ove θ è l'invariabile angolo formato dall'asse di figura con quello di precessione.

Si riconosce che la soluzione qui riportata mentre è accettabile nel caso di forze di Lorentz non lo è in quello di forze di Coriolis. Infatti, in tal caso $[\sigma^* = \sigma]$ la (20.1) si riduce a

$$(22) \qquad A'C = 0,$$

che non può essere verificata nel caso di un solido effettivamente asimmetrico $[A' \neq 0]$.

Si può, anzi, dimostrare che nel caso di forze di Coriolis non esistono precessioni regolari neppure con asse di precessione non parallelo ad **H**.

(4) Si esclude il caso che il corpo abbia rotondo l'ellissoide d'inerzia relativo ad O.