Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

E. Arghiriade, A. Dragomir

Une nouvelle definition de l'inverse généralisée d'une matrice

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.3-4, p. 158–165.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_3-4_158_0>

Algebra. — *Une nouvelle définition de l'inverse généralisée d'une matrice.* Nota [(*)] di E. ARGHIRIADE e A. DRAGOMIR, presentata dal Socio B. SEGRE.

1. L'inverse généralisée d'une matrice rectangulaire dont les éléments sont des nombres complexes a été definie par E. H. Moore [1]. Ultérieurement et indépendamment des travaux de E. H. Moore cette définition a été retrouvée par A. Bjerhammar [2] et R. Penrose [3], [4]; le premier a défini l'inverse d'une matrice rectangulaire de rang maximal (le rang est égal à la plus petite dimension de la matrice) et le second l'inverse d'une matrice rectangulaire quelconque. Pour définir l'inverse généralisée d'une matrice quelconque $A\,(p \times n)$, R. Penrose [3; p. 406] considère le système:

$$(1) \qquad \begin{cases} AXA = A \quad ; \quad XAX = X \\ (AX)^* = AX \quad ; \quad (XA)^* = XA\,, \end{cases}$$

(A^* est la matrice transposée et complexe conjuguée de A ; $A^* = \bar{A}'$). Le système (1) admet toujours une solution *unique*, $X\,(n \times p)$, qui est par définition *l'inverse généralisée de* A et que nous représenterons par $A^{(-1)}$, sauf dans le cas ou A est carrée et non-singulière, quand nous employerons la notation habituelle A^{-1}.

Une autre définition plus dirècte de la matrice inverse a été donné par T. N. E. Greville [5]. Dans le même ordre d'idées mentionnons les travaux de M. Stojacovic [6], [7]: le déterminant D de la matrice $A\,(p \times n)$, ou $p \leq n$, est défini comme étant la somme de tous les mineurs d'ordre p de A; et chaque élément a_{ik} de A admet un complément algébrique, qu'on obtient en supprimant la ligne de rang i et la colonne de rang k de A et en prenant le déterminant de la matrice restante dans laquelle les éléments sont multipliés par ± 1 suivant une certaine règle; la matrice (np) formée avec ces compléments algébriques, divisée par D, donne une *matrice quasi-inverse* de A, qui [7; p. 877] est différente de l'inverse généralisée de E. H. Moore et A. Bjerhammar.

2. Nous allons montrer qu'en définissant d'une manière convenable les compléments algébriques, la matrice formée avec ces compléments algébriques conduit à l'inverse généralisée de E. H. Moore et A. Bjerhammar.

LEMME. – *Soit* $A\,(r \times n)$ *une matrice horizontale et de rang maximal* ($r \leq n$; *rang* $A = r$); *le système*

$$(2) \qquad AX = E_r \quad ; \quad (XA)^* = XA\,,$$

admet toujours une solution unique, qui est l'inverse généralisée de E. H. Moore et A. Bjerhammar.

Si la matrice $A\,(p \times r)$ *est verticale et de rang maximal* ($p \geq r$; *rang* $A = r$) *le même énoncé est valable pour le système* :

$$XA = E_r \quad ; \quad (AX)^* = AX\,,$$

E_r *étant la matrice unité d'ordre r.*

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1963.

Démontrons la première partie du lemme: nous savons que le système (1) admet toujours une solutions unique $X(n \times r)$; montrons que X vérifie aussi (2). On a de (1): $A^* X^* = (XA)^* = XA$, donc $A^* X^* = XA$ et en tenant compte de (1)

$$AA^* X^* = AXA = A\,; \tag{3}$$

la matrice AA^* est d'ordre r et non singulière et de (3) il résulte

$$X^* = (AA^*)^{-1} A$$

et aussi

$$X = A^* (AA^*)^{-1};$$

de cette dernière relation on déduit $AX = E_r$ et la première des relations (2) est vérifiée; la seconde relation (2) est évidemment vérifiée, comme appartenant à (1).

Réciproquement supposons que la matrice $X(n \times r)$ vérifie (2); montrons qu'elle vérifie aussi (1) et est par conséquant l'unique solution de (2). On a de (2)

$$AXA = E_r \cdot A = A \quad ; \quad XAX = X E_r = X \quad ; \quad (AX)^* = (E_r)^* = E_r = AX\,,$$

la quatrième des relations (1) étant évidemment vérifiée.

Donc la première partie du lemme est démontrée; la seconde se démontre d'une manière analogue.

3. Soit $A(r \times n)$ une matrice horizontale $(r \leq n)$; on définit *la norme de la matrice* comme étant le déterminant:

$$N(A) = \det(AA^*). \tag{4}$$

Si l'on employe la notation habituelle pour les mineurs de la matrice A:

$$A\begin{pmatrix} j_1\, j_2 \cdots j_\alpha \\ i_1\, i_2 \cdots i_\alpha \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_\alpha} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_\alpha j_1} & a_{i_\alpha j_2} & \cdots & a_{i_\alpha j_\alpha} \end{vmatrix},$$

alors, d'après la formule de Cauchy–Binet on déduit de (4):

$$N(A) = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_r} A\begin{pmatrix} j_1\, j_2 \cdots j_r \\ 1\ 2 \cdots r \end{pmatrix} \cdot \bar{A}\begin{pmatrix} j_1\, j_2 \cdots j_r \\ 1\ 2 \cdots r \end{pmatrix}, \tag{5}$$

dans le second membre le second mineur étant complexe conjugué du premier et ou l'on doit faire la somme pour toutes les combinaisons $j_1, j_2, \cdots, j_r$ des nombres $1, 2, \cdots, n$ $(r \leq n)$.

Convenons de représenter par

$$A_{ij}\begin{pmatrix} l_1\, l_2 \cdots l_\alpha \\ k_1\, k_2 \cdots k_\alpha \end{pmatrix} \tag{6}$$

le complément algébrique de l'élément a_{ij} dans le mineur de la matrice A:

$$A\begin{pmatrix} l_1\, l_2 \cdots l_\alpha \\ k_1\, k_2 \cdots k_\alpha \end{pmatrix}$$

(i est égal à un nombre déterminé de la suite $k_1, k_2, \cdots, k_\alpha$ et j est égal à un nombre déterminé de le suite $l_1, l_2, \cdots, l_\alpha$).

Dans (5), développons dans le second membre le premier mineur suivant les éléments de la ligne de rang i, $(1 \leq i \leq r)$: $a_{ij_1}, a_{ij_2}, \cdots, a_{ij_r}$ en laissant le second mineur inchangé ; il vient, en tenant compte de la notation (6),

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} j_1 j_2 \cdots j_r \\ 1\ 2 \cdots r \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{r} a_{ij_s} \cdot \mathrm{A}_{ij_s}\begin{pmatrix} j_1 j_2 \cdots j_s \cdots j_r \\ 1\ 2 \cdots i \cdots r \end{pmatrix};$$

en remplaçant cette valeur dans (5) il vient

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{N}(\mathrm{A}) = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_r} \left\{ \bar{\mathrm{A}}\begin{pmatrix} j_1 j_2 \cdots j_r \\ 1\ 2 \cdots r \end{pmatrix} \cdot \left[\sum_{s=1}^{r} a_{ij_s} \mathrm{A}_{ij_s}\begin{pmatrix} j_1 j_2 \cdots j_r \\ 1\ 2 \cdots r \end{pmatrix} \right] \right\}$$
$$(1 \leq i \leq r).$$

Dans le second membre on choisit d'abord une combinaison déterminée $j_1 j_2 \cdots j_r$ (avec $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$) des nombres $1, 2, \cdots, n$, on fait la somme par rapport à s seulement pour la dernière parenthèse, et on répète la même opération pour toutes les combinaisons $j_1 j_2 \cdots j_r$ des nombres $1, 2, \cdots, n$ pris r à r.

Dans (7), laisson dans le second membre non développés les deux mineurs

$$\bar{\mathrm{A}}\begin{pmatrix} j_1 \cdots j_r \\ 1 \cdots r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_{ij_s}\begin{pmatrix} j_1 \cdots j_r \\ 1 \cdots r \end{pmatrix};$$

alors chaque terme contient un facteur de la forme a_{ij_s} et on peut arranger tous les termes de (7) suivant les éléments $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ de la ligne de rang i de A.

On peut obtenir formellement de (7) *un développement de la norme* N (A) *suivant les éléments de la ligne de rang i*

$$\text{(8)} \qquad \boxed{\mathrm{N}(\mathrm{A}) = a_{i1}\mathrm{B}_{i1} + \cdots + a_{ik}\mathrm{B}_{ik} + \cdots + a_{in}\mathrm{B}_{in}};$$

il est naturel, alors, d'appeler le coefficient B_{ik} de a_{ik} dans ce développement *le complément algébrique de a_{ik} dans* A.

On déduit de (7)

$$\text{(9)} \quad \mathrm{B}_{ij_s} = \Sigma\, \bar{\mathrm{A}}\begin{pmatrix} j_1 \cdots j_s \cdots j_r \\ 1 \cdots i \cdots r \end{pmatrix} \cdot \mathrm{A}_{ij_s}\begin{pmatrix} j_1 \cdots j_s \cdots j_r \\ 1 \cdots i \cdots r \end{pmatrix} \quad (j_1<j_2<\cdots<j_r;\ 1 \leq i \leq r),$$

où l'on donne a j_s une valeur déterminée $j_s = k$ telle que j_s représente une colonne déterminée de A ; dans la formule précédente on doit considérer toutes les combinaisons r à r : $j_1, j_2, \cdots, j_r$ des nombres $1, 2, \ldots, n$ *qui contiennent le nombre déterminé* $j_s = k$.

En posant $j_s = k$ ou déduit de (9) *la formule qui donne le complément algébrique* B_{ik} *de l'élément* a_{ik} *de la matrice* $\mathrm{A}(r \times n)$, où $r \leq n$,

$$\text{(10)} \quad \boxed{\begin{gathered} \mathrm{B}_{ik} = \sum_{\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{r-1}} \bar{\mathrm{A}}\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_{\varrho-1}\, k \alpha_\varrho \cdots \alpha_{r-1} \\ 1\ 2 \cdots\cdots\cdots\cdots r \end{pmatrix} \cdot \mathrm{A}_{ik}\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_{\varrho-1}\, k \alpha_\varrho \cdots \alpha_{r-1} \\ 1\ 2 \cdots\cdots\cdots\cdots r \end{pmatrix} \\ \alpha_1 < \cdots < \alpha_{\varrho-1} < k < \alpha_\varrho < \cdots < \alpha_{r-1}\ ;\quad 1 \leq i \leq r; \end{gathered}}$$

ici l'on fait la somme pour toutes les combinaisons r à r:

$$\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_{\varrho-1}\, k \alpha_\varrho \cdots \alpha_{r-1} \tag{11}$$

des nombres $1, 2, \cdots, n$ *qui contiennent le nombre* k et, dans le second membre, le second facteur représente le complément algébrique de l'élément a_{ik}, ce complément algébrique étant considéré dans un déterminant qui est le complexe conjugué du déterminant représenté par le premier facteur.

Si dans les combinaisons (11) on supprime le nombre k, on obtient les combinaisons $(r-1)$ à $(r-1)$ des nombres:

$$1, 2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n \tag{12}$$

qui sont au nombre de

$$\binom{n-1}{r-1}.$$

Par conséquent *dans la formule* (10) *on doit faire la somme en prenant pour* $\alpha_1, \cdots, \alpha_{\varrho-1}, \alpha_\varrho, \cdots, \alpha_{r-1}$ *toutes les combinaisons* $(r-1)$ *á* $(r-1)$ *des nombres* (12).

D'ailleurs, de (10) ou déduit que le complément algébrique B_{ik} se calcule par la règle suivante, qui est fort simple: *pour avoir le complément algébrique* B_{ik} *d'un élément* a_{ik} *de la matrice* $A(r \times n)$, $(r \leq n)$, *on considère tous les mineurs* δ_α *d'ordre* r *de* A *qui contiennent l'élément* a_{ik}:

$$\alpha = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{r-1}$$

et, dans chaque determinant δ_α, *on considère le complément algébrique* M_{ik}^α *de* a_{ik}; *on multiplie le mineur complexe conjugué* $\bar{\delta}_\alpha$ *par le complément algébrique* M_{ik}^α *et, en faisant la somme de tous les produits ainsi obtenus, ou trouve* B_{ik}.

Pratiquement, pour former tous les mineurs qui contiennent a_{ik}, on commence par former toutes les combinaisons des nombres (12) pris $(r-1)$ à $(r-1)$. À chaque combinaison $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{r-1}$ on ajoute le nombre k, on range ces nombres par ordre de grandeur croissante

$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots < k < \cdots < \beta_{r-1}$$

et on forme le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1\beta_1} \cdots a_{1k} \cdots a_{1\beta_{r-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i\beta_1} \cdots a_{ik} \cdots a_{i\beta_{r-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r\beta_1} \cdots a_{rk} \cdots a_{r\beta_{r-1}} \end{vmatrix};$$

on obtient ainsi tous les mineurs qui figurent dans la formule (10) et qui contiennent l'élément a_{ik}.

REMARQUES. – Si pour la matrice $A(r \times n)$, ou $r \leq n$, on a: rang $A < \min\{r, n\}$, alors $N(A) = 0$ et tous les compléments algébriques $B_{ik} = 0$.

Pour une matrice carrée A $(n \times n)$ on a:

$$B_{ik} = A_{ik} \det \bar{A}, \tag{12'}$$

ou A_{ik} est le complément algébrique habituel de a_{ik}.

4. Comme exemple, considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

et déterminons le complément algébrique B_{23} de l'élément a_{23}. On forme les combinaisons des nombres 1, 2, 4 pris deux à deux

$$12 \quad , \quad 14 \quad , \quad 24$$

et on ajoute à chacune le nombre 3; on obtient

$$123 \quad , \quad 134 \quad , \quad 234.$$

Donc les mineurs d'ordre 3 de A qui contiennent a_{23} sont:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} .$$

et, par l'application de la formule (10), il vient

$$B_{23} = - \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{13} & \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{24} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{24} \\ \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} .$$

5. Revenons à la formule (5), que nous écrirons

$$\sum_{j_1 < \cdots < j_r} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{pj_1} & a_{pj_2} & \cdots & a_{pj_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{qj_1} & a_{qj_2} & \cdots & a_{qj_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{rj_1} & a_{rj_2} & \cdots & a_{rj_r} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{a}_{1j_1} & \bar{a}_{1j_2} & \cdots & \bar{a}_{1j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{pj_1} & \bar{a}_{pj_2} & \cdots & \bar{a}_{pj_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{qj_1} & \bar{a}_{qj_2} & \cdots & \bar{a}_{qj_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{rj_1} & \bar{a}_{rj_2} & \cdots & \bar{a}_{rj_r} \end{vmatrix} = N(A).$$

Si dans le premier mineur nous remplaçons les éléments de la ligne de rang q par les éléments de la ligne de rang p, en laissant le second mineur inchangé, on obtient

$$\sum \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{pj_1} & a_{pj_2} & \cdots & a_{pj_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{pj_1} & a_{pj_2} & \cdots & a_{pj_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{rj_1} & a_{rj_2} & \cdots & a_{rj_r} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{a}_{1j_1} & \bar{a}_{1j_2} & \cdots & \bar{a}_{1j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{pj_1} & \bar{a}_{pj_2} & \cdots & \bar{a}_{pj_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{qj_1} & \bar{a}_{qj_2} & \cdots & \bar{a}_{qj_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{rj_1} & \bar{a}_{rj_2} & \cdots & \bar{a}_{rj_r} \end{vmatrix} = 0.$$

Effectuons les mêmes calculs qu'on a effectué plus haut pour passer de la formule (5) aux formules (8) et (9), c'est à dire: développons le premier mineur suivant les éléments de la ligne de rang q et arrangeons le résultat suivant les éléments de la ligne de rang q; on trouve au lieu de (8), la formule

$$a_{p1}\,B_{q1} + a_{p2}\,B_{q2} + \cdots + a_{pn}\,B_{qn} = 0. \tag{13}$$

De (8) et de (13) ou déduit que *les compléments algébriques* B_{ik} *vérifient les relations*

$$\boxed{a_{p1}\,B_{q1} + a_{p2}\,B_{q2} + \cdots + a_{pn}\,B_{qn} = \begin{cases} N(A) & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}}. \tag{14}$$

6. Pour une matrice horizontale $A(r \times n)$, $(r \leq n)$, les formules précédentes nous donnent la somme des produits obtenus eu multipliant les éléments d'une ligne par les compléments algébriques des éléments de la même ligne ou d'une ligne différente.

Faisons la même chose pour les colonnes et calculons la somme

$$a_{1p}\,B_{1q} + a_{2p}\,B_{2q} + \cdots + a_{rp}\,B_{rq}.$$

Si l'on calcule les coefficients algébriques $B_{1q}, B_{2q}, \cdots, B_{rq}$ avec la formule (10), on doit faire la somme en prenant pour $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\varrho-1}, \alpha_\varrho, \cdots, \alpha_{r-1}$ toutes les combinaisons des nombres

$$1, 2, \cdots, q-1, q+1, \cdots, n \tag{15}$$

pris $(r-1)$ à $(r-1)$ et, dans (10), on doit avoir $\alpha_1 < \cdots < \alpha_{\varrho-1} < q < \alpha_\varrho < \cdots < \alpha_{r-1}$.

On a, en tenant compte de (10):

$$\sum_{\lambda=1}^{r} a_{\lambda p}\,B_{\lambda q} = \tag{16}$$

$$= \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_{r-1}} \bar{A}\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_{\varrho-1}\, q\alpha_\varrho \cdots \alpha_{r-1} \\ 1\; 2 \cdots\cdots\cdots\cdots r \end{pmatrix} \left[\sum_{\lambda=1}^{r} a_{\lambda p}\,A_{\lambda q}\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_{\varrho-1}\, q\alpha_\varrho \cdots \alpha_{r-1} \\ 1\; 2 \cdots\cdots\cdots\cdots r \end{pmatrix}\right],$$

$$(\alpha_1 < \cdots < \alpha_{\varrho-1} < q < \alpha_\varrho < \cdots < \alpha_{r-1};\ 1 \leq p, q \leq n).$$

Considérons le mineur

$$A\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_{\varrho-1}\, q\alpha_\varrho \cdots \alpha_{r-1} \\ 1\; 2 \cdots\cdots\cdots\cdots r \end{pmatrix}; \tag{17}$$

dans la dernière parenthèse de (16) on fait la somme des produits obtenus en multipliant les éléments de la colonne de rang p de A, qui sont: $a_{1p}, a_{2p}, \cdots, a_{rp}$, avec les compléments algébrique des éléments de la colonne de rang ϱ du mineur (17); le résultat est évidemment le mineur

$$A\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_{\varrho-1}\, p\alpha_\varrho \cdots \alpha_{r-1} \\ 1\; 2 \cdots\cdots\cdots\cdots r \end{pmatrix}$$

qui se déduit de (17) en remplaçant les éléments de la colonne de rang ϱ du mineur (17) par les éléments de la colonne de rang p de A. Donc, de (16) il résulte

$$\sum_{\lambda=1}^{r} a_{\lambda p}\,B_{\lambda q} = \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_{r-1}} \bar{A}\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_{\varrho-1}\, q\alpha_\varrho \cdots \alpha_{r-1} \\ 1\; 2 \cdots\cdots\cdots\cdots r \end{pmatrix} \cdot A\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_{\varrho-1}\, p\alpha_\varrho \cdots \alpha_{r-1} \\ 1\; 2 \cdots\cdots\cdots\cdots r \end{pmatrix}.$$

Dans chacun des mineurs du second membre changeons la colonne de rang ρ successivement avec chaque colonne qui se trouve à sa gauche, jusqu'à l'amener à occuper la première place; par cela, le produit de ces deux mineurs se multiplie par $(-1)^{\rho-1}(-1)^{1-\rho}=1$, et on a:

$$
\boxed{\begin{gathered} a_{1p}\,B_{1q}+a_{2p}\,B_{2q}+\cdots+a_{rp}\,B_{rq}= \\ =\sum_{\alpha_1<\cdots<\alpha_{r-1}} A\begin{pmatrix} p\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_{r-1} \\ 1\,2\cdots\cdots i \end{pmatrix}\cdot\bar{A}\begin{pmatrix} q\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_{r-1} \\ 1\,2\cdots\cdots r \end{pmatrix}, \\ \alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{r-1} \end{gathered}} , \tag{18}
$$

où l'on fait le somme pour toutes les combinaisons $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$ des nombres (15) pris $(r-1)$ à $(r-1)$; mais, si une de ces combinaisons $\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}$ contient le nombre p, alors le mineur

$$
A\begin{pmatrix} p\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_{r-1} \\ 1\,2\cdots\cdots r \end{pmatrix}=0.
$$

Donc, si l'on représente par

$$
\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{p,q\} \tag{19}
$$

l'ensemble formé par les nombres $1, 2, \cdots, n$ duquel on a retiré les nombres p et q, il résulte que *dans* (18) *on doit faire la somme pour toutes les combinaisons* $\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}$ *des nombres* (19) *pris* $(r-1)$ *à* $(r-1)$.

7. Considérons maintenant une matrice horizontale $A\,(r\times n)$, de rang maximal $(r\leq n\,;\ \text{rang}\,A=r)$; alors on a de (5): $N(A)=\sum_i|\delta_i|^2$, où on fait la somme pour les carrés des modules de tous les mineurs d'ordre r de A; on déduit $N(A)\neq 0$.

Formons maintenant la matrice

$$
B=\frac{1}{N(A)}\begin{pmatrix} B_{11}\,B_{21}\cdots B_{r1} \\ B_{12}\,B_{22}\cdots B_{r2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{1n}\,B_{2n}\cdots B_{rn} \end{pmatrix} \tag{20}
$$

et calculons le produit AB

$$
AB=\frac{1}{N(A)}\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}\,a_{r2}\cdots a_{rn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_{11}\,B_{21}\cdots B_{r1} \\ B_{12}\,B_{22}\cdots B_{r2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{1n}\,B_{2n}\cdots B_{rn} \end{pmatrix};
$$

l'élément c_{pq} qui se trouve dans la ligne de rang p et dans la colonne de rang q de ce produit AB se calcule avec (14) et a la valeur

$$
c_{pq}=\frac{1}{N(A)}\,(a_{p1}\,B_{q1}+a_{p2}\,B_{q2}+\cdots+a_{pn}\,B_{qn})=\delta_p^\alpha
$$

(δ_p^α étant le symbole de Kronecker); donc $AB=E_r$, et la première des relations (2) est vérifiée.

Calculons maintenant le produit BA. En tenant compte de (18) on a

$$\gamma_{pq} = \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_{r-1}} A\begin{pmatrix} p\alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} \\ 1\;2 \cdots\cdots r \end{pmatrix} \cdot \bar{A}\begin{pmatrix} q\alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} \\ 1\;2 \cdots\cdots r \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{r-1}),$$

$$\gamma_{qp} = \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_{r-1}} A\begin{pmatrix} q\alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} \\ 1\;2 \cdots\cdots r \end{pmatrix} \cdot \bar{A}\begin{pmatrix} p\alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} \\ 1\;2 \cdots\cdots r \end{pmatrix}$$

$$(\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{r-1});$$

dans ces deux formules on doit faire la somme pour toutes les combinaisons des nombres (19) pris $(r-1)$ à $(r-1)$. On déduit $\gamma_{pq} = \bar{\gamma}_{qp}$; donc $(BA)^* = BA$, et la seconde des relations (2) est aussi vérifiée.

Donc: *étant donné une matrice* A $(r \times n)$, *qui est horizontale et de rang maximal* $(r \leq n$; *rang* $A = r)$ *on forme avec les compléments algébriques* B_{ik} *une matrice* $(n \times r)$ *et cette dernière matrice, divisée par la norme* N (A), *donne précisément l'inverse généralisée de E. H. Moore et A. Bjerhammar.*

Si la matrice A $(n \times n)$ est non-singulière, on a, d'après (12'), $B_{ik} = A_{ik} |\bar{A}|$ et $N(A) = |A| \cdot |\bar{A}|$; alors l'élément b_{ik} de la matrice B est $b_{ik} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{ik}$ et par conséquent $B = A^{-1}$.

Pour une matrice A $(n \times r)$ qui est *verticale* et *de rang maximal* $(n \geq r$; rang $A = r)$, le même problème se résout d'une manière analogue et les modifications à introduire dans les formules sont faciles à établir.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. H. MOORE, *General Analysis*, Part. I, «Mem. Amer. Philos. Soc.», vol. I, pp. 197–209 (1935).

[2] A. BJERHAMMAR, *Rectangular reciprocal matrices with special references to geodetic calculation*, « Bull. Géodesique », pp. 188–220 (1951).

[3] R. PENROSE, *A generalized inverse for matrices*, « Proc. Cambridge Philos. Soc. », vol. 51, pp. 406–413 (1955).

[4] R. RADO, *Note on generalized inverse of matrices*, Ibid., vol. 52, pp. 600–601 (1956).

[5] T. N. E. GREVILLE, *Some applications of the pseudoinverse of a matrix*, « SIAM Review », vol. 2, nr. 1, p. 16 (1960).

[6] M. STOJAKOVIC, *Determinanten rechteckiger Matrizen*, « Bull. de la Soc. de Math. et Phys. de la R. P. de Serbie », nr. 1–2 (1952).

[7] M. STOJAKOVIC, *Sur les matrices quasi-inverses et les matrices unités*, «C. R. de l'Ac. des Sci., Paris », t. 236, pp. 877–879 (1953).