Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luigi Amerio

Su un teorema di minimax per le equazioni differenziali astratte

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.6, p. 409–416.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_409_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Analisi matematica. — *Su un teorema di minimax per le equazioni differenziali astratte* [*]. Nota [**] del Corrisp. LUIGI AMERIO.

1. Nella presente Nota è dato un ampliamento delle condizioni di validità di un teorema di minimax, dimostrato dapprima per l'equazione delle onde [1] ed esteso successivamente ad equazioni lineari differenziali astratte [2].

Si possono così migliorare i conseguenti enunciati, relativi all'esistenza di soluzioni debolmente quasi–periodiche (d.q.p.) o quasi–periodiche [3] (q.p.).

Siano X e Y due spazi di Hilbert: $X \subseteq Y$, denso in Y e con immersione continua. Sia poi J l'intervallo $-\infty < \eta < +\infty$.

Consideriamo l'equazione lineare astratta

$$Q(x\,;h) = \int_J (f(\eta)\,,h(\eta))_Y\,d\eta \tag{1,1}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} Q(x\,;h) = \int_J \{(x'(\eta)\,,h'(\eta))_Y - (A(\eta)\,x(\eta)\,,h(\eta))_X + \\ + (B(\eta)\,x'(\eta)\,,h(\eta))_X\}\,d\eta\,. \end{aligned} \tag{1,2}$$

Nella (1,2) $A(\eta)$ e $B(\eta)$ sono operatori limitati, $\forall \eta \in J$: precisamente $A(\eta) \in \mathfrak{L}(X\,,X) = \mathfrak{A}$, $B(\eta) \in \mathfrak{L}(Y\,,X) = \mathfrak{B}$. Si ammetterà inoltre che $A(\eta)$ e $B(\eta)$ siano funzioni continue di η, nelle rispettive topologie uniformi.

Nelle (1,1), (1,2) le derivate si intendono nel senso delle distribuzioni e le funzioni $x(\eta)$ (incognita), $h(\eta)$ (funzione di confronto), $f(\eta)$ (termine noto) soddisfano, $\forall$ compatto Δ, alle condizioni seguenti:

$$\begin{cases} x(\eta)\,,h(\eta) \in L^2(\Delta\,,X) \\ x'(\eta)\,,h'(\eta)\,,f(\eta) \in L^2(\Delta\,,Y)\,. \end{cases} \tag{1,3}$$

Inoltre $h(\eta)$ è a supporto compatto e la (1,1) deve essere soddisfatta per ogni funzione di confronto $h(\eta)$.

(*) Istituto Matematico del Politecnico di Milano. Gruppo di ricerca n. 12 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1962–63.

(**) Presentata nella seduta del 14 dicembre 1963.

(1) L. AMERIO, *Problema misto e quasi–periodicità per l'equazione delle onde non omogenea*, «Ann. di Mat.», *39* (1960).

(2) L. AMERIO, *Sulle equazioni lineari quasi–periodiche negli spazi hilbertiani*, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», *31* (1961), Note I e II.

(3) L. AMERIO, *Soluzioni quasi–periodiche di equazioni quasi–periodiche negli spazi hilbertiani*, «Ann. di Mat.», *61* (1963).

Indichiamo con Δ_p l'intervallo $|\eta| \leq p + \frac{1}{2}$, $p = 0, 1, \cdots$, e con W_p lo spazio hilbertiano formato dalle funzioni $g = \{g(\eta) ; \eta \in \Delta_p\}$ tali che sia

$$(1,4) \qquad \begin{cases} g(\eta) \in L^2(\Delta_p, X) = L_p^2(X) \\ g'(\eta) \in L^2(\Delta_p, Y) = L_p^2(Y) . \end{cases}$$

Si osservi che, se $x(\eta)$ soddisfa alle (1,3), allora la stessa x definisce una funzione a valori in W_0, che indicheremo con $x(t)$, $t \in J$, ponendo

$$x(t) = \{x(t+\eta) ; \eta \in \Delta_0\}$$

e quindi

$$\|x(t)\|_{W_0} = \{\int_{\Delta_0} \|x(t+\eta)\|_X^2 \, d\eta + \int_{\Delta_0} \|x'(t+\eta)\|_Y^2 \, d\eta\}^{1/2} .$$

Ne segue, per le (1,3), che $x(t)$ è W_0 – continua, risulta cioè

$$\lim_{\tau \to 0} \|x(t+\tau) - x(t)\|_{W_0} = 0 .$$

Analoghe considerazioni valgono per $h(t)$ ed $f(t)$: in particolare, per la seconda delle (1,3), $f(t)$ è $L_0^2(Y)$–continua:

$$\lim_{\tau \to 0} \|f(t+\tau) - f(t)\|_{L_0^2(Y)} = \lim_{\tau \to 0} \{\int_{\Delta_0} \|f(t+\tau+\eta) - f(t+\eta)\|_Y^2 \, d\eta\}^{1/2} = 0 .$$

Chiameremo ancora $x(t)$, $h(t)$, $f(t)$ soluzione, funzione di confronto, termine noto della (1,1).

2. Sia $z(t)$ una funzione W_0–limitata (risulti cioè $\sup_{t \in J} \|z(t)\|_{W_0} < +\infty$).

Posto

$$(2,1) \qquad \varphi(z ; \tau) = \sup_{t \in J} \|z(t+\tau) - z(t)\|_{W_0} ,$$

diciamo Λ_z l'insieme delle funzioni $x(t)$ W_0–limitate e tali che sia

$$(2,2) \qquad \varphi(x ; \tau) \leq \varphi(z ; \tau) \qquad \forall \tau \in J .$$

Siano poi: $\Lambda_{z,Q,f}$ l'insieme delle soluzioni $x(t)$ della (1,1) appartenenti a Λ_z; $\Lambda_{z,Q}$ l'insieme delle autosoluzioni $u(t)$ dell'equazione omogenea

$$(2,3) \qquad Q(u ; h) = 0$$

le quali siano differenze di funzioni $\in \Lambda_{z,Q,f}$. Gli insiemi Λ_z, $\Lambda_{z,Q,f}$, $\Lambda_{z,Q}$ (al quale si aggiunga la soluzione nulla) sono *convessi*.

È chiaro infine che, se la (1,1) ammette una soluzione, $\bar{x}(t)$, W_0–limitata, l'insieme $\Lambda_{\bar{x},Q,f}$ non è vuoto.

Ciò premesso, si dimostra il seguente *teorema di minimax*.

I. – *Siano soddisfatte le ipotesi:*

α') esiste una funzione $z(t)$, W_0*–limitata, tale che l'insieme* $\Lambda_{z,Q,f}$ *non sia vuoto;*

β') $\forall u(t) \in \Lambda_{z,Q}$ *risulta*

(2,4) $$\operatorname*{Inf}_{t \in J} \| u(t) \|_{W_0} > 0 .$$

Posto allora, $\forall x(t) \in \Lambda_{z,Q,f}$,

$$\mu(x) = \operatorname*{Sup}_{t \in J} \| x(t) \|_{W_0}$$

$$\tilde{\mu} = \operatorname*{Inf}_{\Lambda_{z,Q,f}} \mu(x)$$

esiste, in $\Lambda_{z,Q,f}$, *una e una sola soluzione,* $\tilde{x}(t)$, *tale che risulti*

$$\mu(\tilde{x}) = \tilde{\mu}.$$

Dimostriamo, dapprima, l'unicità della minimante. Ammessa, per assurda ipotesi, l'esistenza, in $\Lambda_{z,Q,f}$, di una seconda minimante, $x^*(t) \not\equiv \tilde{x}(t)$, risulta

$$\mu(\tilde{x}) = \mu(x^*) = \tilde{\mu}$$

e inoltre la differenza

$$u(t) = \tilde{x}(t) - x^*(t)$$

appartiene a $\Lambda_{z,Q}$. Dalla condizione β') segue allora, $\forall t \in J$,

$$\| \tilde{x}(t) - x^*(t) \|_{W_0} \geq \delta > 0$$

e quindi

$$\| \tilde{x}(t) - x^*(t) \|_{W_0} \geq \frac{\delta}{\tilde{\mu}} \max \{ \| \tilde{x}(t) \|_{W_0}, \| x^*(t) \|_{W_0} \}$$

da cui, per il teorema del parallelogramma,

$$\left\| \frac{\tilde{x}(t) + x^*(t)}{2} \right\|_{W_0} \leq \left(1 - \frac{\delta^2}{4\tilde{\mu}^2}\right)^{1/2} \max \{ \| \tilde{x}(t) \|_{W_0}, \| x^*(t) \|_{W_0} \} \leq \left(1 - \frac{\delta^2}{4\tilde{\mu}^2}\right)^{1/2} \tilde{\mu} .$$

Risulta pertanto

$$\mu\left(\frac{\tilde{x} + x^*}{2}\right) < \tilde{\mu} ,$$

ciò che è assurdo: infatti $\dfrac{\tilde{x}(t) + x^*(t)}{2}$ soddisfa alla (1,1) ed appartiene a $\Lambda_{z,Q,f}$, poiché tale insieme è convesso.

Dimostriamo ora l'esistenza della minimante, $\tilde{x}(t)$.

Sia $\{ x_n(t) \}$ una successione minimizzante per il funzionale $\mu(x)$, in $\Lambda_{z,Q,f}$: precisamente risulti

(2,5) $$\tilde{\mu} \leq \mu(x_n) = \tilde{\mu} + \varepsilon_n \quad , \quad 0 \leq \varepsilon_n \leq 1 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0 .$$

Si osservi che, considerata nell'intervallo Δ_p, la funzione $x_n(\eta)$ appartiene a W_p e che dalla prima e dalla seconda delle (2,5) segue

(2,6) $$\| x_n \|_{W_p} \leq (\tilde{\mu} + 1) \sqrt{2p + 1} \, .$$

Si può pertanto estrarre da $x_n(\eta)$, $\eta \in J$, una sottosuccessione (che diremo ancora $\{x_n(\eta)\}$) la quale W_p–converga debolmente, $\forall\, p$.

Posto allora,

$$\tilde{x}(\eta) \underset{W_p}{=} \lim_{n\to\infty}{}^* x_n(\eta) \qquad (p = 0, 1, \cdots) \tag{2,7}$$

la funzione limite $\tilde{x}(\eta) \in W_p$, $\forall\, p$.

Preso, ad arbitrio, un intervallo limitato Δ, sia W_Δ lo spazio hilbertiano formato dalle funzioni $g(\eta) \in L^2(\Delta, X)$, con $g'(\eta) \in L^2(\Delta, Y)$.

Risulta allora, per $\Delta_p \supseteq \Delta$, $x \in W_p$,

$$|(x, g)_{W_\Delta}| \leq \|x\|_{W_p} \|g\|_{W_\Delta}$$

e quindi

$$(x, g)_{W_\Delta} = (x, \mathfrak{K}_{p,\Delta}\, g)_{W_p}$$

con $\mathfrak{K}_{p,\Delta}$ operatore limitato, da W_Δ in W_p.

Ne segue, per la (2,7),

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, g)_{W_\Delta} = (\tilde{x}, g)_{W_\Delta},$$

cioè la successione $x_n(\eta)$ W_Δ – converge debolmente a $\tilde{x}(\eta)$, $\forall\,\Delta$.

Fissato t in J e considerato l'intervallo $\Delta = \left[t - \frac{1}{2} \leq \eta \leq t + \frac{1}{2}\right]$ risulta allora, $\forall g \in W_0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Delta_0} \{(x_n(t+\eta), g(\eta))_X + (x_n'(t+\eta), g'(\eta))_Y\}\, d\eta = \tag{2,8}$$

$$= \int_{\Delta_0} \{(\tilde{x}(t+\eta), g(\eta))_X + (\tilde{x}'(t+\eta), g'(\eta))_Y\}\, d\eta .$$

Si ha pertanto, $\forall t \in J$,

$$\lim_{n\to\infty}{}^* x_n(t) \underset{W_0}{=} \tilde{x}(t). \tag{2,9}$$

Ne segue, per la terza delle (2,5),

$$\|\tilde{x}(t)\|_{W_0} \leq \min \lim_{n\to\infty} \|x_n(t)\|_{W_0} \leq \tilde{\mu}$$

e quindi

$$\operatorname*{Sup}_{t\in J} \|\tilde{x}(t)\|_{W_0} \leq \tilde{\mu}. \tag{2,10}$$

Osserviamo ora che, preso $p \geq 0$ e ammesso che il supporto della funzione di confronto $h(\eta)$ appartenga all'intervallo Δ_p, l'integrale $Q(x; h)$ è, in W_p, una forma lineare continua della variabile x. È allora, per la (2,7),

$$\lim_{n\to\infty} Q(x_n, h) = Q(\tilde{x}, h)$$

cioè $\tilde{x}(\eta)$ è soluzione della (1,1).

Si ha infine ($\forall t, \tau \in J$)

$$\tilde{\tilde{x}}(t+\tau) - \tilde{\tilde{x}}(t) = \lim_{W_0\ n\to\infty}{}^{*} \{x_n(t+\tau) - x_n(t)\}$$

e quindi

$$\| \tilde{\tilde{x}}(t+\tau) - \tilde{\tilde{x}}(t) \|_{W_0} \leq \min \lim_{n\to\infty} \| x_n(t+\tau) - x_n(t) \|_{W_0} \leq \min \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n; \tau) \leq \varphi(z; \tau)$$

poiché $x_n \in \Lambda_{z,Q,f}$.

Ne segue

$$\varphi(\tilde{\tilde{x}}; \tau) \leq \varphi(z; \tau)$$

cioè $\tilde{\tilde{x}} \in \Lambda_{z,Q,f}$.

È allora, necessariamente,

$$\mu(\tilde{\tilde{x}}) = \tilde{\tilde{\mu}}$$

e il teorema risulta dimostrato.

3. Siano: Γ l'insieme delle funzioni $z(t)$ W_0–limitate, $\Gamma_{Q,f}$ l'insieme delle soluzioni $x(t)$ W_0–limitate della (1,1), Γ_Q l'insieme delle autosoluzioni $u(t)$ W_0–limitate dell'equazione omogenea (2,3).

Vale allora il seguente *teorema di minimax* (la cui dimostrazione si ottiene, con ovvie semplificazioni, da quella del teorema I).

I_Γ. – *Siano soddisfatte le ipotesi:*

α_Γ) *la* (1,1) *ammette una soluzione* W_0*–limitata* (cioè l'insieme $\Gamma_{Q,f}$ non è vuoto);

β_Γ) $\forall u(t) \in \Gamma_Q$ *risulta*

$$\operatorname*{Inf}_{t\in J} \| u(t) \|_{W_0} > 0. \tag{3,1}$$

Posto allora, $\forall x(t) \in \Gamma_{Q,f}$,

$$\mu(x) = \operatorname*{Sup}_{t\in J} \| x(t) \|_{W_0}$$

$$\tilde{\tilde{\mu}} = \operatorname*{Inf}_{\Gamma_{Q,f}} \mu(x),$$

esiste, in $\Gamma_{Q,f}$, *una e una sola soluzione,* $\tilde{\tilde{x}}(t)$, *tale che risulti*

$$\mu(\tilde{\tilde{x}}) = \tilde{\tilde{\mu}}.$$

Il teorema I_Γ allarga le condizioni di validità del teorema di minimax dimostrato in [2], perché sostituisce l'ipotesi (3,1) all'ipotesi, notevolmente più restrittiva,

$$\operatorname*{Inf}_{t\in J} \| u(t) \|_{W_0} \geq \sigma \operatorname*{Sup}_{t\in J} \| u(t) \|_{W_0}$$

con $\sigma > 0$ *indipendente* da $u(t)$. Non si dimostra, d'altra parte, la W_0–convergenza uniforme in J della successione minimizzante $\{x_n(t)\}$, ma, al fine di provare l'esistenza di una soluzione q.p. (cfr. il § 5), è sufficiente il teorema I.

4. *Supporremo*, in questo § e nel seguente, *che gli operatori* $A(\eta)$ *e* $B(\eta)$ *siano q.p., come funzioni a valori nei rispettivi spazi di Banach* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{B}$. *Si ammetterà inoltre che* $f(t)$ *sia* $L^2_0(Y)$*–d.q.p.*, cioè che il prodotto scalare

$$(f(t)\,,g)_{L^2_0(Y)} = \int_{\Delta_0} (f(t+\eta)\,,g(\eta))_Y\,d\eta$$

sia funzione q.p. (nel senso di Bohr), $\forall g \in L^2_0(Y)$.

Indicheremo con $l = \{l_n\}$ una generica successione *regolare*, tale cioè che risulti, uniformemente in J,

$$(4,1)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} A(\eta + l_n) \underset{\mathfrak{A}}{=} A_l(\eta) \\ \lim\limits_{n\to\infty} B(\eta + l_n) \underset{\mathfrak{B}}{=} B_l(\eta) \\ \lim\limits_{n\to\infty}{}^{*} f(t + l_n) \underset{L^2_0(Y)}{=} f_l(t)\,. \end{cases}$$

È noto (criterio di Bochner) che ogni sottosuccessione reale $d = \{d_n\}$ contiene una sottosuccessione regolare. Inoltre $A_l(\eta)$, $B_l(\eta)$, $f_l(t)$ risultano, rispettivamente, $\mathfrak{A}$–q.p., $\mathfrak{B}$–q.p., $L^2_0(Y)$–d.q.p.

Consideriamo, infine, la famiglia di equazioni

$$(4,2)\qquad Q_l(x\,;h) = \int_J (f_l(\eta)\,,h(\eta))_Y\,d\eta\,,$$

essendo

$$(4,3)\qquad Q_l(x\,;h) = \int_J \{(x'(\eta)\,,h'(\eta))_Y - (A_l(\eta)\,x(\eta)\,,h(\eta))_X + (B_l(\eta)\,x'(\eta)\,,h(\eta))_X\}\,d\eta\,.$$

Si possono allora dimostrare, per l'equazione (1,1), dei teoremi di esistenza di soluzioni d.q.p. o q.p. ampliando le condizioni date in [2] e nel successivo lavoro [3].

Osserviamo, innanzi tutto, che *se la* (1,1) *ammette una soluzione*, $\bar{x}(t)$, W_0*–limitata, l'equazione* (4,2) *ammette una soluzione*, $\bar{x}_l(t)$, W_0*–limitata, per la quale risulta*

$$(4,4)\qquad \begin{cases} \sup\limits_{t\in J} \|\bar{x}_l(t)\|_{W_0} \le \sup\limits_{t\in J} \|\bar{x}(t)\|_{W_0} \\ \sup\limits_{t\in J} \|\bar{x}_l(t+\tau) - \bar{x}_l(t)\|_{W_0} \le \sup\limits_{t\in J} \|\bar{x}(t+\tau) - \bar{x}(t)\|_{W_0}\,. \end{cases}$$

Basta infatti considerare la successione $\{\bar{x}(\eta + l_n)\}$, come in [2], pp. 197–200. Si può estrarre da $\{l_n\}$ una sottosuccessione (indicata ancora con $\{l_n\}$) tale che risulti, $\forall t \in J$,

$$(4,5)\qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*}\, \bar{x}(t + l_n) \underset{W_0}{=} \bar{x}_l(t)$$

e si dimostra che la funzione limite $\bar{x}_l$ soddisfa alla (4,2).

Dalla (4,5) seguono immediatamente le (4,4), cioè le disuguaglianze

$$\left\{\begin{array}{l}\mu(\bar{x}_l) \leq \mu(\bar{x}) \\ \varphi(\bar{x}_l\,;\tau) \leq \varphi(\bar{x}\,,\tau)\,.\end{array}\right. \tag{4,6}$$

Pertanto *l'insieme* $\Lambda_{\bar{x},Q_l,f_l}$ *non è vuoto,* $\forall$ *successione regolare l.*

Ciò premesso vale il teorema seguente (*di* W_0*-quasi-periodicità debole*).

II. – *Siano soddisfatte le ipotesi:*

α'') *la* (1,1) *ammette una soluzione,* $\bar{x}(t)$, W_0*-limitata* (*sicché,* $\forall l = \{l_n\}$ *regolare, l'insieme* $\Lambda_{\bar{x},Q_l,f_l}$ *non è vuoto*);

β'') $\forall u(t) \in \Lambda_{\bar{x},Q_l}$ (*e* $\forall$ *successione l, regolare*) *risulta*

$$\operatorname*{Inf}_{t\in J} \| u(t) \|_{W_0} > 0\,. \tag{4,7}$$

Allora la soluzione $\tilde{x}(t)$, *minimante nell'insieme* $\Lambda_{\bar{x},Q,f}$, *è d.q.p.*

La dimostrazione si svolge come in [2]. Basta provare che, presa ad arbitrio una successione reale $k = \{k_n\}$, si può estrarre una sottosuccessione $l = \{l_n\}$ tale che la successione $\{\tilde{x}(t + l_n)\}$ W_0 – converga debolmente, uniformemente in J: detta $\tilde{x}_l(t)$ la funzione limite dovrà perciò essere, $\forall g \in W_0$,

$$\lim_{n\to\infty} (\tilde{x}(t + l_n)\,, g)_{W_0} = (\tilde{x}_l(t)\,, g)_{W_0} \tag{4,8}$$

uniformemente in J.

Ora, ragionando come per le (4,4), (4,5), (4,6), si trova, $\forall t \in J$,

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\, \tilde{x}(t + l_n) \underset{W_0}{=} \tilde{x}_l(t) \tag{4,9}$$

e quindi

$$\left\{\begin{array}{l}\mu(\tilde{x}_l) \leq \mu(\tilde{x}) \\ \varphi(\tilde{x}_l;\tau) \leq \varphi(\tilde{x}\,;\tau)\,.\end{array}\right. \tag{4,10}$$

Inoltre nelle (4,10) vale, necessariamente, il segno $=$.

Consideriamo, infatti, la successione $-l = \{-l_n\}$: si può senz'altro supporre che sia, $\forall t \in J$,

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\, \tilde{x}_l(t - l_n) \underset{W_0}{=} y(t)\,,$$

con $y(t)$ soluzione della (1,1) tale che risulti

$$\mu(y) \leq \mu(\tilde{x}_l) \leq \mu(\tilde{x})$$

$$\varphi(y\,;\tau) \leq \varphi(\tilde{x}_l\,;\tau) \leq \varphi(\tilde{x}\,;\tau)\,.$$

Perciò $y(t) \in \Lambda_{\bar{x},Q,f}$ ed essendo, in tale insieme, unica la minimante, segue $y = \tilde{x}$, e quindi

$$\mu(\tilde{x}_l) = \mu(\tilde{x})$$

$$\varphi(\tilde{x}_l\,;\tau) = \varphi(\tilde{x}\,;\tau)\,.$$

Per il teorema I, esiste ed è unica la minimante $z_l(t)$ del funzionale $\mu(x)$ in $\Lambda_{\bar{x},Q_l,f_l}$. Non può inoltre essere $\mu(z_l) < \mu(\tilde{\bar{x}}_l)$ perchè si dedurrebbe, come precedentemente, l'esistenza di una soluzione z, in $\Lambda_{\bar{x},Q,f}$, con $\mu(z) < \mu(\tilde{\bar{x}})$, ciò che è assurdo. È allora $\mu(z_l) = \mu(\tilde{\bar{x}}_l)$ e quindi $z_l(t) = \tilde{\bar{x}}_l(t)$.

Infine, utilizzando, come in [2], un ragionamento di Favard, si dimostra che la (4,9) vale uniformemente in J.

5. *Supponiamo che la* (1,1) *ammetta una soluzione*, $\bar{x}(t)$, W_0*–limitata e* W_0*–uniformemente continua.*

In tal caso anche la minimante $\tilde{\bar{x}}(t)$, *in* $\Lambda_{\bar{x},Q,f}$, *risulta uniformemente continua.*

Si ha infatti

$$\varphi(\tilde{\bar{x}}\,;\tau) \leq \varphi(\bar{x}\,;\tau)$$

e, per l'uniformemente continuità di $\bar{x}(t)$, è

$$\lim_{\tau\to 0} \varphi(\bar{x}\,;\tau) = 0.$$

Ne segue

$$\lim_{\tau\to 0} \varphi(\tilde{\bar{x}}\,;\tau) = 0,$$

sicché $\tilde{\bar{x}}(t)$ risulta uniformemente continua.

Ciò posto, vale per la minimante $\tilde{\bar{x}}(t)$ il seguente teorema (*di* W_0*–quasi–periodicità forte*).

III. – *Siano soddisfatte le ipotesi:*

α''') *la* (1,1) *ammette una soluzione*, $\bar{x}(t)$, W_0*–limitata e* W_0*–uniformemente continua;*

β''') $\forall u(t) \in \Lambda_{\bar{x},Q_l}$ *(e* $\forall$ *successione* l, *regolare) risulta*

$$\operatorname*{Inf}_{t\in J} \| u(t) \|_{W_0} > 0;$$

γ''') *l'immersione di* X *in* Y *è completamente continua;*

δ''') *vale*, $\forall x \in W_0$, *la condizione (di ellitticità)*

$$R\,(A(t)\,x\,,\,x)_{W_0} \geq m \,\| x \|^2_{W_0} \qquad (m > 0).$$

Allora la soluzione $\tilde{\bar{x}}(t)$, *minimante in* $\Lambda_{\bar{x},Q,f}$, *risulta* W_0*–q.p.*

La tesi si deduce, come in [3], dal teorema di compattezza, dimostrato in [3].