
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CARLO FERRARI, JOSEPH H. CLARKE

Nuova determinazione della fotoionizzazione a monte di un onda d'urto intensa

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.6, p. 417–424.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_417_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Gasdinamica. — *Nuova determinazione della fotoionizzazione a monte di un'onda d'urto intensa.* Nota (*) di CARLO FERRARI e JOSEPH H. CLARKE, presentata (**) dal Socio C. FERRARI.

INTRODUZIONE. — Applichiamo le equazioni generali indicate nella Nota precedente in questi « Rendiconti » [2] alla determinazione dell'effetto ionizzante delle radiazioni a monte di un'onda d'urto retta stazionaria di forte intensità, nelle condizioni e colle ipotesi già considerate in [1] per lo studio dello stesso problema: precisamente, ammettiamo che

1° a monte del fronte d'urto il gas sia sufficientemente rarefatto, ed il grado di ionizzazione α abbastanza piccolo perché la ricombinazione per collisione possa essere trascurata rispetto a quella indotta dalle riadiazioni (il che comporta che i tempi caratteristici, indicati in [1] e [2] con τ_{nr} e con τ_{nc} soddisfino alla disuguaglianza $\tau_{nr} \ll \tau_{nc}$);

2° la temperatura delle radiazioni T_r (come definita in [1] e [2]) nella regione sopra indicata sia molto più grande della temperatura T del gas, così che la ionizzazione per collisione sia trascurabile rispetto a quella dovuta alle radiazioni;

3° detta temperatura T_r in corrispondenza del fronte d'onda sia da considerare come nota, uguale al valore della temperatura del gas, dietro all'onda, in condizioni di equilibrio termodinamico;

4° si suppone infine che sia $\alpha \ll 1$; che la velocità u del fluido, relativa a un sistema di assi solidale al fronte d'onda, essendo l'asse x orientato nel senso del flusso relativo all'onda, si possa considerare, a monte di questa, costante e uguale alla velocità u_1 di propagazione dell'onda nel fluido in quiete; e che densità ρ , pressione p , e T abbiano a monte dell'urto variazioni abbastanza piccole perché dette variazioni possano essere trascurate.

I. INTEGRALE PRIMO DELL'EQUAZIONE DI TRASPORTO DELL'ENERGIA RAGGIANTE. — Sia Φ^* la funzione di T_r definita in [2] e data dalla

$$(1) \quad \Phi^* = (T_j/T_{r_0}) \mathfrak{F}(T_r/T_j) \exp\left(-T_j/T_r \frac{T_{r_0} - T_r}{T_{r_0}}\right)$$

essendo T_j la temperatura caratteristica di ionizzazione; T_{r_0} la temperatura di riferimento delle radiazioni, che assumiamo uguale al valore di T_r sul fronte d'onda;

$$\mathfrak{F}(X) = X(1 + 5X + 20X^2 + 60X^3 + 120X^4 + 120X^5).$$

(*) Questo lavoro è stato fatto sotto il patrocinio della « Advanced Research Projects Agency – Ballistic Missile Defense Office (Fluids Dynamics Branch dello “Office of Naval Research” U. S. Navy), ed in parte dello “Applied Physics Laboratory” della “Johns Hopkins University” Contract NOW 62-0604-c col Bureau of Naval Weapons ».

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1963.

Nelle condizioni specificate nella introduzione, le condizioni al contorno per α e Φ^* risultano

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per } x \rightarrow -\infty, \alpha = 0; \frac{d\Phi^*}{dx} \sim \frac{dT_r}{dx} \rightarrow 0 \\ \text{per } x = 0, \Phi^* = (\Phi^*)_{T_r = T_{r_0}} = (\Phi^*)_0 = 1 + 5 \frac{T_{r_0}}{T_j} + 20 \frac{T_{r_0}^2}{T_j^2} + \\ \quad + 60 \frac{T_{r_0}^3}{T_j^3} + 120 \frac{T_{r_0}^4}{T_j^4} + 120 \frac{T_{r_0}^5}{T_j^5} \cdot \end{array} \right.$$

L'equazione di *continuità degli ioni* (eq. (21) di [2]) assume ora la forma

$$(3) \quad \frac{d}{dx} (\rho^* \alpha u) = (l_3 / \tau_{ir}) l_3^{-1} \left\{ -B\alpha^2 \rho^{*2} (T_0/T)^{1/2} + (1 - \alpha) (T_r/T_{r_0}) \rho^* \times \right. \\ \left. \times \exp \left[(T_j/T_{r_0}) \left(1 - \frac{T_{r_0}}{T_r} \right) \right] \right\}$$

dove l_3 è la *lunghezza caratteristica* del trasporto di energia raggiante definita dalla (23) di [2], e B e τ_{ir} sono pure definite dalle (22) e (23) di [2]. Conseguentemente l'*equazione di trasporto della energia raggiante* (eq. (24) di [2]) può essere scritta sotto la forma

$$(4) \quad \frac{d}{dx} (\rho^* \alpha u) = (l_3 / \tau_{ir}) l_3^{-1} 2^4 \times 3^{-1} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\rho^* (1 - \alpha)} \frac{d}{dx} \Phi^* \right]$$

essendo ancora (come in [2]) $\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}$ e ρ_0 la densità di riferimento, che assumiamo ora uguale alla densità del gas all'infinito a monte.

Deduciamo perciò subito l'*integrale primo dell'equazione di trasporto della energia raggiante*

$$(5) \quad \rho^* \alpha u = \left(\frac{l_3}{\tau_{ir}} \right) l_3^{-1} 2^4 \times 3^{-1} \frac{1}{\rho^* (1 - \alpha)} \frac{d}{dx} \Phi^* + \text{costante}.$$

Nel problema ora in esame, per le condizioni al contorno sopra date, la costante è da porsi uguale a zero, mentre per le ipotesi fatte nella introduzione possiamo trascrivere la (5) nella forma

$$(5') \quad \alpha u_1 = (l_3 / \tau_{ir}) l_3^{-1} 2^{-4} \times 3^{-1} \frac{d}{dx} \Phi^*.$$

2. LEGGI DI VARIAZIONE DELLA TEMPERATURA DELLE RADIAZIONI E DEL GRADO DI IONIZZAZIONE A MONTE DELL'ONDA. - D'altra parte, per le ipotesi sopra ricordate, la eq. (24) di [2], si riduce alle

$$(6) \quad \frac{d^2 \Phi^*}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{T_j}{T_{r_0}} \bar{\sigma} (T_r/T_j) \exp \left[(T_j/T_{r_0}) (1 - T_{r_0}/T_r) \right] \right\} = \\ = 3 \times 2^{-4} l_3^{-2} (T_r/T_{r_0}) \exp \left[(T_j/T_{r_0}) \left(1 - \frac{T_{r_0}}{T_r} \right) \right].$$

Poniamo

$$(7) \quad x^* = \frac{x}{l_3} ; f(\Phi^*) = \frac{T_r}{T_{r_0}} \exp \left[(T_j/T_{r_0}) \left(1 - \frac{T_{r_0}}{T_r} \right) \right].$$

Risulta

$$f(\Phi^*) = \frac{\Phi^*}{1 + 5 \frac{T_r}{T_j} + 20 \frac{T_r^2}{T_j^2} + 60 \frac{T_r^3}{T_j^3} + 120 \frac{T_r^4}{T_j^4} + 120 \frac{T_r^5}{T_j^5}}$$

ed i diagrammi che danno la legge di variazione di $Z = f(\Phi^*)$ con Φ^* per diversi valori di (T_{r_0}/T_j) sono dati nella fig. 1: appare che per un intervallo abbastanza esteso dei valori di (T_r/T_j) è molto approssimativamente

$$(8) \quad f(\Phi^*) = \text{cost.} \cdot \Phi^* = a \Phi^* \cong \Phi^*/\Phi_0^*.$$

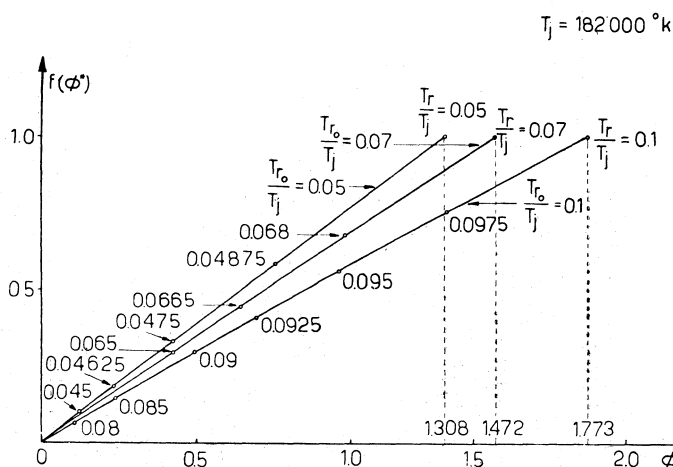


Fig. 1. - Legge di variazione di $f(\Phi^*)$ con Φ^* per differenti valori di T_{r_0}/T_j (in Argon).

Dalla (6) deduciamo

$$(9) \quad \frac{d^2 \Phi^*}{dx^{*2}} = 3 \times 2^{-4} f(\Phi^*)$$

che integrata dà, tenute presenti le condizioni al contorno,

$$(10) \quad x^* = 3^{-1/2} 2^{3/2} \int_{\Phi_0^*}^{\Phi^*} \frac{d\Phi^*}{\left[\int_0^{\Phi^*} f(\Phi^*) d\Phi^* \right]^{1/2}}$$

La (10) definisce la legge di variazione della T_r con x^* ; dalla (5') ricaviamo poi

$$(11) \quad \alpha u_1 = \left(\frac{l_3}{\tau_{ir}} \right) 3^{-1/2} 2^{5/2} \left[\int_0^{\Phi^*} f(\Phi^*) d\Phi^* \right]^{1/2}$$

che insieme colla (10) dà la legge di variazione della α con x^* .

Assumendo per $f(\Phi^*)$ l'espressione approssimata (8) risulta

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Phi^*}{\Phi_0^*} = \exp\left(\frac{a^{1/2} 3^{1/2}}{4} x^*\right) \cong \exp\left(\frac{3^{1/2}}{4 \Phi_0^{*1/2}} x^*\right) \\ \alpha_{u_1} = (l_3/\tau_{ir}) 3^{-1/2} \times 4 a^{1/2} \Phi_0^* \exp\left(\frac{a^{1/2} 3^{1/2}}{4} x^*\right) \cong \\ \cong (l_3/\tau_{ir}) 3^{-1/2} \times 4 \Phi_0^{*1/2} \exp\left(\frac{3^{1/2} x^*}{4 \Phi_0^{*1/2}}\right). \end{array} \right.$$

Posto

$$(13) \quad \alpha_0 = (\alpha)_{x^*=0} = \left(\frac{l_3}{\tau_{ir}}\right) \frac{4}{\sqrt{3}} \Phi_0^{*1/2}$$

la seconda delle (12) dà

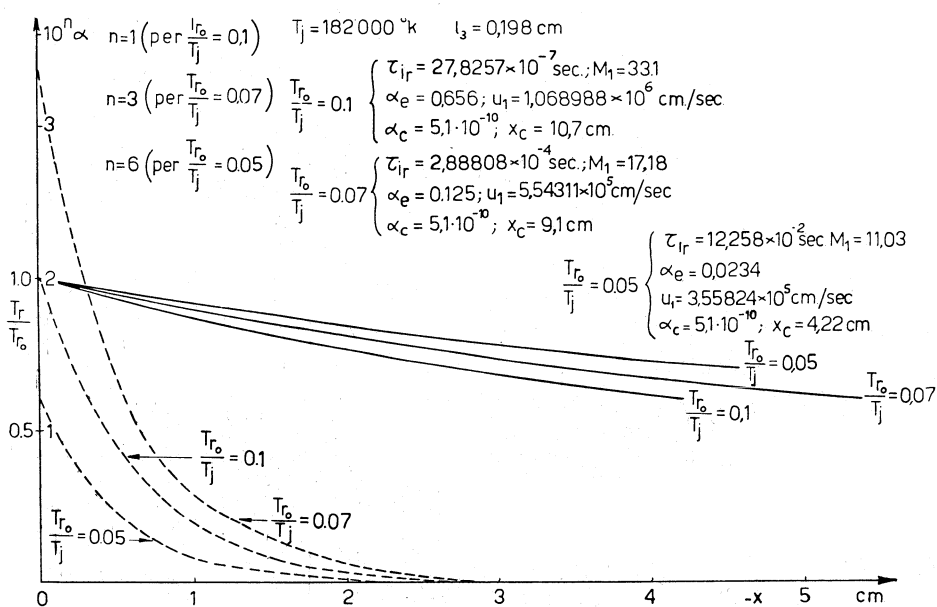


Fig. 2. - Legge di variazione della temperatura della radiazione e del grado di ionizzazione colla distanza a monte del fronte d'onda (in Argon).

$$(14) \quad \alpha = \alpha_0 \exp\left(\frac{3^{1/2}}{4 \Phi_0^{*1/2}}\right)$$

che è formalmente identica a quella ottenuta in [1]; dal punto di vista quantitativo la differenza consiste nel fatto che il *percorso libero medio* delle radiazioni appare ora *incrementato*, rispetto a quello ricavato in [1] nel rapporto da uno a $\frac{4 \Phi_0^{*1/2}}{3^{1/2}}$. Nelle figg. 2 e 5 sono riportate le leggi di variazione di (T_r/T_{r0}) e di α con x ricavate dalla (10) e (11) per i seguenti casi.

Nel primo esempio, corrispondente a gas *Argon*, per il quale la temperatura caratteristica di ionizzazione T_j è $T_j = 182.000^\circ\text{K}$, abbiamo preso,

come in [1], $\frac{T_{r_0}}{T_j} = 0,1$; $p = 10^{-3} \times 1,013$ bar; $T = 300^\circ$ K. Dalle equazioni dell'urto retto, in condizioni di equilibrio termodinamico, è risultato $u_1 = 1,075 \times 10^6$ cm/sec, e mentre dalla equazione di Saha appare che il valore di α in condizioni di equilibrio termodinamico, e per $T = T_{r_0}$, è $\alpha_0 = 0,665$ dalla (13) risulta che il valore di α in corrispondenza del fronte di onda è $\alpha_0 = 0,205$. Il numero di Mach M_1 corrispondente alla velocità u_1 dell'onda è poi $M_1 = 33,3$, mentre la lunghezza caratteristica l_3 risulta $l_3 = 0,198$ cm.

Si deduce ora che la distanza dal fronte d'onda a cui il grado di ionizzazione si riduce al valore *critico* α_c dell'ordine di 10^{-10} (e precisamente $\alpha_c = 5,032 \times 10^{-10}$) è $x_c = 10,714$ cm, mentre in [1] per $\alpha_c = 3,72 \times 10^{-10}$

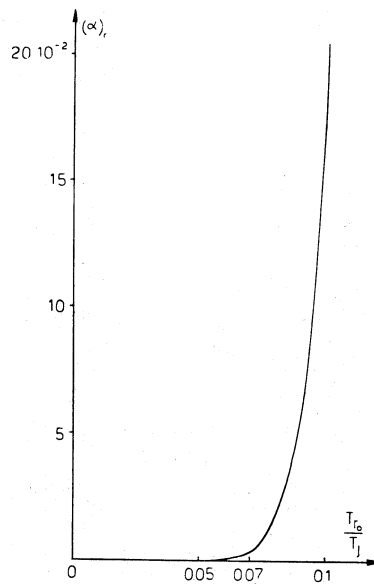


Fig. 3. — Legge di variazione del grado di ionizzazione (in corrispondenza del fronte d'onda) colla intensità dell'urto (rappresentata dalla temperatura delle radiazioni sul fronte d'onda) (in Argon).

era stato ricavato $x_c = 3,84$ cm, di guisa che appare ben chiaramente, come pure essendo i risultati ora ricavati qualitativamente identici a quelli ottenuti in [1], l'effetto ionizzante delle radiazioni a monte dell'onda è ora alquanto più grande.

I calcoli sono stati fatti, sempre per *argon*, anche per i valori di T_{r_0}/T_j uguali a 0,07 e a 0,05; i risultati sono riportati nella stessa figura (2), mentre nelle figure (3) e (4) sono indicati i valori di α_0 e di x_c in funzione di T_{r_0}/T_j : appare che mentre α_c *diminuisce fortemente col diminuire di T_{r_0}/T_j* , *la diminuzione di x_c è molto meno rapida*: nei due casi estremi qui considerati, mentre α_0 passa dal valore 0,205 al valore $1,18 \times 10^{-6}$, x_c scende soltanto da 10,71 cm a 4,22 cm.

Nel secondo esempio si è considerato l'effetto ionizzante delle radiazioni nel gas *elio*, per il quale è $T_j = 285.000^\circ \text{K}$; assumendo ancora $p = 10^{-3} \times 1,013 \text{ bar}$; $T_o = 300^\circ \text{K}$, $M_i = 33,65$, si è ricavato per T_{r_o} (assunto sempre uguale al valore della temperatura a monte dell'urto e in condizioni di

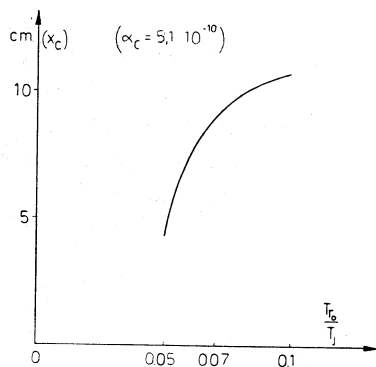


Fig. 4. - Legge di variazione della distanza critica dal fronte d'onda coll'intensità dell'urto (in Argon).

equilibrio termodinamico) il valore $T_{r_o} = 23.800^\circ \text{K}$ e pertanto $\frac{T_{r_o}}{T_j} = 0,0835$. Il valore corrispondente di α a valle dell'urto, in condizioni sempre di equilibrio termodinamico, è dato dall'*equazione di Saha* e risulta $\alpha_c = 0,42$, mentre dalla (13) si ottiene per α_o il valore $\alpha_o = 2,97 \times 10^{-2}$; e per la lunghezza caratteristica l_3 si ricava dalla terza delle (23) di [2]: $l_3 = 1,44 \text{ cm}$. La distanza x_c

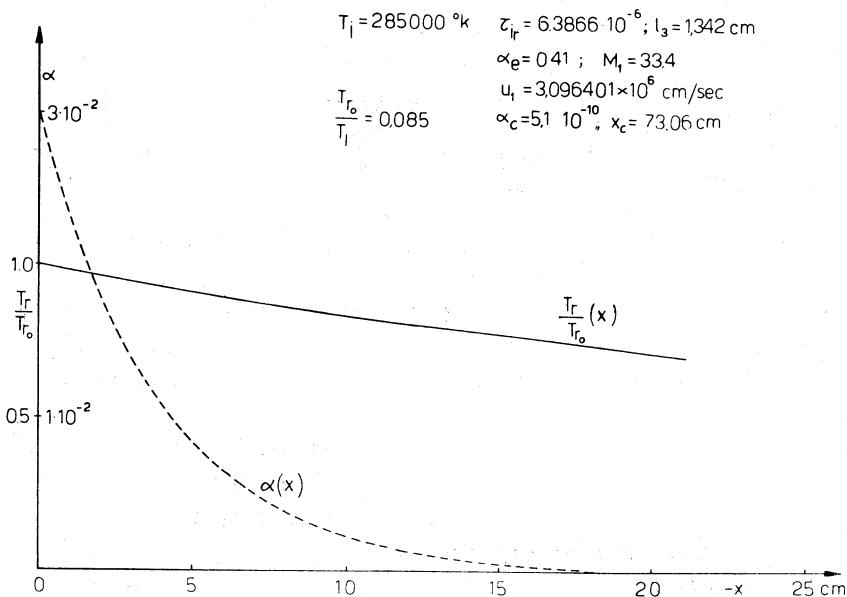


Fig. 5. - Legge di variazione della temperatura delle radiazioni e del grado di ionizzazione colla distanza a monte del fronte d'onda (in Elio).

corrispondente ad $\alpha_c = 5,1 \times 10^{-10}$ risulta $x_c = 78,20$ cm, contro il valore di $x_c = 27,8$ cm (per $\alpha_c = 3,72 \times 10^{-10}$) ottenuto in [1]. Le leggi di variazione di T_r/T_{r_0} e di α con x per l'elio sono date dai diagrammi di fig. 5.

3. INFLUENZA DELLA DIPENDENZA DELLA INTENSITÀ SPECIFICA DELLA RADIAZIONE DALLA DIREZIONE. — Le assunzioni fatte in [2] per la *intensità specifica media* delle radiazioni di frequenza ν , J_ν , e lo *sforzo specifico* corrispondente $p_{xx,\nu}$ sono verificate se la intensità specifica delle radiazioni I_ν ha in ogni punto una distribuzione uniforme per tutte le direzioni (campo isotropico di radiazioni) (fig. 6a). Consideriamo ora l'altro caso (che se non può a rigore essere chiamato *limite* per quanto si riferisce alla valutazione della influenza della dipendenza dalla direzione della intensità specifica delle radiazioni, è tuttavia da considerarsi come indicativo, per la valutazione dell'ordine di grandezza di tale influenza), in cui I_ν è *costante e non nullo* per θ compreso

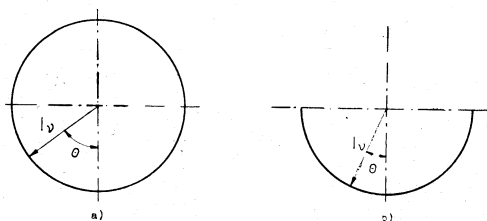


Fig. 6. — Leggi considerate per la dipendenza direzionale dell'intensità specifica dell'energia raggiante.

tra θ e $\pi/2$, mentre è ancora *costante ma nullo* per $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ (fig. 6b): in queste condizioni sempre prendendo per I_ν una dipendenza da ν corrispondente alla formula di *Planck*, si ricava

$$p_{xx,\nu} = \frac{2\pi}{3c} \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[\exp\left(\frac{h\nu}{KT_r}\right) - 1 \right]^{-1}$$

mentre per la J_ν si ottiene

$$J_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} \left[\exp\left(\frac{h\nu}{KT_r}\right) - 1 \right]^{-1}.$$

Corrispondentemente a dette espressioni per le $p_{xx,\nu}$ e J_ν , la (24) di [2] e la (3) diventano

$$(15) \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\rho^*(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \frac{\Phi^*}{2} \right] = 3 \times 2^{-4} l_3^{-2} \left\{ -B\alpha^2 \rho^{*2} (T_0/T)^{1/2} + \right. \\ \left. + (1-\alpha) \frac{\rho^*}{2} (T_r/T_{r_0}) \exp \left[(T_j/T_{r_0}) \left(1 - \frac{T_{r_0}}{T_r} \right) \right] \right\} \\ \frac{d}{dx} (\rho^* \alpha u) = \left(\frac{l_3}{\tau_{ir}} \right) l_3^{-1} \left\{ -B\alpha^2 \rho^{*2} (T_0/T)^{1/2} + (1-\alpha) \frac{\rho^*}{2} \times \right. \\ \left. \times (T_r/T_{r_0}) \exp \left[(T_j/T_{r_0}) \left(1 - \frac{T_{r_0}}{T_r} \right) \right] \right\}$$

e pertanto risulta, in luogo della (5') la

$$(16) \quad \alpha u_x = (l_3 / \tau_{ir}) l_3 2^4 \times 3^{-1} \frac{d}{dx} \Phi^* / 2$$

e in luogo della (6) la

$$(17) \quad \frac{d^2 \Phi^*}{dx^2} = 3 \times 2^{-4} l_3^{-2} (T_r / T_{r_0}) \exp \left[(T_j / T_{r_0}) \left(1 - \frac{T_{r_0}}{T_r} \right) \right]$$

che non presenta alcuna differenza rispetto alla (6) stessa. La legge di variazione della temperatura della radiazione con x risulta di conseguenza sempre data dalla (10), e pertanto *essa non viene a presentare alcuna variazione passando dalla legge di distribuzione di I_v con θ data dalla fig. 6 a a quella corrispondente alla fig. 6 b*. Si ricava poi per la α , invece della (11) la

$$(18) \quad \alpha u_x = \left(\frac{l_3}{\tau_{ir}} \right) 3^{-1/2} 2^{3/2} \left[\int_0^{\Phi^*} f(\Phi^*) d\Phi^* \right]^{1/2}.$$

Accettando per $f(\Phi^*)$ la approssimazione corrispondente alla (8) si ha

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\Phi^*}{\Phi_0^*} = \exp \left(\frac{3^{1/2}}{4 \Phi_0^{*1/2}} x^* \right) \\ \alpha = \alpha_0 \exp \left(\frac{3^{1/2}}{4 \Phi_0^{*1/2}} x^* \right) \end{cases}$$

in cui però ora

$$(20) \quad \alpha_0 = (\alpha)_{x=0} = \left(\frac{l_3}{\tau_{ir} u_x} \right) \frac{2}{\sqrt{3}} \Phi_0^{*1/2}$$

e pertanto; *il percorso libero medio delle radiazioni, e la lunghezza caratteristica l_3 e la distanza critica x_c non appaiono influenzati dalle dipendenze di I_v dalla direzione, ed è solo il grado di ionizzazione α_0 sul fronte dell'onda che varia risultando dimezzato, quando si passi dalla legge di distribuzione (6 a) alla (6 b).*

Risulta pertanto che il metodo ora proposto appare molto meno sensibile alla legge di dipendenza dell'intensità specifica I_v dalla direzione che non quello considerato in [1].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. FERRARI, J. H. CLARKE, Atti del Simposio sulle « Alte temperature in Aeronautica » Politecnico di Torino 10-12 settembre 1962. Vedi anche Technical Note C-M 1020 - Division of Engineering Brown University - Providence R. I. (gennaio 1963).
[2] C. FERRARI, J. H. CLARKE, « Rendiconti Accad. Nazion. dei Lincei », vol. XXXV (1963).