Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Prouse

Soluzioni periodiche dell'equazione di Navier-Stokes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.6, p. 443–447.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_443_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Analisi matematica. — *Soluzioni periodiche dell'equazione di Navier–Stokes* (*). Nota di GIOVANNI PROUSE, presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

Nella presente Nota dimostreremo che l'equazione di Navier–Stokes non omogenea, con termine noto periodico di periodo T, ammette almeno una soluzione $L^2(\Omega)$–periodica, Ω essendo un insieme aperto e limitato di $S^p \equiv (x_1, \cdots, x_p)$.

Viene così esteso un risultato di Prodi [1] nel quale si dimostrava l'esistenza di una soluzione periodica nel caso bidimensionale, facendo uso di un teorema di dipendenza continua debole, dimostrato per tale caso, e del teorema sul punto unito di Tychonov.

Il metodo che seguiremo consiste nel far vedere che i sistemi differenziali che, secondo il procedimento di Hopf [2], forniscono soluzioni approssimate dell'equazione di Navier–Stokes, ammettono almeno una soluzione periodica; la successione di tali soluzioni converge poi debolmente verso una soluzione, pure periodica, dell'equazione di Navier–Stokes.

Sia $\mathfrak{N}(\Omega)$ la varietà dei vettori (a p componenti) indefinitamente differenziabili, a divergenza nulla ed a supporto compatto in Ω. Indicheremo con N ed N^1 rispettivamente le chiusure di $\mathfrak{N}(\Omega)$ in $L^2(\Omega) = L^2$ ed in $H_0^1(\Omega) = H_0^1$.

Sia $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \cdots, \vec{w}_n, \cdots$ una base in N^1, costituita da funzioni $\in \mathfrak{N}(\Omega)$ e sia $\{\vec{\psi}_k\}$ una successione, da essa dedotta, di funzioni ortogonali e normate, con prodotto scalare definito in L^2.

Secondo il procedimento di Hopf, diremo che la funzione $\vec{u}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k(t)\, \vec{\psi}_k$ *è una soluzione approssimata dell'equazione di Navier–Stokes, con termine noto* $\vec{g}(t)$, *se i coefficienti* $\eta_k(t)$ *soddisfano al sistema differenziale*

$$(1) \qquad \eta'_k(t) + \mu \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\, \eta_i(t) + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ijk}\, \eta_i(t)\, \eta_j(t) = \gamma_k(t) \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

dove si è posto

$$(2) \qquad c_{ik} = (\vec{\psi}_i, \vec{\psi}_k)_{H'_0} \quad , \quad b_{ijk} = b(\vec{\psi}_i, \vec{\psi}_j, \vec{\psi}_k) = \int_\Omega \sum_{r,s=1}^{p} \psi_i^{(r)} \frac{\partial \psi_j^{(s)}}{\partial x_r} \psi_k^{(s)}\, dx ,$$

$$\gamma_k(t) = (\vec{g}(t), \vec{\psi}_k)_{L^2}$$

essendo $\psi_i^{(r)}$ $(r = 1, \cdots, p)$ *le componenti del vettore* $\vec{\psi}_i$.

(*) Istituto Matematico del Politecnico di Milano. Gruppo di ricerca n. 12 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1963–64. Durante lo svolgimento di questo lavoro, l'autore ha usufruito di una borsa di studio del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1963.

I coefficienti c_{ik}, b_{ijk} godono delle seguenti proprietà, facilmente deducibili dalla loro definizione:

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \qquad (\alpha > 0), \tag{3}$$

$$b_{ijk} = -b_{ikj}. \tag{4}$$

Come è noto (cfr. per esempio [2], [3]), il problema di Cauchy per il sistema (1) ammette una ed una sola soluzione, qualora le funzioni $\gamma_k(t)$ siano localmente sommabili.

Moltiplichiamo le (1) rispettivamente per $\eta_1(t), \cdots, \eta_n(t)$ e sommiamo; posto $\vec{g}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(t)\vec{\psi}_k$ e, di conseguenza:

$$|\vec{u}_n(t)|^2 = \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2(t) \quad , \quad |\vec{g}_n(t)|^2 = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2(t) \tag{5}$$

si ottiene, tenendo presente le (3), (4):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\vec{u}_n(t)|^2 + \alpha\mu|\vec{u}_n(t)|^2 \leq |\vec{u}_n(t)|\,|\vec{g}_n(t)| \tag{6}$$

ossia anche:

$$\frac{d}{dt}|\vec{u}_n(t)| + \alpha\mu|\vec{u}_n(t)| \leq |\vec{g}_n(t)|. \tag{7}$$

Dalla (7) si deduce:

$$|\vec{u}_n(t)| \leq e^{-\alpha\mu t}\left[|\vec{u}_n(0)| + \int_0^t e^{\alpha\mu\tau}|\vec{g}_n(\tau)|\,d\tau\right]. \tag{8}$$

Siano ora $\eta_k^{(1)}(t)$, $\eta_k^{(2)}(t)$ due soluzioni, corrispondenti al medesimo termine noto $\vec{g}_n(t)$; posto $\zeta_k(t) = \eta_k^{(1)}(t) - \eta_k^{(2)}(t)$, le funzioni $\zeta_k(t)$ soddisferanno il sistema

$$\zeta_k'(t) + \mu\sum_{i=1}^{n} c_{ik}\zeta_k(t) + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ijk}[\zeta_i(t)\eta_j^{(2)}(t) + \zeta_j(t)\eta_i^{(1)}(t)] = 0 \tag{9}$$

$$(k = 1, \cdots, n).$$

Moltiplichiamo le (9) rispettivamente per $\zeta_1(t), \cdots, \zeta_n(t)$ e sommiamo; si ottiene allora la relazione, analoga alla (6):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\vec{w}_n(t)|^2 + \alpha\mu|\vec{w}_n(t)|^2 + \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ijk}\eta_j^{(2)}(t)\zeta_i(t)\zeta_k(t) \leq 0 \tag{10}$$

avendo posto

$$\vec{w}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k(t)\vec{\psi}_k. \tag{11}$$

Si ha d'altra parte, per $t \in [0, T]$:

$$\left| \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ijk} \eta_j^{(2)}(t) \zeta_i(t) \zeta_k(t) \right| \leq \tag{12}$$

$$\leq n \max_{i,j,k=1,\cdots,n} |b_{ijk}| \max_{0\leq t\leq T} |\vec{u}_n^{(2)}(t)| \sum_{i,k=1}^{n} |\zeta_i(t)| \, |\zeta_k(t)| \leq$$

$$\leq n^2 \max_{i,j,k=1,\cdots,n} |b_{ijk}| \max_{0\leq t\leq T} |\vec{u}_n^{(2)}(t)| \sum_{k=1}^{n} \zeta_k^2(t) = \beta \, |\vec{w}_n(t)|^2 .$$

Introducendo la (12) nella (10) e dividendo per $|\vec{w}_n(t)|$, si ottiene:

$$\frac{d}{dt} |\vec{w}_n(t)| \leq \frac{1}{|\vec{w}_n(t)|} \left\{ \left| \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ijk} \eta_j^{(2)}(t) \zeta_i(t) \zeta_k(t) \right| - \alpha\mu \, |\vec{w}_n(t)| \right\} \leq \tag{13}$$

$$\leq (\beta - \alpha\mu) \, |\vec{w}_n(t)| .$$

Risulta allora, sempre per $t \in [0, T]$:

$$|\vec{w}_n(t)| \leq |\vec{w}_n(0)| \, e^{(\beta-\alpha\mu)t}. \tag{14}$$

Se supponiamo che il vettore $\vec{g}(t)$ *sia periodico di periodo* T, *esiste una* n*-upla di funzioni* $\bar{\eta}_k(t)$, *soluzioni del sistema* (1), *pure periodiche, con periodo* T.

Consideriamo infatti la trasformazione S definita dalla relazione

$$S(\vec{z}_0) = \vec{u}_n(T) \tag{15}$$

dove $\vec{u}_n(t)$ è la soluzione del sistema (1) soddisfacente alla condizione iniziale $\vec{u}_n(0) = \vec{z}_0$.

Dalla (14) si deduce:

$$|S(\vec{z}_0^{(1)}) - S(\vec{z}_0^{(2)})| = |\vec{w}_n(T)| \leq |\vec{z}_0^{(1)} - \vec{z}_0^{(2)}| \, e^{(\beta-\alpha\mu)T} \tag{16}$$

e quindi la trasformazione S è continua (ciò che, del resto, è ben noto).

Per la (8) è d'altra parte:

$$|\vec{u}_n(T)| \leq e^{-\alpha\mu T} \left[|\vec{z}_0| + \int_0^T e^{\alpha\mu t} |\vec{g}_n(t)| \, dt \right] \leq |\vec{z}_0| \, e^{-\alpha\mu T} + \int_0^T \|\vec{g}(t)\|_{L^2} dt \tag{17}$$

da cui segue che la trasformazione S muta ogni sfera dello spazio euclideo S^n, con centro nell'origine e raggio $R \geq (1 - e^{-\alpha\mu T})^{-1} \int_0^T \|\vec{g}(t)\|_{L^2} dt$ in sé.

Dal teorema del punto unito si deduce allora immediatamente l'esistenza di almeno una soluzione $\vec{v}_n(t)$, periodica di periodo T. Per tale soluzione vale la relazione

$$|\vec{v}_n(t)| \leq (1 - e^{-\alpha\mu T})^{-1} \int_0^T \| \vec{g}(t) \|_{L^2} dt = M. \tag{18}$$

Dimostriamo ora (sempre nell'ipotesi che $\vec{g}(t)$ sia periodica di periodo T) *che dalla successione $\{\vec{v}_n(t)\}$ di soluzioni approssimate periodiche può estrarsi una sottosuccessione convergente debolmente in* L^2, *per ogni t, verso una soluzione* L^2*-periodica $\vec{v}(t)$ dell'equazione di Navier–Stokes.*

Osserviamo anzitutto che dalle (1) e (2) si deduce facilmente la relazione:

$$(\vec{u}'_n(t), \vec{\psi}_k)_{L^2} + \mu(\vec{u}_n(t), \vec{\psi}_k)_{H'_0} + b(\vec{u}_n(t), \vec{u}_n(t), \vec{\psi}_k) = (\vec{g}_n(t), \vec{\psi}_k)_{L^2}$$

da cui segue:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \vec{u}_n(t) \|^2_{L^2} + \mu \| \vec{u}_n(t) \|^2_{H'_0} = (\vec{g}_n(t), \vec{u}_n(t))_{L^2}. \tag{19}$$

Risulta perciò:

$$\begin{aligned} \mu \int_0^T \| \vec{v}_n(\eta) \|^2_{H^1_0} d\eta &= \frac{1}{2} \| \vec{v}_n(0) \|^2_{L^2} - \frac{1}{2} \| \vec{v}_n(T) \|^2_{L^2} + \\ &+ \int_0^T (\vec{g}_n(\eta), \vec{v}_n(\eta))_{L^2} d\eta \leq M^2 + M \int_0^T \| \vec{g}_n(\eta) \|_{L^2} d\eta . \end{aligned} \tag{20}$$

In virtù della (20), la successione $\{\vec{v}_n(t)\}$ è limitata in $L^2(O, T; H^1_0)$ ed è quindi possibile estrarre da essa una sottosuccessione (che indicheremo ancora con $\{\vec{v}_n(t)\}$) debolmente convergente in $L^2(O, T; H^1_0)$ verso una funzione $\vec{v}(t)$, tale cioè che risulti:

$$\lim_{n\to\infty}{}^* \vec{v}_n(t) \underset{L^2(O,T;H^1_0)}{=} \vec{v}(t). \tag{21}$$

Le $\vec{v}_n(t)$ sono d'altra parte funzioni periodiche di periodo T e la (21) vale quindi sostituendo all'intervallo $[O, T]$ un qualsiasi intervallo $[kT, (k+1)T]$ $(k = 0, \pm 1, \cdots)$; ne segue, detto Δ un qualsiasi intervallo $\subset J = (-\infty, +\infty)$:

$$\lim_{n\to\infty}{}^* \vec{v}_n(t) \underset{L^2(\Delta;H^1_0)}{=} \vec{v}(t). \tag{22}$$

Poiché, per la (18), si ha, per ogni t, $|\vec{v}_n(t)| = \| \vec{v}_n(t) \|_{L^2} \leq M$, possiamo ora applicare il procedimento dato da Hopf per dimostrare il teorema di esistenza per le soluzioni dell'equazione di Navier–Stokes; si dimostra così che risulta, per ogni t:

$$\lim_{n \to \infty}{}^{*} \vec{v}_n(t) \underset{L^2}{=} \vec{v}(t) \tag{23}$$

e che la funzione limite $\vec{v}(t)$ è una soluzione dell'equazione di Navier–Stokes, cioè soddisfa l'equazione

$$\int_J \{\mu(\vec{v}(t), \vec{h}(t))_{H'_0} - (\vec{v}(t), \vec{h}'(t))_{L^2} + b(\vec{v}(t), \vec{v}(t), \vec{h}(t))\}\, dt =$$

$$= \int_J (\vec{g}(t), \vec{h}(t))_{L^2}\, dt$$

per ogni funzione $\vec{h}(t)$ a supporto compatto, N^1–continua e con $h'(t) \in L^2_{loc}$ $(-\infty, \infty; N)$.

Poiché le $\vec{v}_n(t)$ sono periodiche di periodo T, dalla (23) si deduce che la soluzione $\vec{v}(t)$ è periodica di periodo T. Il teorema è perciò dimostrato.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. PRODI, *Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier–Stokes nel caso bidimensionale*, « Rend. Sem. Mat. Padova », vol. XXX (1960).

[2] E. HOPF, *Uber die Anfangswertaufgabe für die hydrodinamischen Grundgleichungen*, «Math. Nachr. », 4 (1951).

[3] G. PRODI, *Rassegna di ricerche intorno alle equazioni di Navier–Stokes*, Università di Trieste, quaderno n. 2.