Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Nives Maria Ferlan

Sul minimo modulo delle funzioni analitiche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.6, p. 463–465.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_463_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Funzioni analitiche. — *Sul minimo modulo delle funzioni analitiche.* Nota di NIVES MARIA FERLAN [(*)], presentata [(**)] dal Corrisp. G. RICCI.

1. Sia $f(z)$ funzione di z olomorfa per $|z| < R$ e poniamo, per $0 \leqq r < R$:

$$M(r\,;f) = \operatorname*{Max}_{\theta} |f(re^{i\theta})| \quad , \quad m(r\,;f) = \operatorname*{Min}_{\theta} |f(re^{i\theta})|$$

$$\overline{m}(r\,;f) = \operatorname*{Max}_{0\leqq u\leqq r} m(u\,;f)$$

($\overline{m}(r\,;f)$ è la minima maggiorante monotona del minimo modulo $m(r\,;f)$); anzi, per poter considerare queste funzioni anche per $r = R$ (ove non è richiesta la regolarità) e in ipotesi più generali per $f(z)$, poniamo

$$M(r\,;f) = \operatorname*{Sup}_{0\leqq u< r} \operatorname{Max} |f(ue^{i\theta})| \quad , \quad \overline{m}(r\,;f) = \operatorname*{Sup}_{0\leqq u<r} m(u\,;f)$$

(per $r < R$ queste definizioni coincidono ovviamente con le precedenti).

Sono note proprietà dell'andamento di $m(r\,;f)$ in relazione a quello di $M(r\,;f)$, per esempio [(1)]:

«Se $0 < \rho - \varepsilon < \rho < 1$ e $f(z)$ è una funzione intera di ordine maggiore di $\rho - \varepsilon$ e di accrescimento non superiore a $(\rho\,,0)$, esiste una successione $r_n \to +\infty$ tale che $\log m(r_n) > \cos \pi\rho \cdot \log M(r_n) > r_n^{\rho-\varepsilon}$».

Ci proponiamo di indagare l'andamento di $\overline{m}(r\,;f)$ in relazione a $M(r\,;f)$.

È nota la elegante proposizione di Milloux-Schmidt [(2)]:

«Se $f(z)$ è regolare in $|z| < 1$, ed è $|f(z)| < 1$ per $|z| < 1$, $\operatorname*{Min}_{\theta} |f(re^{i\theta})| < \mu$ per $0 \leqq r < 1$, allora è

$$\log M(r\,;f) \leqq \left(1 - \frac{4}{\pi} \operatorname{artg} \sqrt{r}\right) \cdot \log \mu \text{ ».} \tag{1}$$

Un cambiamento di variabili conduce immediatamente alla disuguaglianza seguente

$$\log \overline{m}(R\,;f) \geqq \varphi(r\,,R\,;f) \qquad (0 \leqq r < R) \tag{2}$$

(*) Studio eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca N. 40 (1962-1963) del Comitato nazionale per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1963.

(1) R. P. BOAS, Jr., *Entire Functions*, New York 1954, p. 43.

(2) H. MILLOUX, *Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et entières*, «Journal de Mathématiques pures et appliquées» (9), *3*, 345-401 (1924); H. MILLOUX, *Sur certaines fonctions holomorphes et bornées dans un cercle*, «Mathematica», *4*, 182-185 (1930); E. LANDAU, *Ueber den Millouxschen Satz*, Nachrichten Göttingen, 1-9 (1930); E. SCHMIDT, *Ueber den Millouxschen Satz*, «Sitzber. Pr. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.», 394-401 (1932); M. H. HEINS, *Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable*, New York, 108-109 (1962).

valida per $f(z)$ regolare in $|z| < \mathrm{R}$ e dove

$$\begin{cases} \varphi(r, \mathrm{R}; f) = \dfrac{1}{1 - \varepsilon(r/\mathrm{R})} \log \mathrm{M}(r; f) - \dfrac{\varepsilon(r/\mathrm{R})}{1 - \varepsilon(r/\mathrm{R})} \log \mathrm{M}(\mathrm{R}; f) \\ \varepsilon(t) = (4/\pi) \operatorname{artg} \sqrt{t}. \end{cases} \tag{3}$$

Si può allora ricavare il seguente

TEOREMA I. – *Se $f(z)$ è regolare per $|z| < \mathrm{R}$, risulta*

$$\begin{cases} \log \overline{m}(r; f) \geqq \log \mathrm{M}(r; f) - \pi r \, \mathrm{D}_r^- \log \mathrm{M}(r; f) \\ 0 \leqq r < \mathrm{R}, \end{cases} \tag{4}$$

dove D_r^- denota la derivata sinistra rispetto a r, calcolata nel punto r.

π è la «migliore costante» per la quale vale (4).

La smussatezza di $\mathrm{M}(r; f)$ consente di stabilire (4); per garantire che π è la migliore costante si ricorre alla famiglia delle funzioni estremali di H. Heins attinenti al problema di Milloux [3].

L'esame della disuguaglianza (2) conduce alla relazione di media

TEOREMA II.

$$\int_r^{\mathrm{R}} \log \frac{\mathrm{M}(u; f)}{\overline{m}(u; f)} \, d(\log u) \leqq \pi \log \frac{\mathrm{M}(\mathrm{R}; f)}{\mathrm{M}(r; f)} \qquad (0 \leqq r < \mathrm{R});$$

e anche per questa si pone il problema della migliore costante.

Si può valutare al disotto $\overline{m}(r; f)$ anche mediante una media di $\log(\mathrm{M}(\mathrm{R}; f)/\mathrm{M}(r; f))$ e si perviene al

TEOREMA III.

$$\log \frac{\mathrm{M}(\mathrm{R}; f)}{\overline{m}(\mathrm{R}; f)} \leqq \frac{\lambda(r/\mathrm{R})}{\mathrm{R}} \cdot \int_r^{\mathrm{R}} \log \frac{\mathrm{M}(\mathrm{R}; f)}{\mathrm{M}(u; f)} \, du$$

dove $0 \leqq r < \mathrm{R}$ *e la funzione* $\lambda(t)$ *è data da*

$$\begin{aligned} \pi/\lambda(t) &= 4 - \pi - \pi t + 4 \cdot (\operatorname{artg} \sqrt{t} - \sqrt{t} + t \operatorname{artg} \sqrt{t}) = \\ &= 4 - \pi - \pi t + (8/3)\, t^{3/2} + \cdots \end{aligned}$$

2. PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI INTERE. – Sia $f(z)$ una funzione intera di z: possiamo porre il problema di individuare classi di funzioni f per le quali $\log \overline{m}(r; f) \asymp \log \mathrm{M}(r; f)$.

TEOREMA IV. – *Se esiste $u = u(r)$ tale che si abbia simultaneamente per $r \to +\infty$*

$$u(r)/r \to 0 \quad , \quad \varliminf (\log \mathrm{M}(u; f)/\log \mathrm{M}(r; f)) > 0,$$

allora è $\log \overline{m}(r; f) \asymp \log \mathrm{M}(r; f)$ *per* $r \to +\infty$.

(3) M. H. HEINS, *The problem of Milloux for functions analytic throughout the interior of the unit circle*, «American Journal of Mathematics», 47, 212–234 (1945).

Anzi vale il teorema più preciso seguente, del quale il teorema IV è immediato corollario:

TEOREMA V. – *Se esistono* $r > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \beta < \operatorname{tg}^2(\gamma\pi/4)$ *tali che sia* $M(\beta r; f) \geqq M^\gamma(r; f)$ *allora risulta*

$$\overline{m}(r; f) \geqq M^\delta(r; f) \qquad \textit{con} \quad \delta = \left(\frac{\gamma\pi}{4} - \operatorname{artg}\sqrt{\beta}\right) : \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{artg}\sqrt{\beta}\right).$$

In particolare si ricava che da

$$\log \overline{m}(r; f) = o(\log M(r; f)) \quad , \quad M(\beta r; f) \neq o(M^\gamma(r; f)) \quad , \quad (\gamma > 0)$$

segue $\beta \geqq \operatorname{tg}^2(\pi\gamma/4)$.

Lo studio della funzione $\varphi(r, R; f)$ definita in (3) consente di stabilire per le funzioni intere risultati che pongono in relazione l'andamento di $\overline{m}(r; f)$ con la potenza r^ρ di r.

Vale il seguente

TEOREMA VI. – *Sia* $f(z)$ *una funzione intera di ordine* ρ *e di tipo* τ. *Se* $0 \leqq \rho < 1/2$ *e* $\tau > 0$ *risulta:*

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log \overline{m}(r; f)}{r^\rho} > 0 .$$

Più precisamente

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log \overline{m}(r; f)}{r^\rho} \geqq c(\rho) \cdot \tau .$$

essendo $c(\rho) > 0$ *indipendente da* f.

Osservazione. – Risultati analoghi si possono ottenere per funzioni $f(z)$ che ammettano linee singolari, sotto ipotesi opportune, come per esempio quelle già considerate da E. Schmidt per il teorema di Milloux.

Le dimostrazioni delle proposizioni enunciate in questa Nota compariranno in un lavoro di prossima pubblicazione.