Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Succi

Il teorema di De Rham e la dualità per le varietà relative

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.6, p. 496–503.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_496_0>

Topologia. — *Il teorema di De Rham e la dualità per le varietà relative.* Nota di FRANCESCO SUCCI, presentata (*) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

INTRODUZIONE. – L'estensione dei teoremi di De Rham alle varietà relative, cioè al caso di una varietà modulo un suo sottoinsieme, sembra sia stata considerata per la prima volta da A. W. Tucker, il quale, in un lavoro rimasto non pubblicato [11, *b*], enunciò come congetture teoremi di tale tipo per varietà dotate di bordo. La questione è stata ripresa più tardi da G. F. D. Duff, [3], che ha dimostrato quelle congetture nel caso di una varietà finita, orientabile, senza singolarità, dotata di bordo regolare, estendendo la tecnica classica di De Rham e facendo uso dell'omologia relativa di Lefschetz.

Più recentemente J. Leray, nel corso di un suo lavoro sul problema di Cauchy in una varietà analitica complessa, [9], ha dimostrato in condizioni più generali un « teorema di forte dualità » che implica l'estensione al caso relativo del teorema di isomorfismo tra gruppi di coomologia e gruppi di De Rham (cioè l'estensione alle varietà relative dei classici primi due teoremi di De Rham). Il Leray stabilisce il suo risultato nell'ambito delle varietà complesse alle quali è interessato, ma – come egli stesso avverte – il risultato si può riferire anche a varietà differenziabili reali di classe C^∞ modulo l'unione di un numero finito di sottovarietà C^∞ di codimensione uno, non singolari ed in posizione generale. Il Leray giunge alle sue conclusioni servendosi dei risultati classici di Lefschetz e di De Rham e della tecnica algebrica delle terne esatte.

Nel presente lavoro riprendo ex novo la questione poggiando invece sulla teoria dei fasci e stabilisco il teorema di isomorfismo di De Rham e il teorema di forte dualità per una varietà differenziabile reale X di classe C^∞, modulo un sottoinsieme chiuso D, nelle sole ipotesi che D sia rappresentabile localmente con una o più rappresentazioni parametriche (anche non biunivoche) (n. 1) e che ogni punto $y \in D$ ammetta un sistema fondamentale d'intorni $\{V_i\}$ in modo che $D \cap V_i$ si contragga ad y in se stesso in una conveniente contrazione di V_i ad y (n. 2). Si riconosce facilmente (nn. 2.2, 2.3, 2.4) che i sottoinsiemi considerati da Leray e da Duff soddisfano in particolare alle ipotesi ora indicate e pertanto i risultati che qui ottengo comprendono quelli di questi Autori.

1. – DEFINIZIONI.

Ci poniamo in una varietà differenziabile reale (cfr. [2, *a*] p. 1), X, di classe C^∞ e di dimensione n. Sia D un sottoinsieme chiuso di X, tale che per ogni suo punto y esista in X un intorno U di y per cui $D \cap U$ sia unione di

(*) Nella seduta del 14 dicembre 1963.

un numero finito di insiemi $F_j^{(y)}$ ciascuno dei quali contenga y e sia definito da una rappresentazione parametrica (anche non biunivoca), di classe C^1 e rango $\leq n-1$. Chiameremo *sottoinsieme differenziabile* (di classe C^1) un tale sottoinsieme D di X.

Dati in X una forma differenziale α di classe C^∞ ed un sottoinsieme differenziabile D, la *restrizione* $\alpha|_D$ di α a D è rappresentata localmente dall'insieme delle immagini trasposte α_j^* di α mediante le rappresentazioni parametriche delle F_j.

Una forma α è *nulla su* D se per ogni $y \in D$ è nulla ciascuna delle restrizioni $\alpha|_{F_j^{(y)}}$; scriveremo $\alpha|_D = 0$.

2. – POSIZIONE DEL PROBLEMA.

2.1. – Per « teorema di De Rham relativo » intendiamo in generale un teorema di isomorfismo tra la coomologia relativa di una varietà differenziabile X *modulo* un suo sottoinsieme chiuso Y, e la coomologia (di De Rham) definita mediante le forme differenziali chiuse *nulle* su Y.

Assumiamo qui come sottoinsieme chiuso della varietà X un sottoinsieme differenziabile D (n. 1) soddisfacente alla seguente condizione di contraibilità:

(C) ogni punto $y \in D$ possiede in X un sistema fondamentale di intorni aperti $\{V_i\}$, tale che in ogni V_i esiste una contrazione differenziabile Φ, di classe C^1, di V_i al punto y:

$$\Phi : V_i \times I \longrightarrow V_i \quad (\text{I intervallo chiuso } (0\,,1))$$

con le proprietà:

a) Φ contrae $D \cap V_i$ in se stesso;

b) Φ è di classe C^∞ rispetto ad $x \in V_i$.

2.2. – Mostriamo in primo luogo che le ipotesi nelle quali Leray prova in [9] il teorema di forte dualità per varietà analitiche complesse, trasferite al caso di una varietà reale di classe C^∞, rientrano in quelle qui assunte.

Invero tali ipotesi portano a considerare come sottoinsieme chiuso Y di X l'unione S' di un numero finito di sottovarietà di codimensione uno, di classe C^∞, non singolari ed in posizione generale. In queste condizioni, se $S'_1, \cdots, S'_k$ sono le sottovarietà passanti per un punto $y \in S'$, in un opportuno intorno U di y può scegliersi un sistema di coordinate locali $x_1, \cdots, x_n$ tali che $S'_j \cap U$ $(j = 1, \cdots, k)$ abbia equazione $x_j = 0$, onde per riconoscere che la condizione (C) è soddisfatta basta considerare localmente la contrazione definita dalle equazioni $x'_r = t x_r$ $(r = 1, \cdots, n)$.

2.3. – Si ottengono poi immediatamente i risultati di Leray relativi al caso complesso. Invero in tal caso X è una varietà analitica complessa di dimensione complessa n ed S' un'unione di sottovarietà analitiche complesse S'_j di codimensione complessa uno, non singolari ed in posizione generale, cosicché mediante opportuna scelta di coordinate complesse $z_r = x_r + i x_{n+r}$ in un intorno di un punto $y \in S'$, ciascuna S'_j passante per y è localmente rappresentabile con l'equazione $z_j = 0$. Guardando allora alla struttura reale soggiacente, X si identifica ad una varietà reale $2n$–dimensionale e ciascuna S'_j si identifica ad una sottovarietà reale di codimensione 2 rappresentabile localmente con le equazioni $x_j = x_{n+j} = 0$. Pertanto S′ soddisfa ancora alla condizione (C) in relazione alle contrazioni locali del tipo $x'_r = tx_r$ $(r = 1, \cdots, 2n)$.

Il passaggio da forme differenziali C^∞ a coefficienti reali a forme C^∞ a coefficienti complessi è ovvio.

2.4. – Si verifica pure immediatamente che le ipotesi di Duff [3], possono farsi rientrare in quelle qui considerate ed anzi in quelle di Leray con riferimento al caso reale.

Invero Duff si pone in una varietà differenziabile reale M di dimensione n, orientabile, di classe C^2, dotata di bordo regolare B costituito da una o più varietà regolari di dimensione $n - 1$. Egli inoltre suppone che B abbia in M un intorno N costituito dal prodotto di B per l'intervallo (0, 1) aperto a destra.

Si estenda ora la varietà bordata M in una varietà aperta $\tilde{M}$, mediante l'aggiunta di un intorno N′ di B, prodotto topologico di B per l'intervallo $(-1, 0)$ aperto a sinistra, identificando $B \times O$ a B. Entro $\tilde{M}$, B è ovviamente un insieme che soddisfa le ipotesi qui considerate. Pertanto per la varietà relativa $(\tilde{M}, B)$ valgono i risultati del presente lavoro.

D'altronde la varietà relativa (M, B) risulta un retratto di deformazione della varietà relativa $(\tilde{M}, B)$. Le due varietà sono quindi dello stesso tipo d'omotopia onde esse hanno isomorfi i rispettivi gruppi di omologia, di coomologia e di De Rham (cfr. per esempio [4], p. 30; [2, *b*] [1], p. 123). I risultati stessi valgono dunque anche per (M, B).

2.5. – Diamo ora qualche esempio di situazione più generale di quelle considerate da Leray e da Duff e che pur rientra nelle ipotesi da noi assunte.

a) X = piano euclideo $O(x, y)$; $D = D_1 \cup D_2$, essendo D_1 l'asse delle x e D_2 la parabola $y = x^2$. Come sottovarietà di X, D_1 e D_2 sono non singolari, ma non sono in posizione generale. D soddisfa alla condizione (C) considerando la contrazione del piano al punto O, di equazioni: $x' = tx$, $y' = t^2 y$.

b) X = piano euclideo $O(x, y)$; $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, essendo D_1 l'asse x, D_2 l'asse y e D_3 la cubica $y^2 = x^3$. Tali sottovarietà di X non sono in posizione generale e la D_3 è singolare in O. D soddisfa tuttavia alla condizione (C) considerando la contrazione del piano ad O, di equazioni: $x' = t^2 x$, $y' = t^3 y$.

3. – Il lemma di Poincaré nel caso relativo.

Dimostriamo ora per le forme reali C^∞ definite in aperti $G \subset X$ e nulle su D (cioè nulle su $D \cap G$) il seguente:

Lemma 1. – *Se α è una p-forma chiusa, di classe* C^∞, *nulla su* D, *essa è localmente il differenziale di una* $(p - 1)$-*forma* C^∞, *nulla su* D.

(1) Per quanto concerne i gruppi di De Rham la proprietà di isomorfismo è stabilita in [2, *b*] per il caso assoluto, ma le considerazioni ivi svolte si estendono immediatamente al caso relativo.

DIM. Sia α definita in un aperto $G \subset X$. Nell'intorno di un punto $y \notin D \cap G$, l'affermazione si riduce al lemma di Poincaré classico. Se invece $y \in D \cap G$, per l'ipotesi (C) (n. 2.1), in un conveniente intorno U ($\subset G$) di y esiste una contrazione differenziabile di classe C^1:

$$\Phi : U \times I \longrightarrow U \tag{3.1}$$

che contrae U al punto y, tale che la restrizione di Φ a $D_U = D \cap U$ sia una contrazione di D_U ad y. Posto $\Phi_t(x) = \Phi(x, t)$, $x \in U$, $t \in I$, si ha quindi $\Phi(D_U \times I) = D_U$ e $\Phi_t(D_U) \subseteq D_U$. Da ciò e dall'ipotesi $\alpha|_D = 0$ segue subito che per le immagini trasposte $\Phi^* \alpha$ e $\Phi_t^* \alpha$ di α si ha:

$$(\Phi^* \alpha)|_{D_U \times I} = 0 \tag{3.2}$$

$$(\Phi_t^* \alpha)|_{D_U} = 0 \quad , \quad \forall t \in I. \tag{3.3}$$

D'altra parte, per $p \geq 1$, separando nella forma $\Phi^* \alpha$ i termini contenenti dt da quelli che non lo contengono si ha:

$$\Phi^* \alpha = dt \wedge \beta + \Phi_t^* \alpha, \tag{3.4}$$

dove β, $\Phi_t^* \alpha$ sono rispettivamente una $(p-1)$-forma ed una p-forma prive di termini in dt, la seconda delle quali coincide con la forma dianzi considerata ma pensata su $U \times I$. Da (3.4), tenuto conto di (3.2, 3.3), si trae allora $(dt \wedge \beta)|_{D_U \times I} = 0$, il che implica:

$$\beta|_{D_U} = 0 \quad , \quad \forall t \in I. \tag{3.5}$$

La forma differenziale $\gamma = I\alpha = \int_0^1 \beta\, dt$, è allora una $(p-1)$-forma su U, di classe C^∞ per l'ipotesi *b*) della condizione (C), e nulla su D_U in virtù di (3.5). Poiché inoltre risulta, com'è noto, $d\gamma = \alpha|_U$, (cfr. ad esempio [12], p. 124), il Lemma è provato per $p \geq 1$; per $p = 0$ esso è banalmente vero.

4. – IL TEOREMA DI DE RHAM RELATIVO.

4.1. – Indichiamo con $\{\Omega^p(U, D)\}$ il prefascio su X che si ottiene associando ad ogni aperto $U \subset X$ l'$\mathbf{R}$-modulo $\Omega^p(U, D)$ delle p-forme C^∞ (a supporto qualunque) definite su U e nulle su D, e con $\{\mathring{\Omega}^p(U, D)\}$ il sottoprefascio del precedente costituito dalle p-forme chiuse; gli omomorfismi di restrizione essendo quelli naturali.

Per l'immagine $d\Omega^p(U, D)$ di $\Omega^p(U, D)$ mediante l'operatore d di differenziazione esterna, si ha $d\Omega^p(U, D) \subset \Omega^{p+1}(U, D)$; dal Lemma 1, segue quindi che in ogni aperto U in cui esista una contrazione soddisfacente alla condizione (C), la successione:

$$(4.1) \qquad 0 \longrightarrow \mathring{\Omega}^p(U, D) \longrightarrow \Omega^p(U, D) \longrightarrow \mathring{\Omega}^{p+1}(U, D) \longrightarrow 0$$

è *esatta*.

Poiché in ogni punto $x \in X$ esiste per ipotesi una base di intorni U del tipo ora considerato, si può passare in ogni punto al limite diretto di (4.1). Indicati con $\tilde{\Omega}^p$ e $\mathring{\tilde{\Omega}}^p$ i fasci di germi corrispondenti rispettivamente ai prefasci $\{\Omega^p(U, D)\}$ e $\{\mathring{\Omega}^p(U, D)\}$, si ottiene dunque la successione esatta di fasci:

$$(4.2) \qquad 0 \longrightarrow \mathring{\tilde{\Omega}}^p \xrightarrow{i} \tilde{\Omega}^p \xrightarrow{d} \mathring{\tilde{\Omega}}^{p+1} \longrightarrow 0$$

e quindi anche la successione esatta:

$$(4.3) \qquad 0 \longrightarrow \mathring{\tilde{\Omega}}^0 \xrightarrow{i} \tilde{\Omega}^0 \xrightarrow{d} \tilde{\Omega}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tilde{\Omega}^p \longrightarrow \cdots .$$

Con l'ausilio di partizioni dell'unità (di classe C^∞) può provarsi, come nel caso assoluto, che i fasci $\tilde{\Omega}^p$ $(p = 0, 1, \cdots)$ sono *fini* (2); inoltre, indicato con $\mathbf{R}_{X-D}$ il fascio semplice dei reali concentrato su $X - D$, si ha ovviamente:

$$(4.4) \qquad \mathring{\tilde{\Omega}}^0 = \mathbf{R}_{X-D}.$$

Si conclude quindi con il

LEMMA 2. – *La successione esatta:*

$$(4.5) \qquad 0 \longrightarrow \mathbf{R}_{X-D} \xrightarrow{i} \tilde{\Omega}^0 \xrightarrow{d} \tilde{\Omega}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tilde{\Omega}^p \longrightarrow \cdots$$

è una risoluzione fina del fascio $\mathbf{R}_{X-D}$.

4.2. – Una volta provato il Lemma 2, i risultati cui miriamo possono ottenersi seguendo sostanzialmente la linea concettuale del caso del teorema di De Rham assoluto. Ciò ci condurrà in primo luogo ad un teorema di isomorfismo tra coomologia di Čech a coefficienti nel fascio $\mathbf{R}_{X-D}$ e coomologia di De Rham relativa. Servendosi poi delle relazioni tra coomologia di Čech a coefficienti in un fascio concentrato e coomologia di Čech relativa, perverremo al risultato conclusivo.

L'$\mathbf{R}$-modulo $\Gamma(X, \tilde{\Omega}^q)$ delle sezioni globali del fascio $\tilde{\Omega}^q$ si identifica con l'$\mathbf{R}$-modulo $\Omega^q(X, D)$ delle q-forme C^∞ definite su X, nulle su D, e analogamente l'$\mathbf{R}$-modulo $\Gamma(X, \mathring{\tilde{\Omega}}^q)$ s'identifica con l'$\mathbf{R}$-modulo $\mathring{\Omega}^q(X, D)$ delle q-forme chiuse. In forza del Lemma 2 si può applicare al fascio $\mathbf{R}_{X-D}$ e alla sua risoluzione (4.5) il teorema generale d'isomorfismo tra gruppi di

(2) Si ricordi che un *fascio fino* F su uno spazio paracompatto X – la cui definizione può vedersi ad esempio in [1], Exp. XVI, o [7], n. 2.11 – gode dell'importante proprietà di annullare, per ogni $q \geq 1$, il gruppo di coomologia $\check{H}^q(X; F)$.

Čech e gruppi di coomologia del complesso delle sezioni globali (cfr. H. Cartan [1], Exp. XVII, p. 1, Th. 1; F. Hirzebruch [7], p. 39, Th. 2. 12. 1). Ciò da:

$$\begin{cases} \check{H}^0(X; \mathbf{R}_{X-D}) = \ker(\Omega^0(X, D) \longrightarrow \Omega^1(X, D)) & (4.6)_{I} \\ \check{H}^q(X; \mathbf{R}_{X-D}) = \mathring{\Omega}^q(X, D)/d\Omega^q(X, D), \quad (q \geq 1), & (4.6)_{II} \end{cases}$$

essendo appunto $\check{H}^q(X; \mathbf{R}_{X-D})$, $(q \geq 0)$, gli $\mathbf{R}$-moduli di coomologia di Čech di X a coefficienti nel fascio $\mathbf{R}_{X-D}$.

Ora $\ker(\Omega^0(X, D) \to \Omega^1(X, D))$ coincide con lo zeresimo $\mathbf{R}$-*modulo di De Rham di* X *mod.* D, $R^0(X, D; \mathbf{R})$, che è nullo, mentre il secondo membro di $(4.6)_{II}$ uguaglia il q-esimo $\mathbf{R}$-modulo di De Rham di X mod. D, $R^q(X, D; \mathbf{R})$, per $q \geq 1$. Si ha pertanto l'isomorfismo (3):

$$R^q(X, D; \mathbf{R}) \approx \check{H}_q(X; \mathbf{R}_{X-D}), \qquad (q \geq 0). \tag{4.7}$$

4.3. – A secondo membro della (4.7) appaiono gli $\mathbf{R}$-moduli di coomologia di Čech a coefficienti nel fascio concentrato $\mathbf{R}_{X-D}$ e a supporti qualunque, cioè a supporti nella famiglia C (X) dei chiusi di X.

Poiché X è paracompatta e D chiuso in X, indicata con $C(X)|_{X-D}$ la famiglia (paracompattificante in X — D) dei chiusi di X contenuti in X — D, è noto che sussiste l'isomorfismo (cfr. Godement [5], p. 234):

$$\check{H}^q_{C(X)}(X; \mathbf{R}_{X-D}) \approx \check{H}^q_{C(X)|_{X-D}}(X - D; \mathbf{R}) \tag{4.8}$$

dove $\check{H}^*_{C(X)|_{X-D}}(X - D; \mathbf{R})$ è la coomologia di Čech dello spazio differenza X — D, a coefficienti nel fascio semplice dei reali $\mathbf{R}$ e a supporti appartenenti alla famiglia $C(X)|_{X-D}$.

Ora la coomologia $\check{H}^*_{C(X)|_{X-D}}(X - D; \mathbf{R})$ si può interpretare come coomologia costruita a partire da complessi di cocatene di Čech nulle sui simplessi del nervo il cui supporto incontra D; in altri termini si può interpretare come coomologia di Čech relativa $\check{H}^*(X \text{ mod. } D; \mathbf{R})$. Si ha cioè (cfr. Godement [5], pp. 234–35):

$$\check{H}^q_{C(X)|_{X-D}}(X - D; \mathbf{R}) \approx \check{H}^q(X \text{ mod. } D; \mathbf{R}). \tag{4.9}$$

Dal confronto di (4.7), (4.8), (4.9) discende dunque il

TEOREMA 1. – *Se* X *è una varietà differenziabile reale di classe* C^∞, *e* D *un suo sottoinsieme (chiuso) differenziabile* (n. 1) *verificante la condizione* (C) (n. 2.1), *la coomologia (di De Rham) delle forme reali* C^∞ *su* X, *nulle su* D, *è isomorfa alla coomologia di Čech di* X *mod.* D, *a coefficienti reali:*

$$R^q(X, D; \mathbf{R}) \approx \check{H}^q(X \text{ mod. } D, \mathbf{R}). \tag{4.10}$$

(3) Qui e in seguito s'intenderà sempre di riferirsi ad isomorfismi di spazi vettoriali su $\mathbf{R}$.

4.4. – Il medesimo teorema vale anche per la coomologia singolare relativa. Infatti X, quale varietà differenziabile, è uno spazio localmente contrattile e pure D lo è per la condizione (C); pertanto la coomologia singolare relativa $\overset{s}{\mathrm{H}}{}^*(\mathrm{X} \bmod \mathrm{D}; \mathbf{R})$, a coefficienti reali, è isomorfa a quella relativa di Čech (cfr. H. Cartan [1], Exp. XX, p. 2; S. Mardesic [10]). Si ha quindi il:

COROLLARIO. – *Nelle ipotesi del Teorema* 1 *la coomologia* (*di De Rham*) *delle forme reali* C^∞ *su* X, *nulle su* D, *è isomorfa alla coomologia singolare di* X mod. D, *a coefficienti reali:*

$$\mathrm{R}^q(\mathrm{X}, \mathrm{D}; \mathbf{R}) \approx \overset{s}{\mathrm{H}}{}^q(\mathrm{X} \bmod \mathrm{D}; \mathbf{R}). \tag{4.11}$$

5. – La dualità tra coomologia di De Rham e omologia singolare relativa.

Applicando il teorema dei coefficienti universali al complesso libero di catene che serve per definire l'omologia singolare $\overset{s,c}{\mathrm{H}}_*(\mathrm{X} \bmod \mathrm{D}; \mathbf{Z})$ di X mod. D, a coefficienti interi e a supporti compatti (catene finite), tenuto conto che $\mathbf{R}$ è un campo, si ha (cfr. ad esempio [4], p. 161):

$$\overset{s}{\mathrm{H}}{}^q(\mathrm{X} \bmod \mathrm{D}; \mathbf{R}) \approx \mathrm{Hom}(\overset{s,c}{\mathrm{H}}_q(\mathrm{X} \bmod \mathrm{D}; \mathbf{Z}), \mathbf{R}). \tag{5.1}$$

Poiché $\mathbf{R}$ ha caratteristica zero, indicato con T_q il sottogruppo di torsione di $\overset{s,c}{\mathrm{H}}_q(\mathrm{X} \bmod \mathrm{D}; \mathbf{Z})$ e con ${}_w\overset{s,c}{\mathrm{H}}_q(\mathrm{X} \bmod \mathrm{D}; \mathbf{Z}) = \overset{s,c}{\mathrm{H}}_q(\mathrm{X} \bmod \mathrm{D}; \mathbf{Z})/\mathrm{T}_q$ il q-esimo gruppo di omologia singolare di X mod. D. a supporti compatti e a coefficienti interi con divisione, si ha (cfr. ad esempio [6], p. 191):

$$\mathrm{Hom}(\overset{s,c}{\mathrm{H}}_q(\mathrm{X} \bmod \mathrm{D}, \mathbf{Z}), \mathbf{R}) \approx \mathrm{Hom}({}_w\overset{s,c}{\mathrm{H}}_q(\mathrm{X} \bmod \mathrm{D}; \mathbf{Z}), \mathbf{R}). \tag{5.2}$$

Da (4.11), (5.1), (5.2) segue pertanto il:

TEOREMA 2. – *Nelle ipotesi del Teorema* 1, *la coomologia di De Rham* $\mathrm{R}^q(\mathrm{X}, \mathrm{D}; \mathbf{R})$ *è duale algebrica dell'omologia singolare relativa di* X mod. D, *a supporti compatti e a coefficienti interi con divisione:*

$$\mathrm{R}^q(\mathrm{X}, \mathrm{D}; \mathbf{R}) \approx \mathrm{Hom}({}_w\overset{s,c}{\mathrm{H}}_q(\mathrm{X} \bmod \mathrm{D}, \mathbf{Z}), \mathbf{R}).$$

Bibliografia.

[1] H. Cartan, Séminaire E.N.S., 1950–51 (Paris, 1955).

[2] G. De Rham, a) *Variétés différentiables* (Hermann, Paris 1955); b) *La Théorie des formes différentielles éxterieures et l'homologie des variétés différentiables*. (Corso CIME, 1960), « Rend. Mat. Univ. Roma », *20*, 105–46 (1961).

[3] G. F. D. Duff, *Differential forms in manifolds with boundary*, « Ann. of Math. » *56*, 115–127 (1952).

[4] S. Eilenberg–N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*. (Princeton Univ. Press, 1952).

[5] R. GODEMENT, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* (Hermann, Paris 1958).
[6] P. J. HILTON–S. WYLIE, *Homology theory.* (Cambridge Univ. Press, 1960).
[7] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie,* « Erg. der Math. », Neue Folge, Heft 9, Springer Verlag, Berlin 1956.
[8] W. HODGE, *Differential forms in algebraic geometry.* (Corso CIME), « Rend. Mat. Univ. Roma », *20,* 172–234 (1961).
[9] J. LERAY, *Le calcul différentiel et integral sur une variété analytique complexe. Problème de Cauchy III,* « Bull. S.M.F. », *87,* 81–180 (1959).
[10] S. MARDESIC, *Comparison of singular and Čech homology for locally connected spaces,* «Mich. Math. J.», *6,* 151–166 (1959).
[11] A. W. TUCKER, a) *A boundary-value theorem for harmonic tensors,* « Bull. A.M.S. », *47,* 714 (1941); b) *A relative theory of tensors and their integrals.* (Non pubblicato); c) *Boundary theorems of tensor analysis in the large.* (Non pubblicato).
[12] A. WEIL, *Sur les théorèmes de De Rham,* «C.M.H.», *26,* 119–145 (1952).