
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MARIO COMO

La funzione di influenza per la piastra libera circolare. Nota II

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.6, p. 509–514.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_509_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *La funzione di influenza per la piastra libera circolare.* Nota II (*) di MARIO COMO, presentata dal Socio G. KRALL.

Per il calcolo della (16), espressione bilineare della funzione di Green, occorre anzitutto determinare i corrispondenti autovalori $\gamma_{mn} R$, le costanti C_{mn} e le norme integrali φ_{mn} del sistema ortogonale di autofunzioni (15). A tal fine si scrivono le condizioni al contorno associate all'equazione (2) della piastra vibrante:

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + (1 - \nu) \frac{\partial}{r \partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \end{cases}$$

per $r = R$.

Esse, per le (15), conducono all'equazione cosiddetta « delle frequenze » (4):

$$(20) \quad \frac{\gamma^2 R^2 J_n(\gamma R) + (1 - \nu) [\gamma R J'_n(\gamma R) - n^2 J_n(\gamma R)]}{\gamma^2 R^2 I_n(\gamma R) - (1 - \nu) [\gamma R I'_n(\gamma R) - n^2 I_n(\gamma R)]} = \frac{\gamma^3 R^3 J'_n(\gamma R) + (1 - \nu) n^2 [\gamma R J'_n(\gamma R) - J_n(\gamma R)]}{\gamma^3 R^3 I'_n(\gamma R) - (1 - \nu) n^2 [\gamma R I'_n(\gamma R) - I_n(\gamma R)]}$$

da cui scaturiscono gli autovalori $\gamma_{mn} R$; di questi i primi e più importanti sono riportati nella Tabella I.

TABELLA I.

		$\gamma_{mn} R$			
$m \backslash n$	0	1	2	3	
0	0	0	2,31990	3,52989	
1	2,99999	4,53035	5,90014	7,29960	
2	6,29991	7,59991	9,19987	10,39990	
3	9,49957	10,94990	12,36900	13,80060	

(*) Pervenuta all'accademia il 2 ottobre 1963.

(4) Op. cit. in (3).

In relazione ad essi si sono così calcolate le costanti C_{mn} e le norme integrali φ_{mn} . Le prime sono fornite da

$$(21) \quad C_{mn} = \frac{\gamma_{mn}^2 R^2 J_n(\gamma_{mn} R) + (1-\nu) [\gamma_{mn} R J_n'(\gamma_{mn} R) - n^2 J_n(\gamma_{mn} R)]}{\gamma_{mn}^2 R^2 I_n(\gamma_{mn} R) - (1-\nu) [\gamma_{mn} R I_n'(\gamma_{mn} R) - n^2 I_n(\gamma_{mn} R)]}$$

e sono riportate nella Tabella II.

TABELLA II.

		C_{mn}			
$m \backslash n$	0	1	2	3	
0			0,213144	0,0910175	
1	- 0,0856842	- 0,0191983	- 0,02562877	- 0,02184180	
2	0,02310803	0,03703509	0,03190120	0,04575263	
3	- 0,03126179	- 0,04285001	- 0,05728804	- 0,05204428	

Le norme integrali φ_{mn} , definite dalle

$$(22) \quad \begin{aligned} \varphi_{mn} &= \int_{\Omega} \mu [J_n(\gamma_{mn} r) + C_{mn} I_n(\gamma_{mn} r)]^2 \cos^2 n\theta \, d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \mu [J_n(\gamma_{mn} r) + C_{mn} I_n(\gamma_{mn} r)]^2 \sin^2 n\theta \, d\Omega \quad (\text{per } m, n \neq 0) \end{aligned}$$

risultano espresse dalle

$$(23) \quad \begin{aligned} \varphi_{mn} &= \mu \pi R^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[J_n'^2(\gamma_{mn} R) + \left(1 - \frac{n^2}{\gamma_{mn}^2 R^2} \right) J_n^2(\gamma_{mn} R) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_{mn}^2}{2} \left[I_n'^2(\gamma_{mn} R) - \left(1 + \frac{n^2}{\gamma_{mn}^2 R^2} \right) I_n^2(\gamma_{mn} R) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{mn}}{\gamma_{mn} R} [J_n(\gamma_{mn} R) I_n'(\gamma_{mn} R) - J_n'(\gamma_{mn} R) I_n(\gamma_{mn} R)] \right\}, \end{aligned}$$

mentre per $n = 0$ e $m \neq 0$ si ha:

$$(24) \quad \begin{aligned} \varphi_{m0} &= 2 \pi R^2 \mu \left\{ \frac{1}{2} [J_0'^2(\gamma_{m0} R) + J_0^2(\gamma_{m0} R)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_{m0}^2}{2} [I_0'^2(\gamma_{m0} R) - I_0^2(\gamma_{m0} R)] + \frac{C_{m0}}{\gamma_{m0} R} [J_0(\gamma_{m0} R) I_0'(\gamma_{m0} R) - J_0'(\gamma_{m0} R) I_0(\gamma_{m0} R)] \right\} \end{aligned}$$

operando con formule di ricorrenza delle funzioni di Bessel ⁽⁵⁾.

(5) Cfr. G. N. WATSON, *Theory of Bessel functions*, Cambridge Un. Press. London 1922.

Avvalendosi delle (23) e (24) si è proceduto al calcolo delle φ_{mn} ; esse sono riportate nella Tabella III.

TABELLA III.

$m \backslash n$		$\varphi_{mn}/R^2 \mu$			
		0	1	2	3
0	0	3,141593	0,785358	0,237906	0,154560
1	0	0,650105	0,214165	0,158278	0,128793
2	0	0,330467	0,123881	0,106800	0,0886538
3	0	0,219277	0,0917898	0,0795303	0,0707849

Preparato così l'algoritmo necessario si è proceduto al calcolo della $G(P, P')$ con il numero esauriente di termini corrispondente alla determinazione degli indici $m = 0; 1; 2; 3$; $n = 0; 1; 1; 3$ corrispondente alle Tabelle I e II.

Nella Tabella IV sono riportati i valori $\frac{B}{R^2} G(P, P')$ per le seguenti scelte dei parametri:

$$\frac{r}{R}, \frac{r'}{R} = 0; 0,25; 0,50; 0,75; 1,0.$$

$$\theta' = 0 \quad ; \quad \theta = 0; 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ; 120^\circ; 150^\circ; 180^\circ.$$

APPENDICE.

Si applica la forma bilineare (16) per il calcolo della funzione di influenza della piastra *circolare incastrata al contorno*. Le condizioni al contorno $(w)_{r=R} = 0$ e $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=R} = 0$ conducono all'equazione delle frequenze:

$$(25) \quad \frac{J_{n-1}(\gamma R)}{J_n(\gamma R)} = \frac{I_{n-1}(\gamma R)}{I_n(\gamma R)}$$

e quindi agli autovalori, calcolati dal Kirchoff (Tabella V), tutti $\neq 0$ ⁽⁶⁾.

Le C_{mn} corrispondenti figurano nella Tabella VI.

Operando come in precedenza sono state anzitutto calcolate le norme integrali φ_{mn} ; esse sono riportate in Tabella VII. Si è calcolata così la $G(P, P')$ (Tabella VII) con la stessa scelta dei parametri $r; r'; \theta; \theta'$ fatta per la piastra libera.

(6) Op. cit. in (3).

TABELLA IV.

$$\frac{G(P, P')}{R^2/B}$$

	r'	r	o	0,25 R	0,5 R	0,75 R	R
$\theta = 0^\circ$	o		0,0183685				
	0,25 R		0,0142255	0,0160861			
	0,5 R		0,0 ² 573494	0,0 ² 986347	0,0132683		
	0,75 R		- 0,0 ² 284440	0,0 ² 3855948	0,0120618	0,0276769	
	R		- 0,0110482	- 0,0 ² 738265	0,0134211	0,0436984	0,0870764
$\theta = 30^\circ$	o		0,0183685				
	0,25 R		0,0142255	0,0149968			
	0,5 R		0,0 ² 573494	0,0 ² 830976	0,0 ² 860280		
	0,75 R		- 0,0 ² 284440	- 0,0 ² 3847264	0,0 ² 491299	0,0122656	
	R		- 0,0110482	- 0,0 ² 941529	0,0 ² 304318	0,0191155	0,0426028
$\theta = 60^\circ$	o		0,0183685				
	0,25 R		0,0142255	0,0126339			
	0,5 R		0,0 ² 573494	0,0 ² 518436	0,0 ² 5740		
	0,75 R		- 0,0 ² 284440	- 0,0 ² 404997	- 0,0 ² 793592	- 0,0146678	
	R		- 0,0110482	- 0,0129914	- 0,0155570	- 0,0233631	- 0,0328407
$\theta = 90^\circ$	o		0,0183685				
	0,25 R		0,0142255	0,0106015			
	0,5 R		0,0 ² 573494	0,0 ² 316304	- 0,0 ² 369113		
	0,75 R		- 0,0 ² 284440	- 0,0 ² 535253	- 0,0122426	- 0,0223524	
	R		- 0,0110482	- 0,0136323	- 0,0215735	- 0,0344450	- 0,0509292
$\theta = 120^\circ$	o		0,0183685				
	0,25 R		0,0142255	0,0 ² 954621			
	0,5 R		0,0 ² 573494	0,0 ² 310587	- 0,0 ² 3888540		
	0,75 R		- 0,0 ² 284440	- 0,0 ² 367461	- 0,0 ² 529981	- 0,0 ² 713623	
	R		- 0,0110482	- 0,0100568	+ 0,0110090	- 0,0 ² 938971	- 0,0 ² 877812
$\theta = 150^\circ$	o		0,0183685				
	0,25 R		0,0142255	0,0 ² 913751			
	0,5 R		0,0 ² 573494	0,0 ² 390878	0,0 ² 351336		
	0,75 R		- 0,0 ² 284440	- 0,0 ² 916356	0,0 ² 435027	0,0117324	
	R		- 0,0110482	- 0,0 ² 520007	0,0 ² 355260	0,0204061	0,0362576
$\theta = 180^\circ$	o		0,0183685				
	0,25 R		0,0142255	0,0 ² 902525			
	0,5 R		0,0 ² 573494	0,0 ² 431922	0,0 ² 534736		
	0,75 R		- 0,0 ² 284440	0,0 ² 360912	0,0 ² 845100	0,0192219	
	R		- 0,0110482	- 0,0 ² 301633	0,0 ² 975554	0,0319604	0,0520236

TABELLA V.

		$\gamma_{mn} R$			
$m \backslash n$	0	1	2	3	
0	3,1961	4,6110	5,9056	7,1433	
1	6,3064	7,7993	9,1967	10,537	
2	9,4395	10,958	12,402	13,795	
3	12,577	14,108	15,579		
4	15,716				

TABELLA VI.

		$C_{m,n}$			
$m \backslash n$	0	1	2	3	
0	0,0557128	0,0152162	0,0 ² 523458	0,0 ² 201321	
1	-0,0 ² 253015	-0,0 ³ 608147	-0,0 ³ 175310	-0,0 ⁴ 565009	
2	0,0 ³ 110987	0,0 ⁴ 254845	0,0 ⁵ 675364	0,0 ⁵ 197689	
3	-0,0 ⁵ 483095	-0,0 ⁵ 108324	-0,0 ⁶ 273207		
4	0,0 ⁶ 209655				

TABELLA VII.

		$\varphi_{mn}/R^2 \mu$			
$m \backslash n$	0	1	2	3	
0	0,64022	0,21098	0,15667	0,12402	
1	0,31850	0,12719	0,10573	0,09034	
2	0,21224	0,09091	0,07947	0,07055	
3	0,15917	0,07073	0,06363		
4	0,12733				

TABELLA VIII.

$$\frac{G(P, P')}{R^2/B}$$

	r'	o	0,25 R	0,5 R	0,75 R	R
$\theta = 0$	o	0,0196317				
	0,25 R	0,0152115	0,0171533			
	0,5 R	0,0 ² 804301	0,0108207	0,0103390		
	0,75 R	0,0 ² 226064	0,0 ² 332179	0,0 ² 396249	0,0 ² 267664	
	R	o	o	o	o	o
$\theta = 30^\circ$	o	0,0196317				
	0,25 R	0,0152115	0,0162220			
	0,5 R	0,0 ² 804301	0,0 ² 997427	0,0 ² 858733		
	0,75 R	0,0 ² 226064	0,0 ² 303099	0,0 ² 313903	0,0 ² 183369	
	R	o	o	o	o	o
$\theta = 60^\circ$	o	0,0196317				
	0,25 R	0,0152115	0,0141605			
	0,5 R	0,0 ² 804301	0,0 ² 817140	0,0 ² 532902		
	0,75 R	0,0 ² 226064	0,0 ² 240827	0,0 ² 165884	0,0 ³ 466566	
	R	o	o	o	o	o
$\theta = 90^\circ$	o	0,0196317				
	0,25 R	0,0152115	0,0122472			
	0,5 R	0,0 ² 804301	0,0 ² 662599	0,0 ² 347111		
	0,75 R	0,0 ² 226064	0,0 ² 187382	0,0 ³ 927020	0,0 ³ 102596	
	R	o	o	o	o	o
$\theta = 120^\circ$	o	0,0196317				
	0,25 R	0,0152115	0,0109988			
	0,5 R	0,0 ² 804301	0,0 ² 568544	0,0 ² 299784		
	0,75 R	0,0 ² 226064	0,0 ² 156219	0,0 ³ 848020	0,0 ³ 353684	
	R	o	o	o	o	o
$\theta = 150^\circ$	o	0,0196317				
	0,25 R	0,0152115	0,0102671			
	0,5 R	0,0 ² 804301	0,0 ² 509225	0,0 ² 250879		
	0,75 R	0,0 ² 226064	0,0 ² 138511	0,0 ³ 673470	0,0 ³ 216679	
	R	o	o	o	o	o
$\theta = 180^\circ$	o	0,0196317				
	0,25 R	0,0152115	0,0100007			
	0,5 R	0,0 ² 804301	0,0 ² 485071	0,0 ² 214178		
	0,75 R	0,0 ² 226064	0,0 ² 131713	0,0 ³ 502835	-0,0 ⁴ 112170	
	R	o	o	o	o	o