Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giulio Krall, Domenico Caligo

Stati tenso-flessionali nelle volte e λcr critici corrispondenti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.3, p. 277–280.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_3_277_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 marzo 1964

Presiede il Socio anziano GIORGIO ABETTI

NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Stati tenso-flessionali nelle volte e λ_{cr} critici corrispondenti.* Nota di GIULIO KRALL e DOMENICO CALIGO, presentata [*] dal Socio G. KRALL.

In una Nota precedente [1] abbiamo fatto vedere come uno stato flessionale in un arco non influisca sullo sforzo assiale critico per flessione *nel suo piano*. Ciò era noto per una trave rettilinea, caso limite dell'arco, che, inflessa o no, ha nel campo elastico sempre lo stesso sforzo assiale critico, il carico di Eulero.

Abbiamo estesa la deduzione, fatta per l'arco, ad una volta cilindrica riguardandola, in una prima schematizzazione, come costituita da archi lamellari indipendenti; poi, come orditura ortogonale costituita dagli stessi archi e da lamelle rettilinee (le generatrici del cilindro).

Ma il calcolo del moltiplicatore critico dei carichi esterni, cioè del grado di sicurezza all'instabilità, implica la conoscenza del lavoro di second'ordine $\mathfrak{L}_2^*$ degli sforzi interni; e poiché si tratta ora, oltre che di sforzi assiali, anche di momenti, per apprezzare il lavoro di second'ordine $\mathfrak{L}_{2,M}^*$ fatto dai momenti dello stato flessionale si sono dovute calcolare sino al secondo ordine le corrispondenti caratteristiche $\varkappa$ della deformazione flessionale (brevemente, le

(*) Nella seduta del 14 marzo 1964.

(1) G. KRALL e D. CALIGO, *Ha influenza la flessione sul λ_{cr} critico di una volta cilindrica?*, in questi «Rend.», ser. VIII, vol. XXXIV, fasc. 4 (aprile 1963), 340–344.

cosiddette *changes of curvature* del Love [2], chiamate così anche se, generalmente, non sono le variazioni di curvatura).

Di queste $\varkappa$ erano ben noti i termini del prim'ordine, non quelli occorrenti del secondo.

Nella prima schematizzazione la bontà dei risultati era garantita da nostri calcoli secondo vie diverse relativamente a deformazioni di archi nel loro piano [3] e, soprattutto, da deduzioni assai più generali del prof. G. Ferrarese per i solidi tubolari [4].

Per la seconda schematizzazione ci siamo limitati a identificare la $\varkappa_2^{(2)}$ lungo la direttrice con la $\varkappa^{(2)}$ degli archi, la $\varkappa_1^{(2)}$ lungo le generatrici con la $\varkappa^{(2)}$ delle aste rettilinee, che è nulla, come si può provare elementarmente. Infine per le $\varkappa_{12}^{(2)}$ non restò, attesa la impostazione, che calcolare le variazioni angolari della tangente in due punti della direttrice deformata e rapportarle, anziché al ds (indeformato) dell'arco, al dx (indeformato) della generatrice [5]. Le $\varkappa^{(2)}$ così calcolate risultarono nulle per deformazioni prive di estensione ($e^{(1)} = 0$), o praticamente trascurabili per deformazioni estensionali di archi (nel loro piano) o di volte cilindriche sottili, così da portare a concludere che *sempre* l'influenza di uno stato flessionale sul λ_{cr}, riferito allo stato tensionale principale, è dell'ordine h/R (h è lo spessore, R è il raggio della volta).

Naturalmente venne fatto di chiederci se il calcolo rigoroso delle $\varkappa_1^{(2)}$, $\varkappa_2^{(2)}$, $\varkappa_{12}^{(2)}$ per le volte, così come si era fatto per le $\varkappa_2^{(2)}$ degli archi, desse risultati concordanti con quelli desunti nel modo sopra accennato.

Le formule esatte per le $\varkappa_1^{(2)}$, $\varkappa_2^{(2)}$, $\varkappa_{12}^{(2)}$ non sono in tutto conformi e, ciò che è sorprendente, non sono univoche, nel senso che ci sono due modi, egualmente legittimi, di calcolarle con risultati non equivalenti per le $\varkappa_{12}$, non solo del secondo ordine ma anche del prim'ordine secondo Love, almeno nel caso estensionale.

Sia come si vuole, resta naturalmente valida la conclusione che è trascurabile l'influenza sul λ_{cr} dei momenti (è dell'ordine h/R rispetto a quella degli sforzi assiali), ma nel caso non estensionale da noi considerato non si annulla la $\varkappa_2^{(2)}$, mentre si annulla ancora la $\varkappa_1^{(2)}$ e, secondo uno dei due modi di calcolo (quello che dà la $\varkappa_{12}^{(1)}$ di Love), la $\varkappa_{12}^{(2)}$.

Questa non univocità del calcolo e dei risultati dello stesso viene posta in luce da G. Ferrarese in un importante studio *Sulle deformazioni finite di una volta*, di cui la prima parte appare proprio in questo fascicolo di Rendiconti. La ragione sta nella circostanza che nella teoria del Love, sulla superficie trasformata C′ per spostamenti u, v, w dei punti P di una assegnata superficie C, il calcolo delle $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}$ si riferisce ad una terna mobile ortogonale T″, che ha comuni necessariamente due soli assi

(2) A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (The Univ. Press, Cambridge, 1952), cap. XXIV.

(3) Ved. nota cit. (1) (leggi in quella $\mathfrak{L}^*_{2,\mathrm{M}}$ in luogo di $\mathfrak{L}_{2,\mathrm{M}}$) formule (2(2)).

(4) G. FERRARESE, *Sulle caratteristiche di deformazione di una barra curva*; questi « Rend. », ser. VIII, vol. XXXIV, fasc. 6 (giugno 1963), 628–635.

(5) Ved. nota cit. (1), formule (2(2))*.

con la terna trasformata T′ (ovviamente non ortogonale) della originaria T (ortogonale), sulla C, data dalla normale $\vec{n}$ e dalle due tangenti $\vec{t_1}, \vec{t_2}$ alle linee di curvatura l_1, l_2 passanti per P (6).

Le linee l'_1, l'_2 di C′ — trasformate delle l_1, l_2 di C — non risultano generalmente anch'esse ortogonali e non è più ortogonale la terna T′ $(\vec{n'}, \vec{t'_1}, \vec{t'_2})$. Perciò occorre adottare una convenzione per la scelta della terna ortogonale T″ di riferimento sulla C′; si possono considerare due eventualità:

α) si sceglie la T″ con $\vec{n''} = \vec{n'}$ e $\vec{t''_1} = \vec{t'_1}$ e con l'asse $\vec{t''_2}$ ortogonale al piano $\vec{n''}\,\vec{t''_1}$; questo $\vec{t''_2}$ non è, ovviamente, tangente alla l'_2 in P′;

β) anziché $\vec{t''_1}$ coincidente con $\vec{t'_1}$, si può scegliere $\vec{t''_2} = \vec{t'_2}$ e l'asse $\vec{t''_1}$ ortogonale a $\vec{n''}\,\vec{t''_2}$ (quindi non tangente alla l'_1).

La convenzione α) è quella adottata dal Love; con la β) si hanno risultati diversi.

Dalle formule complete del Ferrarese (cfr. in particolare la Nota III) qui ci limitiamo a trarre qualche risultato interessante per le volte cilindriche.

Assumendo la convenzione α) ed essendo l_1, l_2 le generatrici (x = var.) rispettivamente le direttrici (ψ = var.) ed R = cost. si ha per le $\varkappa^{(1)}$ in generale

$$\varkappa_1^{(1)} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \quad \varkappa_2^{(1)} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial w}{\partial\psi} + v\right) \quad , \quad \varkappa_{12}^{(1)} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial\psi} + v\right),$$

cioè le espressioni del Love (7).

Con la convenzione β) si ha invece:

$$\varkappa_1^{(1)} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \quad \varkappa_2^{(1)} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial w}{\partial\psi} + v\right) \quad , \quad \varkappa_{12}^{(1)} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R}\right)$$

cioè le $x_1^{(1)}, \varkappa_2^{(1)}$ del Love, ma non più la $\varkappa_{12}^{(1)}$ (8).

Accennando appena alla questione, che nasce da questo risultato, per il calcolo del potenziale elastico, rileviamo che per le $\varkappa^{(2)}$ *relative a deformazioni prive di estensione* si deduce dalle formule generali del Ferrarese:

$$\alpha) \qquad \varkappa_1^{(2)} = 0\,, \quad \varkappa_2^{(2)} = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} - \frac{1}{2R}\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \quad \varkappa_{12}^{(2)} = 0;$$

$$\beta) \qquad \varkappa_1^{(2)} = 0\,, \quad \varkappa_2^{(2)} = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} - \frac{1}{2R}\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],$$

$$\varkappa_{12}^{(2)} = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\psi} + v\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial\psi} \text{ (8)};$$

cioè rimangono immutate le $\varkappa_1^{(2)}, \varkappa_2^{(2)}$, ma la $\varkappa_{12}^{(2)}$ non si annulla nell'eventualità β), in conformità con i nostri risultati.

(6) Sulla volta circolare cilindrica chiameremo l_1 la generatrice ed l_2 la direttrice, passanti per P.

(7) Ved. cit. (2), p. 543.

(8) Naturalmente le $\varkappa$ del caso β) non sono le $\varkappa$ del caso α) e converrebbe contrassegnarle, come fa Ferrarese, per significare che diversi sono i riferimenti nei due casi α) e β).

Anche questa circostanza solleva una questione importante, benché meno preoccupante del fatto che l'espressione del potenziale elastico non risulti invariante. Si tratta dell'$\mathfrak{L}_2^*$ flessionale, che è diverso nei due casi e ciò ha anche conseguenze sul valore del λ_{cr},

$$\lambda_{cr} = \min \frac{W}{\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_2^*} .$$

Sicché, anche trascurando *a priori* l'effetto dei momenti G_1, G_2, H_{12}, H_{21}, come fa Timoshenko [9], le equazioni euleriane non sono univocamente determinate. Quelle dedotte per le volte cilindriche per via diretta, studiando l'equilibrio di un elemento della superficie elastica, coincidono con quelle dedotte dalla teoria generale del Love secondo la convenzione α).

Scambiando la α) con la convenzione β) le equazioni risultano diverse, non già per la diversità di $\mathfrak{L}_2^*$ che, trascurando i momenti, viene a dipendere dalle sole $e^{(2)}$ (indipendenti, come si dimostra nelle Note citate, dalle convenzioni α) o β)), ma perché varia la $\varkappa_{12}^{(1)}$ che interviene nell'espressione di W non più univoco come tacitamente si crede.

(9) S. TIMOSHENKO, *Theory of elastic stability* (Mc Graw-Hill, N. Y., 1961), pp. 462, n. 11. 3. Ivi i momenti sono indicati con $M_x, M_y, M_{xy} (= -M_{yx})$; noi ci atteniamo, come nei precedenti lavori, alle notazioni del Love.