Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Octav Onicescu, Ion Bucur

## L’espace fibré de la relativité restreinte

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **36** (1964), n.4, p. 457–460.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_4_457_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

**Relatività.** — *L'espace fibré de la relativité restreinte.* – Nota di OCTAV ONICESCU e ION BUCUR, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

I. CONSIDÉRATIONS SUR LA NÉCESSITÉ DE LA REPRÉSENTATION PAR UN ESPACE FIBRÉ. – Une interprétation géometrique de l'univers physique, liée à la théorie de la relativité restreinte, est donnée d'une manière très adéquate, comme nous allons le voir, par un espace fibré E, construit comme il suit.

La fibre de cet espace est la variété à quatre dimensions V de Einstein–Minkowski, ayant la métrique $d\sigma^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Le groupe est celui de Lorentz–Poincaré.

Ce groupe a la double fonction suivante:

*a*) il laisse invariante chaque fibre séparément et les équations des phénomènes qui y sont mesurés;

*b*) il représente des correspondances biunivoques entre les fibres ce qui permet de reconnaître et de poursuivre les phénomènes localisés dans les différentes fibres qui correspondent aux différents points de la base.

Cette double fonction du groupe est susceptible de nous élibérer de certaines interprétations peu claires des conceptes d'observateur et de système de coordonnées d'espace et de temps, liées à l'observateur, attachés avec lui à la même fibre, ou des relations entre observateurs différents qui appartiennent à des fibres différentes.

Ces considérations ne nous mettrons plus dans l'obligation de renoncer aux concepts originaires intuitifs d'espace et de temps galiléen et newtonien qui sont liés à la base B de l'espace fibré.

Cette base est représentée, dans la plus grande partie des expériences physiques, à toutes les échelles, à commencer par celles nucléaires et en terminant avec celles relatives aux nébuleuses extragalactiques, par l'univers $\mathfrak{U}$ à 4 dimensions de Galilei–Newton, produit cartésien de l'espace euclidien $E_3$, où sont localisés les phénomènes spatiaux, et l'espace à une dimension $E_1$, où est localisé le temps: $\mathfrak{U} = E_3 \times E_1$, chacun de ses espaces ayant sa propre métrique.

Or il est evident que l'adoption de $\mathfrak{U}$ comme base de l'espace fibré doit satisfaire à la fois à deux exigences également obligatoires: celles de l'expérience, *b*) celles des théories déja acquises.

Nous laissons, dans la présente étude, de côté la gravitation et ses problèmes et considérons seulement les phénomènes électromagnetique attachés à une masse ponctuelle. La théorie respective est celle de Maxwell et elle impose, dans l'espace fibré que nous considerons, la fibre V, et le groupe $\mathfrak{G}$.

(*) Nella seduta dell'11 aprile 1964.

Il faudra alors examiner quelles sont les espaces base B de l'espace fibré E, dont V est la fibre et $\mathcal{G}$ le groupe, qui soient compatibles avec la structure, de cet espace.

Nous donnons, comme résultat de cette recherche, une caractérisation topologique de la base B, qui est compatible avec plusieurs modèles, et en premier lieu avec celui de Galilei–Newton, que nous pouvons donc conserver, jusqu'à ce que des nouvelles expériences nous imposent une autre choix dans l'ensemble de ces modèles.

Nous devons distinguer, dans le cadre l'espace fibré, entre la loi du phénomène physique tout au long de son développement et les transformations du groupe de Lorentz, soit à l'intérieur de chaque fibre séparément, soit dans la correspondance d'une fibre à une autre. La loi suit le phénomène, dans son *développement à l'intérieur de la base*, représenté, par exemple, à l'aide des équations de Maxwell. Mais, autour de chaque position–moment, les opérations de vérification et de mesure appartiennent à la fibre respective. De cette manière, la phémènologie poursuivie dans l'espace–temps qui constitue la base est, dans l'interprétation de l'espace fibré ici considérée, la trace de la succession des points des fibres respectives.

Le passage d'une position–moment à une autre position–moment est réalisée, par la loi du phénomène et, en même temps, par une transformation Lorentz–Poincaré entre les fibres succéssives.

L'espace représentatif des phénomènes est donc à 8 dimension. Sa construction est basée sur la notion de connexion infinitésimale. En même temps que la connexion infinitésimale nous attachons à la fibre une forme différentielle dont les valeurs, dans l'algèbre Lie du groupe, mettent en évidence les invariants caractéristiques de la structure fibrée et, en fin de compte, de la base qui nous intéresse spécialement.

2. LA CONSTRUCTION DES GÉNÉRATEURS DE L'ANNEAU CARACTÉRISTIQUE DE LA BASE. – Soit $\mathcal{G}$ le groupe de Lorentz du rang 4 et $(\mathrm{E}, p, \mathrm{B}, \mathcal{G})$ un espace fibré principal et différentiable.

Cela veut dire que toutes les variétés et toutes les applications sont différentiables de classe suffisamment grande. Nous nous proposons de trouver les expressions différentielles des générateurs dans l'anneau caractéristique de B. Nous ne faisons, pour commencer, aucune hypothèse en ce qui concerne la dimension de la variété. Elle pourrait être plus grande que 4. Les notions que nous utilisons pour définir la connexion infinitésimale de Ehresmann–Lichnerowicz sont les suivantes:

$\mathrm{T}_z$ est l'espace tangent à la variété E au point $z$;

$\mathrm{L}(\mathcal{G})$ est l'algèbre Lie du groupe $\mathcal{G}$: l'application $(x, y) \rightarrow [x, y]$ représente la fonction qui définit la structure d'algèbre Lie de $\mathrm{L}(\mathcal{G})$;

$\tau_g$ est l'homéomorphisme induit par l'élément $g$ de $\mathcal{G}$;

$\tau_g$ laisse invariantes les fibres de E et il est induit par les translations à droite de $\mathcal{G}$;

$\mathrm{V}_z$ est le sousespace de T tangent à la fibre qui contient $z$.

La famille des sousespaces $V_z$ est invariante par les homéomorphismes $\tau_g$.

Chaque vecteur de $V_z$ définit un élément bien déterminé dans $L(\mathcal{G})$. Si V est un espace vectoriel et $\varphi : V \to L(\mathcal{G})$ est une application linéaire, alors $[\varphi, \varphi]$: $V \times V \to L(\mathcal{G})$ représente la forme bilinéaire antisymmétrique définie par l'égalité

$$[\varphi, \varphi][\xi, \eta] = [\varphi(\xi), \varphi(\eta)].$$

*Une connexion* sur l'espace fibré $(E, p, B, \mathcal{G})$ est définie par la décomposition de l'espace $T_z$, pour chaque $z \in E$, sous la forme

$$T_z = V_z \otimes H_z \tag{1}$$

pour laquelle les conditions suivantes doivent être vérifiées:

*a*) le sousespace $H_z$ dépend sous forme différentielle du point $z$;

*b*) la famille des sousespaces $H_z$ est invariante par les homéomorphismes $\tau_g$; les éléments du sousespace $H_z$ sont *horizontaux*, ceux de $V_z$ sont verticaux.

La *forme de courbure* de la connexion. Utilisant la projection sur le sous espace $V_z$, donnée par la décomposition (1), il en résulte, simultanément avec la connexion infinitésimale sur l'espace $(E, p, B, \mathcal{G})$, une forme différentielle sur $\mathcal{G}$, ayant ses valeurs dans l'algèbre de Lie $L(\mathcal{G})$. Nous la désignons par $\omega$.

Si $\alpha \in T_z$, alors, par definition, $\omega(\alpha)$ est l'élément de $L(\mathcal{G})$ généré par la projection de $\alpha$ sur $V_z$.

La forme de courbure de cette connexion est donnée par l'expression

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

$\mathcal{G}$ étant un groupe linéaire, $\Omega$ met en évidence les composantes $\Omega_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ qui sont des formes différentielles réelles qui vérifient les relations

$$\begin{array}{ll} \Omega_{ii} = 0, & i = 1, 2, 3, 4 \\ \Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0, & i, j = 1, 2, 3; \; i \neq j \\ \Omega_{4i} = \Omega_{i4}, & i = 1, 2, 3. \end{array}$$

L'expression différentielle des invariants caractéristiques résulte du développement d'après les puissances de $\lambda$ du déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ -\Omega_{12} & \lambda & \Omega_{23} & \Omega_{24} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & \lambda & \Omega_{34} \\ \Omega_{14} & \Omega_{24} & \Omega_{34} & \lambda \end{vmatrix}.$$

Ce développement est donné par le polynome

$$\lambda^4 + \lambda^2 W_2 + W_4,$$

où les coéfficients $W_2$ et $W_4$ sont les formes définies sur B qui génèrent l'anneau caractéristique:

$$W_2 = \Omega_{12}^2 + \Omega_{13}^2 + \Omega_{23}^2 - \Omega_{14}^2 - \Omega_{24}^2 - \Omega_{34}^2$$

$$W_3 = W_1 = 0$$

$$W_4 = -(\Omega_{12}\,\Omega_{34} - \Omega_{13}\,\Omega_{24} + \Omega_{14}\,\Omega_{23})^2 .$$

3. CONSIDÉRATIONS FINALES. – On peut considérer les cochaînes définies à l'aide des formes $W_i$, en integrant sur les chaînes de l'espace B. On obtient en fait des cocycles et par suite des éléments bien détérminés dans l'anneau de cohomologie $H^*(B, R)$. Les sous-anneaux ainsi obtenus nous donnent la mesure de la distance entre l'espace fibré considéré et l'espace fibré trivial.