Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Ferrarese

Sulle deformazioni finite di una volta: caso bidimensionale. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.4, p. 467–474.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_4_467_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Meccanica. — *Sulle deformazioni finite di una volta: caso bidimensionale.* Nota II di GIORGIO FERRARESE, presentata (*) dal Socio G. KRALL.

In questa Nota II viene rielaborata la teoria del Love riguardante le deformazioni non linearizzate di una *volta*, sullo schema (a tre parametri) della sua superficie mediana. In particolare si mette in evidenza una *espressione sintetica* delle caratteristiche di deformazione relative alle variazioni di curvatura, nella quale figura (insieme alle derivate prime) un *unico vettore* [n. 2, (14)]. Quest'ultimo esprimibile a sua volta mediante le componenti di spostamento del punto generico della superficie (n. 4).

Viene altresì riconosciuta la possibilità di introdurre delle caratteristiche di deformazione più semplici di quelle del Love, coincidenti con queste nell'ambito della teoria linearizzata; ma pur esse, come quelle del Love, non completamente soddisfacenti, risentendo di una dissimmetria introdotta inevitabilmente con l'uso di una comoda terna trirettangola.

Vengono infine precisati i legami tra le caratteristiche di deformazione del Love e quelle suggerite dalla teoria tridimensionale di cui alla Nota I.

1. PREMESSE E RICHIAMI (cfr. [3] cap. XXIV). – Ordinariamente una volta viene schematizzata in una superficie materiale Σ (la superficie mediana), con la tacita condizione che, in *ogni* sua deformazione, le normali a Σ si trasformino nelle normali alla superficie deformata Σ'. Come è noto, uno schema siffatto (a tre parametri) è sufficiente per avviare lo studio della dinamica delle volte, a differenza di quanto accade per i solidi tubolari i quali, non potendo essere rappresentati soltanto da una linea materiale (la direttrice), richiedono uno schema ad almeno quattro parametri. Ciò nonostante, alla semplificazione dovuta al minor numero di parametri, da pensarsi ora funzioni di due variabili, anziché una, si contrappone l'impossibilità di definire delle caratteristiche di deformazione che non siano soggette a condizioni di congruenza. Del resto già le sei differenze $a'_{ik} - a_{ik}$ e $b'_{ik} - b_{ik}$ $(i\,,\ k = 1\,,2)$ che lo studio della deformazione di una volta, nell'ambito della teoria tridimensionale, suggerisce di assumere come caratteristiche di deformazione sullo schema della sola superficie, sono subordinate alle tre equazioni di Gauss–Codazzi (condizioni di congruenza). Poiché tali differenze non sono, come s'è già detto nella Nota I, le ordinarie caratteristiche di deformazione introdotte dal Love, vediamo come queste vengono definite.

Assunto su Σ come linee coordinate le *linee di curvatura* $x_i =$ var. $(i = 1\,,2)$ siano: $OQ = OQ(x)$ e $OQ' = OQ'(x)$ rispettivamente le equazioni

(*) Nella seduta del 14 marzo 1964.

della superficie Σ e della deformata Σ' (Q e Q′ punti corrispondenti); $\left\{ \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \mathrm{OQ}}{\partial x_i} \right\}$ ed $\left\{ \boldsymbol{e}'_i = \frac{\partial \mathrm{OQ}'}{\partial x_i} \right\}$ le *basi naturali* associate ai due punti Q e Q′; $\mathrm{T} = \mathrm{Q}\, \boldsymbol{t}_1\, \boldsymbol{t}_2\, \boldsymbol{t}_3$ la terna, *trirettangola* e levogira, costituita dai versori delle tangenti alle due linee coordinate uscenti da Q (orientate nel verso secondo cui cresce la corrispondente x_i) e dal versore della normale a Σ. Posto

$$\mathrm{A}_i = \sqrt{a_{ii}} \qquad (i = 1\,,\,2) \tag{1}$$

$(a_{ii} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i)$ si avrà [1]

$$\boldsymbol{e}_i = \mathrm{A}_i\, \boldsymbol{t}_i \quad , \quad \boldsymbol{t}_3 = \boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_2\,, \tag{2}$$

in quanto le linee coordinate sono, in Σ, tra loro ortogonali. Generalmente non sono invece ortogonali i vettori $\boldsymbol{e}'_i$, in quanto linee di curvatura di Σ non si trasformano in linee di curvatura di Σ'. Si introduce allora, accanto al versore $\boldsymbol{t}'_3$ della normale a Σ' nel punto Q′, il versore normale ad uno dei vettori $\boldsymbol{e}'_i$, ad esempio $\boldsymbol{e}'_1$, nonché il versore di $\boldsymbol{e}'_1$ stesso; così che inevitabilmente, in tutto quello che segue, *la famiglia di curve* $x_1 =$ var. *viene ad assumere un ruolo privilegiato rispetto all'altra.*

Indicata con $\mathrm{T}' = \mathrm{Q}'\, \boldsymbol{t}'_1\, \boldsymbol{t}'_2\, \boldsymbol{t}'_3$ la terna *trirettangola* e levogira così costruita, si può scrivere

$$\boldsymbol{e}'_1 = \mathrm{A}_1 (1 + \delta_1)\, \boldsymbol{t}'_1 \quad , \quad \boldsymbol{e}'_2 = \mathrm{A}_2 (1 + \delta_2) \left(\delta_3\, \boldsymbol{t}'_1 + \sqrt{1 - \delta_3^2}\, \boldsymbol{t}'_2\right), \tag{2 a}$$

essendo

$$\delta_i = \frac{1}{\mathrm{A}_i} \sqrt{\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_i} - 1 \equiv \sqrt{\frac{a'_{ii}}{a_{ii}}} - 1 \qquad (i = 1\,,\,2) \tag{3}$$

gli allungamenti specifici nella direzione delle linee di curvatura e

$$\delta_3 = \cos \chi' \equiv \frac{\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}'_2}{\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)} = \frac{a'_{12}}{\sqrt{a'_{11}\, a'_{22}}} \tag{4}$$

il relativo scorrimento (χ' angolo formato dai vettori $\boldsymbol{e}'_i$).

Di regola, nelle deformazioni delle volte, si considerano, insieme alle quantità δ_α $(\alpha = 1\,,\,2\,,\,3)$, le componenti $\omega_{i\alpha}$, $\omega'_{i\alpha}$ secondo T e T′ rispettivamente [2], dei vettori

$$\boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{2} \sum_{1}^{3}{}_{\alpha}\, \boldsymbol{t}_\alpha \wedge \frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial x_i} \quad , \quad \boldsymbol{\omega}'_i = \frac{1}{2} \sum_{1}^{3}{}_{\alpha}\, \boldsymbol{t}'_\alpha \wedge \frac{\partial \boldsymbol{t}'_\alpha}{\partial x_i} \qquad (i = 1\,,\,2), \tag{5}$$

e si fissa l'attenzione sulle differenze

$$\varkappa_{i\alpha} = \boldsymbol{\omega}'_i \cdot \boldsymbol{t}'_\alpha - \boldsymbol{\omega}_i \cdot \boldsymbol{t}_\alpha \equiv \omega'_{i\alpha} - \omega_{i\alpha} \qquad (i = 1\,,\,2\;;\; \alpha = 1\,,\,2\,,\,3). \tag{6}$$

Dalle espressioni (5) appare evidente il significato cinematico dei vettori $\boldsymbol{\omega}_i$ ed $\boldsymbol{\omega}'_i$, rappresentando essi, per $x_i = t$, delle velocità angolari dei triedri

(1) Le notazioni usate dal Love sono diverse: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}$, $\mathrm{A}_2 = \mathrm{B}$.

(2) Tali componenti sono indicate nel Love con le notazioni p_i, q_i, r_i e p'_i, q'_i, r'_i $(i = 1\,,\,2)$ rispettivamente.

T e T′ rispetto al riferimento prefissato $\mathcal{T}$ (cfr. [4] p. 155). Ad esempio $\boldsymbol{\omega}_1$ non differisce dalla velocità angolare nel moto rigido che si ottiene facendo descrivere, all'origine Q del triedro T, la linea coordinata $x_1 =$ var. con velocità scalare pari ad A_1.

Ciò posto, consideriamo il sistema di equazioni alle derivate parziali del primo ordine che esprime i derivati dei vettori $\boldsymbol{t}'_\alpha$ mediante $\boldsymbol{\omega}'_i$, precisamente (formule di Poisson)

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}'_\alpha}{\partial x_i} = \boldsymbol{\omega}'_i \wedge \boldsymbol{t}'_\alpha \qquad (i = 1\,,\,2\;;\;\alpha = 1\,,\,2\,,\,3). \tag{7}$$

È chiaro che tale sistema permette la determinazione dei vettori $\boldsymbol{t}'_\alpha$, non appena siano soddisfatte le condizioni di integrabilità $\dfrac{\partial(\boldsymbol{\omega}'_1 \wedge \boldsymbol{t}'_\alpha)}{\partial x_2} = \dfrac{\partial(\boldsymbol{\omega}'_2 \wedge \boldsymbol{t}'_\alpha)}{\partial x_1}$, che si riducono a *tre soli* legami indipendenti tra le componenti $\omega'_{i\alpha}$ e le loro derivate prime:

$$\frac{\partial \omega'_{1\alpha}}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega'_{2\alpha}}{\partial x_1} = \omega'_{1\,\alpha+1}\,\omega'_{2\,\alpha+2} - \omega'_{2\,\alpha+1}\,\omega'_{1\,\alpha+2} \qquad (\alpha = 1\,,\,2\,,\,3). \tag{8}$$

Le condizioni scritte non bastano ancora ad assicurare l'esistenza della superficie Σ', in quanto l'integrabilità del sistema (2 *a*), ovvero

$$\frac{\partial OQ'}{\partial x_1} = A_1(1+\delta_1)\,\boldsymbol{t}'_1 \quad , \quad \frac{\partial OQ'}{\partial x_2} = A_2(1+\delta_2)\left(\delta_3\,\boldsymbol{t}'_1 + \sqrt{1-\delta_3^2}\,\boldsymbol{t}'_2\right), \tag{2 b}$$

impone ovviamente, in virtù delle (7), delle ulteriori limitazioni per le componenti dei vettori $\boldsymbol{\omega}'_i$. Più precisamente tali equazioni, che si riducono a tre condizioni scalari, permettono di esprimere le tre componenti ω'_{13}, ω'_{22} e ω'_{23} mediante le rimanenti e le δ_α; sì che in definitiva, delle nove caratteristiche δ_α e $\varkappa_{i\alpha}$, si possono ritenere indipendenti le sole δ_α $(\alpha = 1\,,\,2\,,\,3)$, $\varkappa_{11}$, $\varkappa_{12}$ e $\varkappa_{21}$, complessivamente in numero di sei, salvo ad intendere soddisfatte le condizioni differenziali (8) che in sostanza sostituiscono le equazioni di Gauss–Codazzi.

Le sei quantità dianzi considerate sono le ordinarie caratteristiche di deformazione del Love, salvo le diverse notazioni: ε_i $(i = 1\,,\,2)$ per gli allungamenti δ_i, $\tilde{\omega}$ per lo scorrimento δ_3; τ, K_1 e K_2 per le «changes of curvature» $\dfrac{\varkappa_{11}}{A_1}$, $-\dfrac{\varkappa_{12}}{A_1}$ e $\dfrac{\varkappa_{21}}{A_2}$.

Il problema che si presenta a questo punto è quello di esprimere le caratteristiche di deformazione mediante tre parametri, ad esempio le componenti, secondo T, dello spostamento $\boldsymbol{s} = QQ'$: il Love si limita a calcolare le espressioni linearizzate. Qui il problema viene risolto in modo esatto: *a*) riconoscendo che *le differenze* (6), *anche se i termini sono relativi a terne diverse, si possono interpretare come componenti*, secondo il triedro T, *di due vettori* $\boldsymbol{\Omega}_i$; *b*) *esprimendo questi ultimi mediante un unico vettore* $\boldsymbol{q}$, a sua volta *funzione ben determinata delle componenti di spostamento*.

2. INTRODUZIONE DEI VETTORI $\boldsymbol{\Omega}_i$. – Fa comodo anche qui, come già per i solidi tubolari, considerare il rotore $\Re$ che muta l'orientamento della terna T in quello della terna T′, nonché il suo vettore caratteristico $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$. Come è noto i vettori $\boldsymbol{t}'_\alpha$ si esprimono, mediante $\boldsymbol{q}$, al modo seguente (cfr. [5] p. 56):

$$\boldsymbol{t}'_\alpha \equiv \Re\, \boldsymbol{t}_\alpha = \boldsymbol{t}_\alpha + \frac{2}{1+q^2}(\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{t}_\alpha - q^2\, \boldsymbol{t}_\alpha + \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{t}_\alpha\, \boldsymbol{q}) \qquad (\alpha = 1\,,2\,,3). \tag{9}$$

Si trae subito che *condizione necessaria e sufficiente perché lo spostamento* $\Sigma \to \Sigma'$ *si riduca ad uno spostamento rigido è che risulti*

$$\delta_\alpha = 0 \quad , \quad \boldsymbol{q} = \text{cost.} \cdots \Sigma \qquad (\alpha = 1\,,2\,,3). \tag{10}$$

Le sole condizioni $(10)_1$ implicano infatti [cfr. (2), (2 *a*) e (9)] $\boldsymbol{e}'_i = \Re\, \boldsymbol{e}_i$, ovvero

$$\frac{\partial \mathrm{OQ}'}{\partial x_i} = \Re\left(\frac{\partial \mathrm{OQ}}{\partial x_i}\right) \qquad (i = 1\,,2).$$

Se in più si suppone $\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial x_i} = 0$, cioè $\Re = \text{cost.}$ su tutta Σ, ne consegue $\frac{\partial \mathrm{OQ}'}{\partial x_i} = \frac{\partial (\Re \mathrm{OQ})}{\partial x_i}$, cioè

$$\mathrm{OQ}' = \Re \mathrm{OQ} + \boldsymbol{\tau},$$

essendo $\boldsymbol{\tau}$ un vettore arbitrario indipendente da Q. Lo spostamento $\Sigma \to \Sigma'$ si ottiene quindi componendo la rotazione (costante) $\Re$ di centro fisso O con la traslazione di vettore $\boldsymbol{\tau}$, e si riduce pertanto ad uno spostamento rigido.

Per quanto ora detto appare completamente giustificata, per le quantità δ_α e $\boldsymbol{\varepsilon}_i = 2 \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial x_i}$, la denominazione di *caratteristiche di deformazione della superficie* Σ. Come vedremo tra poco, le differenze (6) della teoria ordinaria sono in corrispondenza biunivoca con le componenti dei vettori $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ secondo la terna T.

Come è naturale, neppure i vettori $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ possono essere fissati a piacere, in quanto, dovendosi ottenere per semplice derivazione da uno stesso vettore $\boldsymbol{q}$, deve essere generalmente

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2}{\partial x_1}\,; \tag{11}$$

ciò che assicura l'esistenza di $\boldsymbol{q}$ e quindi la determinazione dei tre vettori $\boldsymbol{t}'_\alpha = \Re\boldsymbol{t}_\alpha$. Le (11) non sono d'altra parte le sole condizioni che vengono imposte ai vettori $\boldsymbol{\varepsilon}_i$. Restano ancora le condizioni di integrabilità del sistema (2 *b*) che, con l'introduzione di $\Re$, si scrivono nella forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial [\mathrm{A}_1 (1+\delta_1)\, \boldsymbol{t}_1]}{\partial x_2} + \mathrm{A}_1 (1+\delta_1)\, \Re^{-1} \frac{\partial \Re}{\partial x_2}\, \boldsymbol{t}_1 = \frac{\partial [\mathrm{A}_2\, \delta_3 (1+\delta_2)\, \boldsymbol{t}_1]}{\partial x_1} + {} \\ + \frac{\partial [\mathrm{A}_2 \sqrt{1-\delta_3^2}\,(1+\delta_2)\, \boldsymbol{t}_2]}{\partial x_1} + \mathrm{A}_2 (1+\delta_2)\, \Re^{-1} \frac{\partial \Re}{\partial x_1} (\delta_3\, \boldsymbol{t}_1 + \sqrt{1-\delta_3^2}\, \boldsymbol{t}_2).\end{aligned} \tag{12}$$

Conviene a questo punto introdurre i vettori delle due omografie assiali $\mathfrak{R}^{-1}\dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x_i}$:

$$\boldsymbol{\Omega}_i \equiv \mathbf{V}\left[\mathfrak{R}^{-1}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x_i}\right] = \frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{\alpha}\, \boldsymbol{t}_\alpha \wedge \mathfrak{R}^{-1}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x_i}\,\boldsymbol{t}_\alpha \qquad (i = 1\,,2), \tag{13}$$

osservando che essi sono in *corrispondenza biunivoca* con i vettori $\boldsymbol{\varepsilon}_i$.

Precisamente si ha (cfr. [1] p. 172, formule (4) e (4'))

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \frac{2}{1+q^2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial x_i} - \boldsymbol{q}\wedge\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial x_i}\right) \equiv \frac{1}{1+q^2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{\varepsilon}_i\right) \tag{14}$$

e inversamente

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \equiv 2\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial x_i} = \boldsymbol{\Omega}_i + \boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{\Omega}_i + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\Omega}_i\,\boldsymbol{q}; \tag{14'}$$

sì che, insieme alle δ_α, si possono assumere come caratteristiche di deformazione le componenti $\Omega_{i\alpha}$ dei vettori $\boldsymbol{\Omega}_i$ secondo la terna T o, se si preferisce, le componenti secondo la terna invariabile $\mathcal{T}$.

In pari tempo le condizioni di integrabilità (11), espresse per il tramite dei vettori $\boldsymbol{\Omega}_i$, si scrivono nella forma sintetica (cfr. [5] p. 84, nonché [1] p. 176)

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\boldsymbol{\Omega}_2}{\partial x_1} = \boldsymbol{\Omega}_1\wedge\boldsymbol{\Omega}_2. \tag{8'}$$

Per quanto riguarda le (12) esse si riducono a

$$\frac{\partial\left[A_1(1+\delta_1)\,\boldsymbol{t}_1\right]}{\partial x_2} + A_1(1+\delta_1)\,\boldsymbol{\Omega}_2\wedge\boldsymbol{t}_1 = \frac{\partial\left[A_2\,\delta_3(1+\delta_2)\,\boldsymbol{t}_1\right]}{\partial x_1} +$$

$$+\frac{\partial\left[A_2\sqrt{1-\delta_3^2}\,(1+\delta_2)\,\boldsymbol{t}_2\right]}{\partial x_1} + A_2(1+\delta_2)\,\boldsymbol{\Omega}_1\wedge\left(\delta_3\,\boldsymbol{t}_1 + \sqrt{1-\delta_3^2}\,\boldsymbol{t}_2\right)$$

e danno così luogo, moltiplicate scalarmente per $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$, $\boldsymbol{t}_3$ rispettivamente, alle equazioni

$$\left\{\begin{aligned}
&A_2(1+\delta_2)\sqrt{1-\delta_3^2}\,\Omega_{13} = \frac{\partial\left[A_2\,\delta_3(1+\delta_2)\right]}{\partial x_1} - \frac{\partial\left[A_1(1+\delta_1)\right]}{\partial x_2} + (1+\delta_2)\sqrt{1-\delta_3^2}\,\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\\
&A_1(1+\delta_1)\,\Omega_{23} = \frac{\partial\left[A_2\sqrt{1-\delta_3^2}\,(1+\delta_2)\right]}{\partial x_1} + A_2\,\delta_3(1+\delta_2)\left(\Omega_{13} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) - (1+\delta_1)\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\\
&A_1(1+\delta_1)\,\Omega_{22} = A_2(1+\delta_2)\left[\delta_3\left(\Omega_{12} + \frac{A_1}{R_1}\right) - \sqrt{1-\delta_3^2}\,\Omega_{11}\right].
\end{aligned}\right. \tag{15}$$

Si vede bene di qui che, delle sei $\Omega_{i\alpha}$, si possono ritenere indipendenti le sole Ω_{11}, Ω_{12} e Ω_{21}, salvo ad intendere soddisfatte le condizioni differenziali (8').

Nel prossimo numero faremo vedere che *le quantità* $\Omega_{i\alpha}$ *danno* proprio *le differenze* $\varkappa_{i\alpha}$ *della teoria ordinaria*; *sì che le* (14) *vengono ad esprimere*, con una certa semplicità, *tali differenze mediante un unico vettore*.

In ogni modo si noti fin da ora che, per piccole trasformazioni, dalla (14) o dalla equivalente (14') segue la coincidenza dei vettori $\boldsymbol{\Omega}_i$ con i vettori $\boldsymbol{\varepsilon}_i$:

$$\boldsymbol{\Omega}_i = 2\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial x_i} \qquad (i = 1\,,2).$$

3. IDENTIFICAZIONE DELLE $\Omega_{i\alpha}$ CON LE $\varkappa_{i\alpha}$. LEGAMI TRA LE « CHANGES OF CURVATURE » E LE DIFFERENZE $b'_{ik} - b_{ik}$. – Dalle definizioni (5) si ricava facilmente il legame tra le velocità angolari $\boldsymbol{\omega}_i$ ed $\boldsymbol{\omega}'_i$ e i vettori $\boldsymbol{\Omega}_i$ definiti dalla (13). Si ha infatti, con l'intervento del rotore $\mathfrak{R}$ di cui alla (9),

$$2\,\boldsymbol{\omega}'_i = \sum_{1}^{3}{}_{\alpha}\left(\mathfrak{R}\boldsymbol{t}_\alpha \wedge \mathfrak{R}\frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial x_i} + \mathfrak{R}\boldsymbol{t}_\alpha \wedge \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_i}\,\boldsymbol{t}_\alpha\right),$$

ovvero [3] $2\,\boldsymbol{\omega}'_i = \mathfrak{R}\left(\sum_{1}^{3}{}_{\alpha}\,\boldsymbol{t}_\alpha \wedge \frac{\partial \boldsymbol{t}_\alpha}{\partial x_i} + \sum_{1}^{3}{}_{\alpha}\,\boldsymbol{t}_\alpha \wedge \mathfrak{R}^{-1}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_i}\,\boldsymbol{t}_\alpha\right)$ e quindi in definitiva

$$\boldsymbol{\omega}'_i = \mathfrak{R}\,(\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\Omega}_i). \tag{16}$$

Segue di qui, avuto riguardo alla (6),

$$\varkappa_{i\alpha} = \mathfrak{R}\,(\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\Omega}_i)\cdot\mathfrak{R}\boldsymbol{t}_\alpha - \boldsymbol{\omega}_i\cdot\boldsymbol{t}_\alpha \equiv (\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\Omega}_i)\cdot\mathfrak{R}^{-1}\,\mathfrak{R}\boldsymbol{t}_\alpha - \boldsymbol{\omega}_i\cdot\boldsymbol{t}_\alpha,$$

cioè

$$\varkappa_{i\alpha} = \boldsymbol{\Omega}_i\cdot\boldsymbol{t}_\alpha \equiv \Omega_{i\alpha}: \tag{17}$$

le caratteristiche $\varkappa_{i\alpha}$ *della teoria ordinaria del Love coincidono con le componenti, secondo* T, *dei vettori* $\boldsymbol{\Omega}_i$.

Passiamo ora ad esplicitare i legami tra le « changes of curvature » del Love

$$K_1 = -\frac{\varkappa_{12}}{A_1}\quad,\quad K_2 = \frac{\varkappa_{21}}{A_2}\quad,\quad \tau = \frac{\varkappa_{11}}{A_1} \tag{18}$$

e le differenze

$$b'_{ik} - b_{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{e}'_k}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{t}'_3 - \frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{t}_3 \qquad (i\,,k = 1\,,2) \tag{19}$$

di cui alla Nota I. A tale scopo utilizziamo le formule (2) e (2 *a*), posto che la (18) si scrive, avuto riguardo alla (7),

$$K_1 = \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}'_1}{\partial x_1}\cdot\boldsymbol{t}'_3 - \frac{\partial \boldsymbol{t}_1}{\partial x_1}\cdot\boldsymbol{t}_3\right)\quad,\quad K_2 = \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}'_2}{\partial x_2}\cdot\boldsymbol{t}'_3 - \frac{\partial \boldsymbol{t}_2}{\partial x_2}\cdot\boldsymbol{t}_3\right), \tag{18'}$$

$$\tau = \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}'_2}{\partial x_1}\cdot\boldsymbol{t}'_3 - \frac{\partial \boldsymbol{t}_2}{\partial x_1}\cdot\boldsymbol{t}_3\right).$$

Si ottiene

$$b'_{11} - b_{11} = A_1\left[(1+\delta_1)\frac{\partial \boldsymbol{t}'_1}{\partial x_1}\cdot\boldsymbol{t}'_3 - \frac{\partial \boldsymbol{t}_1}{\partial x_1}\cdot\boldsymbol{t}_3\right],$$

$$b'_{22} - b_{22} = A_2\left[(1+\delta_2)\left(\delta_3\frac{\partial \boldsymbol{t}'_1}{\partial x_2} + \sqrt{1-\delta_3^2}\,\frac{\partial \boldsymbol{t}'_2}{\partial x_2}\right)\cdot\boldsymbol{t}'_3 - \frac{\partial \boldsymbol{t}_2}{\partial x_2}\cdot\boldsymbol{t}_3\right]$$

e per $b'_{12} - b_{12} \equiv b'_{21} - b_{21}$, concordemente alla $(15)_3$, la duplice espressione

$$b'_{12} - b_{12} = A_2\left[(1+\delta_2)\left(\delta_3\frac{\partial \boldsymbol{t}'_1}{\partial x_1} + \sqrt{1-\delta_3^2}\,\frac{\partial \boldsymbol{t}'_2}{\partial x_1}\right)\cdot\boldsymbol{t}'_3 - \frac{\partial \boldsymbol{t}_2}{\partial x_1}\cdot\boldsymbol{t}_3\right] \equiv$$

$$\equiv A_1\left[(1+\delta_1)\frac{\partial \boldsymbol{t}'_1}{\partial x_2}\cdot\boldsymbol{t}'_3 - \frac{\partial \boldsymbol{t}_1}{\partial x_2}\cdot\boldsymbol{t}_3\right],$$

(3) Si tenga conto che un rotore coincide col suo complementare; ciò che implica, per ogni coppia di vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, $\mathfrak{R}\,(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}) = \mathfrak{R}\boldsymbol{v}\wedge\mathfrak{R}\boldsymbol{w}$.

quindi in definitiva, tenuto conto delle formule $\frac{\partial \boldsymbol{t}_3}{\partial x_i} = \frac{1}{R_i} \boldsymbol{e}_i$ [cfr. $(9)_2$ e (25) della Nota I],

$$(20) \qquad \begin{cases} b'_{11} - b_{11} = A_1^2 \left[(1 + \delta_1) K_1 - \frac{\delta_1}{R_1}\right] \\ b'_{12} - b_{12} = A_1 A_2 (1 + \delta_2) \left[\delta_3 \left(K_1 - \frac{1}{R_1}\right) + \sqrt{1 - \delta_3^2}\, \tau\right] \\ b'_{22} - b_{22} = A_2^2 \left\{ \frac{(1 + \delta_2)^2}{1 + \delta_1} \left[\delta_3 \left(K_1 - \frac{1}{R_1}\right) + \sqrt{1 - \delta_3^2}\, \tau\right] + \right. \\ \qquad \left. + (1 + \delta_2) \sqrt{1 - \delta_3^2}\, K_2 - \frac{1}{R_2} \left[(1 + \delta_2)\sqrt{1 - \delta_3^2} - 1\right] \right\} . \end{cases}$$

4. DETERMINAZIONE di $\boldsymbol{q}$. – Per completezza, una volta accertata l'identità (17), cioè la possibilità di esprimere le caratteristiche sovrabbondanti $\varkappa_{i\alpha}$ mediante un unico vettore $\boldsymbol{q}$, come dalla (14), esplicitiamo quest'ultimo mediante le componenti di spostamento del generico punto di Σ.

Si tratta in sostanza di risolvere le equazioni (9) nella incognita $\boldsymbol{q}$, assegnati che siano i vettori $\boldsymbol{t}_\alpha$ e i loro trasformati $\boldsymbol{t}'_\alpha$ mediante $\mathfrak{R}$; dato che dalla (2 *a*) si ricavano poi i vettori $\boldsymbol{t}'_\alpha$ mediante $\boldsymbol{e}'_i$ e δ_α, cioè in definitiva in termini di componenti di spostamento [(cfr. (15) e $(21)_1$ della Nota I].

Basterà intanto limitarci a considerare due soli valori per α, ad esempio $\alpha = 1, 2$, in quanto per un rotore si ha $\mathfrak{R}(\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_2) = \mathfrak{R}\boldsymbol{t}_1 \wedge \mathfrak{R}\boldsymbol{t}_2$, in modo che, se $\boldsymbol{q}$ soddisfa alle prime due delle (9), verifica automaticamente anche la terza D'altra parte ho avuto occasione di riconoscere recentemente (cfr. [2] p. 720) che, posto

$$(21) \qquad 2\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_1 + \varphi_1 \boldsymbol{t}_1$$

con $\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{t}_1 = 0$, nonché

$$(22) \qquad \boldsymbol{t}'_1 = \boldsymbol{\nu}_1 + \rho_1 \boldsymbol{t}_1$$

con $\boldsymbol{\nu}_1 \cdot \boldsymbol{t}_1 = 0$; decomposti cioè i vettori $2\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{t}'_1$ secondo la direzione di $\boldsymbol{t}_1$ e la giacitura normale, la (9), almeno per $\alpha = 1$, si traduce nella seguente condizione per $\boldsymbol{q}_1$:

$$(23) \qquad \boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{1 + \rho_1} (\varphi_1 \boldsymbol{\nu}_1 + 2\, \boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{\nu}_1);$$

sì che essa vale ad esprimere il componente di $\boldsymbol{q}$ normale a $\boldsymbol{t}_1$ mediante $\boldsymbol{t}'_1$ e la componente φ_1 di $\boldsymbol{q}$ parallela a $\boldsymbol{t}_1$. Quest'ultima, come è naturale, resta completamente indeterminata finché non si impone la ulteriore condizione $\boldsymbol{t}'_2 = \mathfrak{R}\boldsymbol{t}_2$. A sua volta questa permette, da sola, in modo analogo al precedente, la determinazione del componente di $\boldsymbol{q}$ normale a $\boldsymbol{t}_2$,

$$(23\,a) \qquad \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{1 + \rho_2} (\varphi_2 \boldsymbol{\nu}_2 + 2\, \boldsymbol{t}_2 \wedge \boldsymbol{\nu}_2)$$

ove ρ_2 e $\boldsymbol{\nu}_2$ sono relativi al vettore $\boldsymbol{t}'_2$:

$$(22\,a) \qquad \boldsymbol{t}'_2 = \boldsymbol{\nu}_2 + \rho_2 \boldsymbol{t}_2 .$$

Dovendo le due equazioni sussistere contemporaneamente, dovrà essere in definitiva

$$\boldsymbol{q}_1 + \varphi_1 \boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{q}_2 + \varphi_2 \boldsymbol{t}_2 .$$

Seguono di qui, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{t}_\alpha$ ($\alpha = 1 , 2 , 3$), le tre equazioni scalari

$$\varphi_1 = \boldsymbol{q}_2 \cdot \boldsymbol{t}_1 \quad , \quad \varphi_2 = \boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{t}_2 \quad , \quad \boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{t}_3 = \boldsymbol{q}_2 \cdot \boldsymbol{t}_3$$

nelle due incognite φ_1 e φ_2. Prescindendo dalla terza, che si riconosce facilmente essere conseguenza delle prime due, si ha esplicitamente, avuto riguardo alle (23) e (23 *a*),

$$\varphi_1 = \frac{1}{1 + \rho_2} (\varphi_2 \boldsymbol{t}_1 + 2 \boldsymbol{t}_3) \cdot \boldsymbol{v}_2 \quad , \quad \varphi_2 = \frac{1}{1 + \rho_1} (\varphi_1 \boldsymbol{t}_2 - 2 \boldsymbol{t}_3) \cdot \boldsymbol{v}_1 ,$$

cioè in definitiva

$$\varphi_1 = 2 \frac{(1 + \rho_1) \boldsymbol{t}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{t}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1 \, \boldsymbol{t}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{(1 + \rho_1)(1 + \rho_2) - \boldsymbol{t}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 \, \boldsymbol{t}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1} . \tag{24}$$

Nella decomposizione (21) restano così univocamente determinati, salvo il calcolo esplicito, i due componenti $\boldsymbol{q}_1$ e φ_1 mediante i vettori $\boldsymbol{t}_\alpha$ e $\boldsymbol{t}'_\alpha$, cioè in ultima analisi in termini di componenti di spostamento.

In una Nota successiva completerò la deduzione del Love della parte *linearizzata* delle caratteristiche di deformazione, calcolando esplicitamente, sulla base delle formule *esatte* sopra riportate, la parte di 2° *ordine* nelle componenti di spostamento, fondamentale nelle questioni di stabilità.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

[1] FERRARESE G., *Sulla velocità angolare nei moti rigidi e la rotazione locale nelle deformazioni finite*, « Rendiconti di Matematica », (1–2), vol. 18, p. 169.

[2] FERRARESE G., *Sulla dinamica dei solidi tubolari: equazioni non linearizzate*, « Rendiconti dei Lincei », serie VIII, vol. XXX, p. 718.

[3] LOVE A. E. H., *A Treatise on the mathematical theory of elasticity*, IV ed., The University Press, Cambridge (1952).

[4] SIGNORINI A., *Meccanica razionale con elementi di statica grafica*, vol. I, 2ª ed. Perrella, Roma (1952).

[5] SIGNORINI A., *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria 1ª, « Ann. Matem. Pura e Appl. », serie IV, tomo XXII (1943).