
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CARLO CASTAGNOLI, ANGELO DE MARCO, RENATO
SCRIMAGLIO

Perdite di energia di muoni ultrarelativistici. - II. Produzione di coppie

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.5, p. 639–645.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_5_639_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

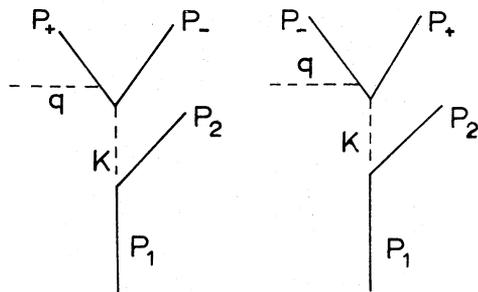
<http://www.bdim.eu/>

Fisica. — *Perdite di energia di muoni ultrarelativistici.* — II. *Produzione di coppie.* Nota di CARLO CASTAGNOLI, ANGELO DE MARCO e RENATO SCRIMAGLIO (*), presentata (**) dal Socio E. PERUCCA.

1. INTRODUZIONE. — In una precedente Nota si è presa in esame la perdita di energia, $(dE/dx)_n$, dei mesoni ultrarelativistici dovuta all'interazione nucleare. Qui invece si studia la $dE/dx)_c$ per il processo di produzione di coppie. La sezione d'urto di questo processo è stata studiata da vari Autori; in particolare da Bhabha [2]; Racah [3]; Hayakawa-Tomonaga [4], Block et al. [5]; Murota-Ueda Tanaka [6].

Qui mostreremo i risultati di un calcolo da noi effettuato su $(dE/dx)_c$ che consentiranno un confronto fra i dati a cui conduce la formula di Murota e quelli ricavati con le formule degli altri Autori, in particolare con quella suggerita da Mandò-Ronchi [7] che tiene conto anche dell'effetto di schermo.

2. TRATTAMENTO DEL PROCESSO SECONDO MUROTA-UEDA. — Murota e Ueda hanno ricalcolato (1956) la sezione d'urto σ della produzione di coppie servendosi del metodo di Feymann-Dyson e prestando maggiore attenzione all'intero intervallo dell'energia trasferita.



$$P_1(p_1, iE_1); P_2(p_2, iE_2); q = p_1 - p_2 - p_+ - p_-$$

$$P_{\pm}(p_{\pm}, i\varepsilon_{\pm}); K(k, i\varepsilon) = P_1 - P_2$$

Fig. 1.

Nel valutare la sezione d'urto differenziale per muoni tuttavia, si tiene conto solo del diagramma di Feymann dato in fig. 1.

$$P_1(p_1, iE_1); P_2(p_2, iE_2); q = p_1 - p_2 - p_+ - p_-$$

$$P_{\pm}(p_{\pm}, i\varepsilon_{\pm}); K(k, i\varepsilon) = P_1 - P_2$$

Siano m e μ la massa dell'elettrone e del muone; E l'energia del muone primario, ε_+ ed ε_- l'energia del positrone e dell'elettrone della coppia prodotta.

(*) Istituto di Fisica Generale, Università di Torino.

(**) Nella seduta dell'11 aprile 1964.

Introducendo le quantità:

$$(I) \quad \mu = \frac{\varepsilon}{E} \quad ; \quad x = \left(\frac{1}{2} \frac{\varepsilon \mu}{Em} \right)^2 \frac{(1-v^2)}{1-u} \quad ; \quad v = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{\varepsilon}$$

si distinguono 2 regioni:

$$(I) \quad u \ll \frac{m}{\mu} : \text{piccoli trasferimenti}$$

$$(II) \quad u \gg \frac{m}{\mu} : \text{grandi trasferimenti} \quad \begin{cases} (II_a) & x \gg 1 \quad \text{per } v^2 \ll 1 \\ (II_b) & x \ll 1 \quad \text{per } 1 - v^2 \ll 1. \end{cases}$$

Murota-Ueda hanno calcolato la σ differenziale del secondo ordine per tutti i valori di $r = \frac{\mu\varepsilon}{mE}$, ma hanno dato la σ totale solo per i casi $r \ll 1$ o $r \gg 1$ mentre è di interesse anche la regione $r \sim 1$.

Nel calcolo di Stoker [8] si introducono le seguenti approssimazioni: 1°) invece della regione I si considera quella meno restrittiva $\frac{\varepsilon}{E} \ll 1$; 2°) si considerano coppie per cui entrambi i membri hanno un minimo di energia di $10 mc^2$ cioè $\varepsilon_+, \varepsilon_- \geq 10 mc^2$ e $\varepsilon \leq 20 mc^2$ in quanto per più bassi valori di $\varepsilon_+, \varepsilon_-$ si ha $\sigma = 0$; 3°) si considera per la v un intervallo di variabilità $-1 + 10 \gamma_0 \leq v \leq 1 - 10 \gamma_0$; 4°) il limite superiore per l'energia dei primari considerati è 10 Gev, e poiché gli effetti di schermo sono trascurabili proprio fino a questa energia, essi non vengono presi in considerazione.

Scopo del nostro calcolo è invece di utilizzare le formule di Murota-Ueda anche per grandi trasferimenti di energia, e per valori più elevati dell'energia dei primari e quindi tenendo conto degli effetti di schermo.

3. CALCOLO DELLA σ . - La formula base è la (23) di Murota [6]. Nella ipotesi $\frac{\varepsilon}{E} \ll 1$ e per $r \ll 1$ fino a $r \simeq 1$ essa si semplifica nella

$$(2) \quad d\sigma = \frac{2}{3\pi} (z\alpha)^2 r_e^2 \left[\ln \frac{R(1-v^2)}{\gamma(1+x)^{1/2}} - 1 \right] \left[\{ (2+v^2) + (3+v^2)x \} \cdot \right. \\ \left. \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - (3+v^2) + \frac{1-v^2}{1+x} \right] \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} dv$$

ove

$$\alpha = \frac{1}{137} \quad ; \quad \gamma = \frac{\mu c^2}{E} \quad ; \quad \gamma_0 = \frac{2 mc^2}{\varepsilon} \quad ; \quad R = \frac{1}{2} r.$$

L'integrazione viene estesa all'intervallo della ε tra $20 mc^2 \leq \varepsilon \leq E$ con l'energia E del primario fino a $E = 10$ Gev. Per $E > 10$ Gev occorre tener conto gli effetti di schermo e pertanto la (2) va sostituita dalla

$$(2') \quad d\sigma_I = \frac{2}{3\pi} (z\alpha)^2 r_e^2 \left[\ln (137 z) \right]^{-\frac{1}{3}} \frac{M}{mc^2} \cdot \left[\{ (2+v^2) + (3+v^2)x \} \cdot \right. \\ \left. \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - (3+v^2) + (1-v^2) \frac{1}{1+x} \right] \frac{d\varepsilon dv}{\varepsilon}$$

per $r \gg 1$ si hanno due casi

$$(II_a) \quad \varepsilon_{\pm} \simeq \varepsilon_{\mp} \quad \text{cioè } v^2 \ll 1 \quad ; \quad x \gg 1$$

$$(II_b) \quad \varepsilon_{\pm} \gg \varepsilon_{\mp} \quad 1 - v^2 \ll 1 \quad ; \quad x \ll 1$$

le formule diventano

$$(3) \quad d\sigma_{II_a} = \frac{4}{3\pi} (z\alpha)^2 r_e^2 \frac{d\varepsilon dv}{\varepsilon} \frac{1-u}{R^2(1-v^2)} L \cdot \left\{ (3-v^2) \cdot \left[1 + \frac{1}{4} u^2 \right] - \right. \\ \left. - 3u + \frac{1}{2} u^2 (1+v^2) \right\}$$

$$(4) \quad d\sigma_{II_b} = \frac{4}{3\pi} (z\alpha)^2 r_e^2 \frac{d\varepsilon dv}{\varepsilon} L \cdot \left[\left(1 - u + \frac{1}{2} u^2 \right) \left(1 + \frac{v^2}{2} \right) \ln \frac{1-u}{R^2(1-v^2)} - \right. \\ \left. - (1+v^2)(1-u) - \frac{1}{4} (3+v^2) u^2 \right].$$

Per la ε l'integrazione viene estesa da $0,1 E - 0,95 E$ con

$$(5) \quad L = \begin{cases} \log \frac{c(1-v^2)}{M} & \text{senza schermo, cioè per } E \leq 10^6 \text{ Mev} \\ \text{Log } 137 Z^{-\frac{1}{3}} \frac{M}{mc^2} & \text{con schermo, cioè per } E > 10^6 \text{ Mev} \end{cases}$$

$$M = mc^2 [1+x]^{1/2}.$$

È da osservare che le $d\sigma_{II_a}$ $d\sigma_{II_b}$ sono state criticate da Ternovskii [9] in quanto ottenute con una approssimazione troppo drastica nell'integrazione sugli angoli e pertanto da esse andrebbero sottratti rispettivamente i contributi

$$(6) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 \left[\frac{3+v^2}{4} \right] u^2 \\ (v^2-1)(1-u) - \frac{1}{4} (3+v^2) u^2. \end{cases}$$

Si vede però come le $d\sigma$ calcolate con e senza questa correzione non differiscano sensibilmente (entro 2%). Quindi nel seguito del calcolo continueremo ad utilizzare le (3) e (4).

4. RISULTATI E DISCUSSIONE.

4.1. *Nostri risultati.* - Utilizzando le (2'), (3), (4) abbiamo quindi calcolato numericamente le sezioni d'urto per il processo di produzione di coppie. Poi attraverso la

$$(7) \quad - \left(\frac{dE}{dx} \right)_c = \int_{20 mc^2}^E \int_{(-1+10\gamma_0)}^{(1-10\gamma_0)} \varepsilon d\sigma d\varepsilon dv$$

si è calcolato la perdita di energia che è mostrata in fig. 2. Questi calcoli sono stati effettuati utilizzando un elaboratore elettronico 7040 IBM. Da essi risulta che:

1° il contributo maggiore proviene dalla zona I, soprattutto quando per $E > 10$ Gev si tenga conto degli effetti di schermo;

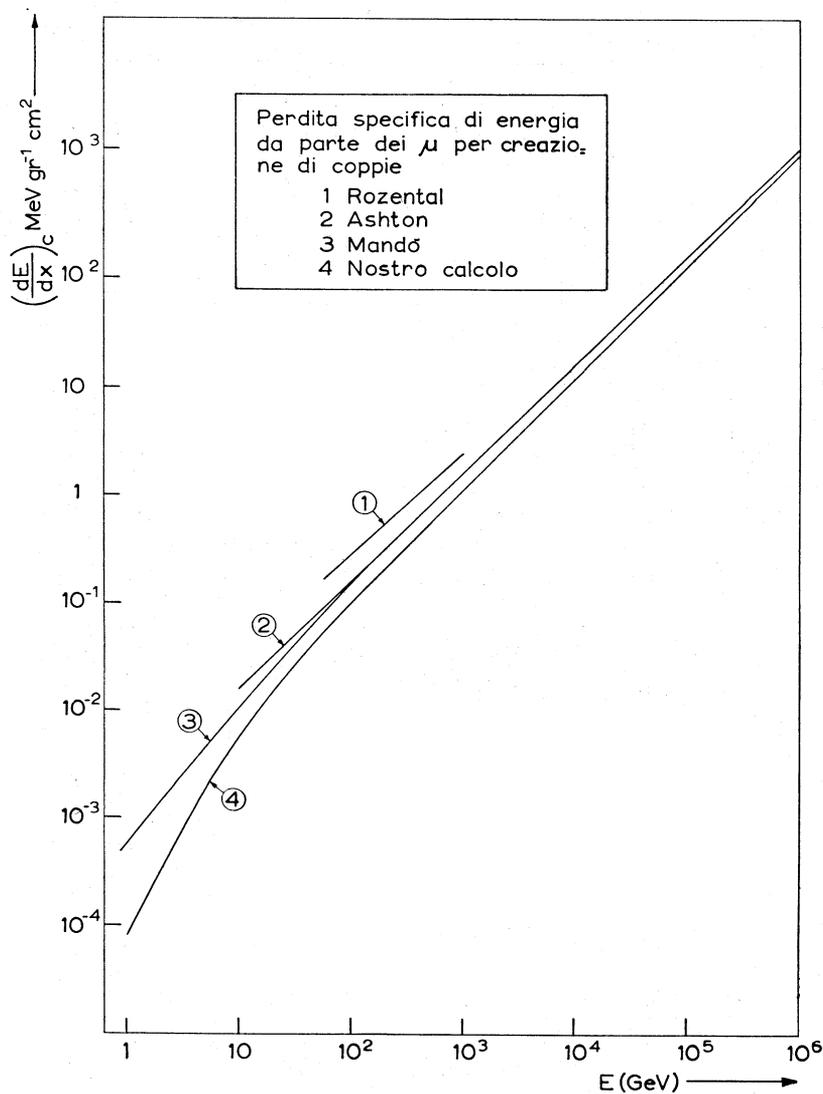


Fig. 2.

2° la zona II non gioca in modo efficace per $E < 10^2$ Gev, però da questo valore in poi il suo contributo è sensibile (effetti fino a $\sim 8\%$) ed è dovuto soprattutto alla zona II_b.

4.2. *Confronto con i risultati teorici di altri Autori.* - I risultati da noi ottenuti sono confrontati con quelli dei precedenti Autori in fig. 2.

Consideriamo dapprima i risultati di Mandò-Ronchi (a partire da 10^{-2} Gev coincidenti con quelli di Ashton) che sono stati i più utilizzati nell'ultimo decennio. Questi Autori avevano ottenuta l'espressione

$$(8) \quad -\left(\frac{dE}{dx}\right)_c = 4,16 \cdot 10^{-7} E \left[\ln \frac{E}{\mu c^2} - 2,72 \right] \quad \text{Mev gr}^{-1} \text{ cm}^2$$

la quale per $E > 30$ Gev va ridotta del fattore di schermo

$$(9) \quad \left[\frac{16}{9} \ln(183 Z^{-\frac{1}{3}}) + 1 \right] \left[\frac{16}{9} \frac{E}{\mu c^2} - \frac{14}{9} + \ln 2 \right]^{-1}.$$

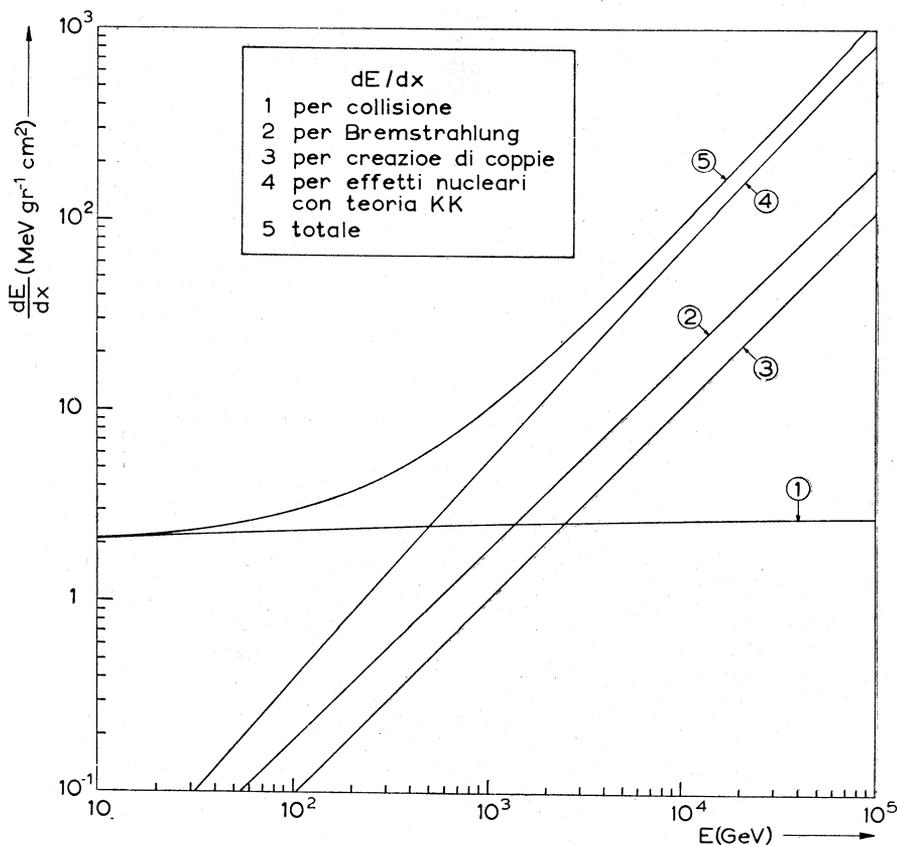


Fig. 3 a.

Per $E > 10^2$ Gev si ha l'espressione approssimata

$$(10) \quad \left(-\frac{dE}{dx}\right)_c = aE \quad \text{Mev gr}^{-1} \text{ cm}^2 \quad \text{con } a = 1,6 \cdot 10^{-1}.$$

Dalla nostra curva possiamo ricavare invece una analoga relazione approssimata, valida pure per $E > 10^2$, con

$$a = 1,1 \cdot 10^{-6}$$

Rozenthal [11] dà invece $a = 2,3 \cdot 10^{-6}$ e Barrett et al. [12] dà $1,3 \cdot 10^{-6}$.

4.3. *Confronto con le perdite di energia per altri processi.* - In fig. 3 a e 3 b la perdita di energia $(dE/dx)_c$ viene confrontata con quella nucleare $(dE/dx)_n$ calcolata nel nostro precedente lavoro con le due teorie di Kessler-Kessler e Weizsächer-Williams. Si vede che mentre nel secondo caso esse hanno valori del tutto confrontabili, nel primo caso la perdita d'energia per effetto nucleare risulta molto maggiore.

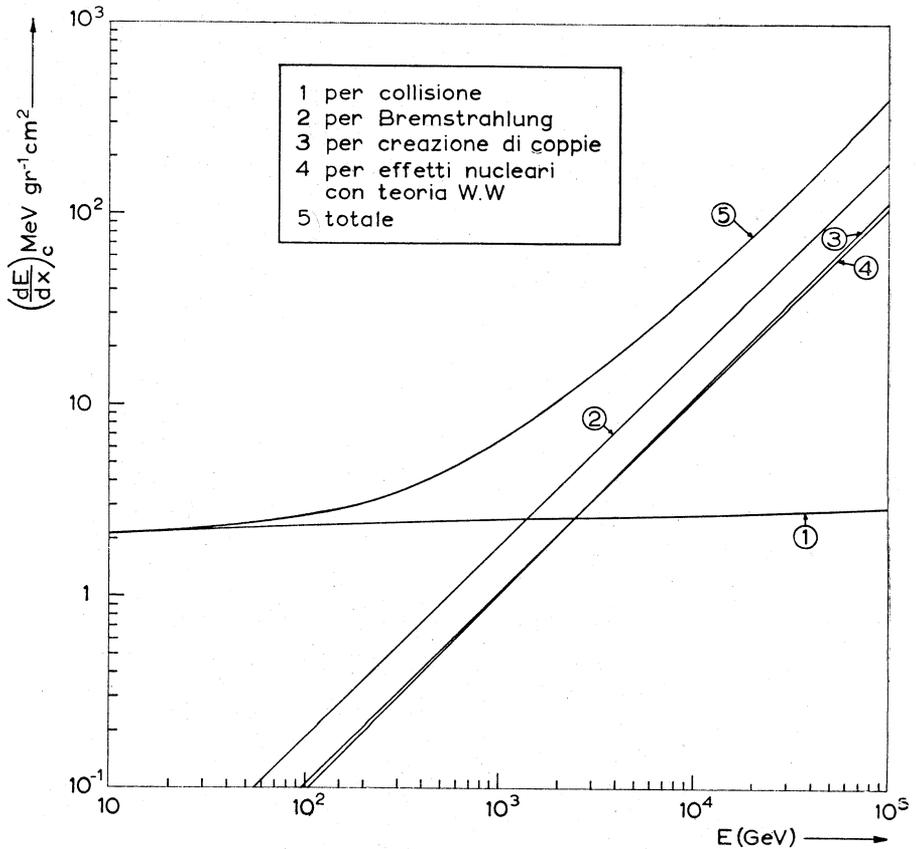


Fig. 3 b.

Nelle stesse figure abbiamo graficato anche la perdita di energia per collisione (secondo Bethe-Livingstone) e di bremsstrahlung (secondo Rozenthal-Strel'tsov [11]) nonché la perdita di energia totale. È interessante notare che la perdita per collisione a 100 GeV è l'86% del totale, mentre a 10^4 GeV essa è ridotta al solo 7%. Resta così giustificata l'attenzione da noi posta ai due processi nucleari e di produzione di coppie nel campo delle altissime energie.

Si ringraziano il dott. G. Verri per l'aiuto prestato nella programmazione del calcolo e il prof. M. Ageno per l'uso della IBM 7040 dell'Istituto Superiore di Sanità.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. CASTAGNOLI, A. DE MARCO, R. SCRIMAGLIO, « *Atti Accademia Lincei* », vol. XXXVI, fasc. 4, pag. 475.
- [2] H. J. BHABHA, « *Proc. Roy. Soc.* », *A* (152), 559 (1935); ID., « *Proc. Cham. Phyl. Soc.* », 31, 394 (1935).
- [3] G. RACAH, « *Nuovo Cimento* », 14, 93 (1937).
- [4] HAYAKAWA-S. TOMONAGA, « *Prog. Theor. Phys.* », 4, 287 (1949).
- [5] BLOCK-KING-WADA, « *Phys. Rev.* », 96, 1627 (1954).
- [6] MUROTA-UEDA-TANAKA, « *Prog. Theor. Phys.* », 16, 482 (1956).
- [7] M. MANDÒ-L. RONCHI, « *Nuovo Cimento* », 9, 512 (1952).
- [8] STOKER-HAARHOFF, « *Nucl. Phys.* », 14, 512 (1959).
- [9] F. TERNOVSKII, « *Soviet. Phys. J.E.P.T.* », 1, 10, 565 (1960).
- [10] F. ASHTON, « *Proc. Phys. Soc.* », 77, 587 (1961).
- [11] I. L. ROZENTHAL-V. N. STRELT'SOV, « *Soviet. Phys. J.E.P.T.* », 8, 1007 (1959).
- [12] P. H. BARRETT, L. M. BOLLINGER, G. COCCONI, Y. EISEMBERG, K. GREISEN, « *Rev. Mod. Phys.* », 24, 133, (1952).