Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ettore Picasso

Varietà a connessione metrica tensoriale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.6, p. 808–813.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_6_808_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Matematica. — *Varietà a connessione metrica tensoriale.* Nota di ETTORE PICASSO [*], presentata [**] dal Socio B. SEGRE.

PREMESSA. – Allo scopo di stabilire per certe classi di connessioni tensoriali affini le nozioni di *connessione metrica* e di *spazi di Weyl*, richiamiamo le proprietà essenziali relative ad una connessione metrica vettoriale.

È ben noto che le varietà a connessione metrica vettoriale costituiscono una sottoclasse delle varietà a connessione affine caratterizzate dalle proprietà seguenti:

I) è assegnata nello spazio tangente affine una metrica locale euclidea (o più in generale quadratica) definita a meno di un'*omotetia* e variabile da punto a punto;

II) la rappresentazione affine di raccordo tra gli spazi tangenti affini in due punti infinitamente vicini qualunque, è una similitudine.

Quest'ultima condizione è espressa dalle relazioni

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial x^t} = a_{rp}\,\Gamma^p_{st} + a_{sp}\,\Gamma^p_{rt} - a_{rs}\,\varphi_t \tag{1}$$

(a_{rs} è il tensore fondamentale della metrica e φ_t un arbitrario vettore). Se la varietà a connessione metrica è *senza torsione*, le (1) sono risolubili rispetto ai parametri Γ^t_{rs} e la geometria su tali varietà resta completamente determinata dal tensore a_{rs} e dal vettore φ_t. In particolare se le (1) si riducono alle

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial x^t} = a_{rp}\,\Gamma^p_{st} + a_{sp}\,\Gamma^p_{rt}\,, \tag{2}$$

la varietà è a *connessione euclidea*; se, oltre la (2), la connessione è senza torsione, la varietà è *riemanniana* od a *connessione di Levi-Civita* e i parametri della connessione coincidono coi simboli di Christoffel costruiti per le a_{rs}.

Definizioni e proprietà ora ricordate si trasportano agevolmente alle connessioni tensoriali plückeriane valendosi di una metrica bivettoriale.

I) TENSORI PLÜCKERIANI E CONNESSIONI TENSORIALI. – *A. Cossu*, sviluppando i fondamenti della teoria delle connessioni tensoriali (affini) di *E. Bompiani*, ha osservato fra l'altro che il differenziale assoluto cui dà luogo una generica connessione tensoriale di parametri L^{ik}_{rst}, applicato ad un campo di tensori ξ^{ik} controvarianti plückeriani, tali cioè che $\xi^{i[h}\,\xi^{k]l} = 0$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del 17° Gruppo di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1964.

segue le regole di differenziazione ordinaria, soltanto se per tali parametri risulta:

(3) $$L^{ik}_{[rs]t} = \delta^i_{[r} L^k_{s]t} + \delta^k_{[s} L^i_{r]t}\,, \quad \text{ove si è posto}$$

(4) $$L^k_{st} = \frac{2}{n-2} L^{pk}_{[ps]t} - \frac{\delta^k_s}{(n-2)(n-1)} L^{pq}_{[pq]t}\,.$$

Le uniche connessioni tensoriali del tipo richiesto per tensori controvarianti plückeriani, sono le connessioni *dedotte* (secondo la definizione di E. Bompiani) da quelle vettoriali relative a tensori alternanti. Il trasporto per equipollenza conserva in tal caso, come ha notato il Cossu, il carattere plückeriano dei tensori trasportati.

II) CONNESSIONI METRICHE TENSORIALI. – La nozione di *connessione metrica* e quella di *spazio di Weyl* per una varietà tensoriale del tipo ora detto, può collegarsi alla nozione notissima di *bivettore* di un R_n euclideo. Rammentiamo che un bivettore di componenti $\xi^{rs} = a^{[r} b^{s]}$ può rappresentarsi mediante un triangolo orientato $\overrightarrow{OAB}$ ($\overrightarrow{OA} = \bar{a}$, $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$), la cui area – *modulo del bivettore* – è data da

(5) $$\xi^2 = \sum_{(rs)(tq)} a_{(rs)(tq)} \xi^{rs} \xi^{tq},$$

ove la somma è estesa, rispetto alle due coppie di indici (rs), (tq) a tutte le combinazioni della classe 2 di $1, 2, \cdots, n$. I coefficienti della (5) espressi da

(6) $$a_{(rs)(tq)} = a_{rt}\, a_{sq} - a_{st}\, a_{rq}\,,$$

possono riguardarsi come elementi a due indici composti, di rango 2, (rs), (tq) variabili entro le $n(n-1)/2$ combinazioni ora dette; le ξ^{rs} medesime possono a loro volta ritenersi le componenti di un *tensore* (controvariante) ad un indice composto il cui modulo si esprime in modo del tutto analogo a quello di un vettore. Avuto riguardo alla (5) la metrica bivettoriale in R_n si potrà formalmente sviluppare come una qualunque metrica vettoriale.

Una *varietà a connessione metrica tensoriale* o, più propriamente, *bivettoriale*, sarà allora una varietà a connessione affine tensoriale soddisfacente alle seguenti condizioni (analoghe alle I), II) richiamate sopra):

I') è assegnata nello spazio affine tangente in ciascun punto una metrica locale bivettoriale euclidea (o più in generale quadratica) definita soltanto a meno di un'*omotetia* e variabile da punto a punto;

II') la rappresentazione tra gli spazi tangenti in due punti infinitamente vicini, mantenga costante il rapporto dei moduli di due qualunque bivettori (ossia non alteri il rapporto delle aree delle figure trasportate).

Quest'ultima condizione conduce a formule che conservano ancora la forma delle (1); il procedimento che si segue per stabilirle è quello stesso vettoriale, opportunamente adattato al trasporto di tensori plückeriani.

Siano: P, $P_1 = P + dP$ due punti infinitamente vicini; $1 - w$, con w infinitesimo del primo ordine rispetto a dP, il rapporto dei moduli dei due tensori ξ e $\xi_1 = \xi + d\xi$, applicati in P e in P_1 rispettivamente, con

$$d\xi^{ik} = - L^{ik}_{rst}\, \xi^{rs}\, dx^t \,. \tag{7}$$

Tali moduli, misurati il primo mediante la metrica in P, definita da $a_{(rs)(tp)}$, e il secondo mediante la metrica in P_1 definita da $a_{(rs)(tp)} + da_{(rs)(tp)}$, non risulteranno naturalmente uguali e si avrà

$$\sqrt{(a_{(rs)(tp)} + da_{(rs)(tp)})\, \xi_1^{rs}\, \xi_1^{tp}} = (1 - w) \sqrt{a_{(rs)(tp)}\, \xi^{rs}\, \xi^{tp}} \,, \tag{8}$$

e, a meno di infinitesimi d'ordine > 1,

$$\sqrt{a_{(rs)(tp)}\, \xi^{rs}\, \xi^{tp}} = (1 + w) \sqrt{(a_{(rs)(tp)} + da_{(rs)(tp)})\, \xi_1^{rs}\, \xi_1^{tp}} \,. \tag{9}$$

Se si muta l'unità di misura locale nel generico punto P, ponendo

$$a'_{(rs)(tp)} = k^2\, a_{(rs)(tp)} \,, \tag{10}$$

detto w' il nuovo valore di w, si avrà in $P_1 = P + dP$,

$$(1 + 2\, w')\, (a'_{(rs)(tp)} + da'_{(rs)(tp)}) = k^2\, (1 + 2\, w)\, (a_{(rs)(tp)} + da_{(rs)(tp)}), \tag{11}$$

e, sempre a meno di infinitesimi d'ordine > 1,

$$dk^2\, a_{(rs)(tp)} + 2\, w'\, k^2\, a_{(vs)(tp)} = 2\, w\, k^2\, a_{(rs)(tp)} \,, \tag{12}$$

alla quale si soddisfa con

$$w' = w - d \log \cdot |\, k \,| \,; \tag{13}$$

la trasformazione (10) del tensore fondamentale della metrica, dovrà essere accompagnata dalla trasformazione (13) di w. Dalle (9), eseguiti alcuni calcoli, in forza delle (7), a meno di infinitesimi d'ordine > 1, si trae

$$[da_{(rs)(tp)} - (a_{(rs)(mn)}\, L^{mn}_{tpq} + a_{(tp)(mn)}\, L^{mn}_{rsq})\, dx^q + 2\, w\, a_{(rs)(tp)}]\, \xi^{rs}\, \xi^{tp} = 0. \tag{14}$$

Qualunque sia il bivettore ξ e lo spostamento dP, si avrà conseguentemente

$$w\, a_{(rs)(tp)} = \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial a_{(rs)(tp)}}{\partial x^q} + a_{(rs)(mn)}\, L^{mn}_{tpq} + a_{(tp)(mn)}\, L^{mn}_{rsq} \right) dx^q \,. \tag{15}$$

Pertanto w risulta una *forma lineare* nelle dx^t e si potrà porre

$$w = \varphi_t\, dx^t. \tag{16}$$

La condizione II') *perché la connessione tensoriale plückeriana, sia una connessione metrica bivettoriale, è dunque espressa da*

$$\frac{\partial a_{(rs)(tp)}}{\partial x^q} = a_{(rs)(mn)}\, L^{mn}_{tpq} + a_{(tp)(mn)}\, L^{mn}_{rsq} - 2\, a_{(rs)(tp)}\, \varphi_q \,. \tag{17}$$

III) CONDIZIONI DI SUBORDINAZIONE. IL CASO DELLE V_3. – La connessione affine vettoriale di parametri L^h_{st} da cui la data può ritenersi *dedotta*, legata a quella tensoriale dalle relazioni (4), risulterà a sua volta una connessione metrica, se per il tensore fondamentale a_{rs} che definisce localmente la metrica della varietà e per il vettore φ_t da cui dipende il rapporto dei moduli di due vettori trasportati, sono verificate le (1) per i parametri L^h_{st}. Se la connessione L^h_{st} è senza torsione, le (1) dànno subito

$$(18) \qquad a_{rp}\, L^p_{st} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{rs}}{\partial x^t} + \frac{\partial a_{rt}}{\partial x^s} - \frac{\partial a_{st}}{\partial x^r}\right) + \frac{1}{2}\left(a_{rs}\,\varphi_t + a_{rt}\,\varphi_s - a_{st}\,\varphi_r\right);$$

la rappresentazione affine tra gli spazi tangenti in P e P_1, è una similitudine di rapporto $1 - \frac{w}{2} = 1 - \frac{1}{2}\varphi_t\, dx^t$. Tale connessione subordina ovviamente nella varietà medesima, una connessione metrica bivettoriale definita dal tensore ad indici composti ottenuto da a_{rs} mediante le (6), relativa alla *medesima* scelta della forma lineare w. Le (17) si ritrovano infatti derivando le (6) ed eliminando nei secondi membri di tali derivate le $\frac{\partial a_{rs}}{\partial x^t}$ mediante le (1) (scritte per le L^k_{st}), qualora si abbia riguardo alle relazioni di dipendenza (3) dei due sistemi di parametri. Inversamente: assegnata nella varietà una connessione metrica vettoriale mediante il tensore $a_{(rs)\,(tp)}$ e il vettore φ_t, soddisfacenti alle (18), la determinazione della metrica nella connessione vettoriale di parametri L^k_{st} da cui la data è dedotta, dipende dall'esistenza di un sistema di funzioni a_{rs} soddisfacenti alle (6) ed ad un sistema di equazioni differenziali lineari che si scrivono eliminando dalle (1) (relative ai parametri L^k_{st}) e (18), mediante le (3), i parametri L^k_{st} e L^{ik}_{rst}. Le due connessioni ora descritte, saranno rispettivamente *la connessione metrica bivettoriale dedotta dalla connessione vettoriale* e la *connessione metrica vettoriale subordinata dalla connessione tensoriale* (bivettoriale).

Particolare interesse presenta il caso di una varietà a tre dimensioni di assegnata connessione tensoriale. Le componenti del tensore quadratico ad indici composti che definisce la metrica bivettoriale risultano allora, a meno del segno, proprio i complementi algebrici delle a_{rs} nel determinante $a = |\, a_{rs}\,|$ e si ha

$$(19) \qquad a_{(rs)\,(mn)} = \varepsilon\, a^{(t)\,(p)} = \varepsilon\, a^{tp}\cdot a \quad , \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

ove le due coppie di indici di covarianza (rs), (mn) sono sostituiti rispettivamente con gli indici (t), (p) di controvarianza, essendo rst, mnp due permutazioni qualunque dei numeri 1, 2, 3. Si ha dalle (6): $a_{(rs)\,(tp)} = - a_{(rs)\,(tp)} = - a_{(rs)\,(pt)}$, per cui non sarà restrittivo supporre nelle (19) $\varepsilon = +1$. Le (17) si scrivono nel caso in esame

$$(20) \qquad \frac{\partial a^{(t)\,(p)}}{\partial x^q} = a^{(t)\,(h)}\, L^{(p)}_{(h)\,q} + a^{(p)\,(h)}\, L^{(t)}_{(h)\,q} - 2\, a^{(t)(p)}\, \varphi_q ,$$

ove $L^{(p)}_{(h)\,q}$ sta per L^{il}_{mnq}, in cui ilh, mnp, rappresentano due permutazioni degli indici 1, 2, 3.

Se alle I′), II′) del § II si aggiunge l'ulteriore condizione che i parametri della connessione tensoriale siano tali che

$$(21) \qquad \mathrm{L}^{(p)}_{(m)\,q} = \mathrm{L}^{(p)}_{q\,(m)}\,,$$

equivalenti alle $\mathrm{L}^{ik}_{rst} = \mathrm{L}^{ik}_{trs}$, dalle (20) è possibile ricavare le $\mathrm{L}^{(p)}_{(h)\,q}$, ottenendo

$$(22) \qquad a^{(t)\,(h)}\,\mathrm{L}^{(q)}_{(h)\,p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^{(t)\,(p)}}{\partial x^q} + \frac{\partial a^{(t)\,(q)}}{\partial x^p} - \frac{\partial a^{(p)\,(q)}}{\partial x^t}\right) + a^{(t)\,(p)}\,\varphi_q + a^{(t)\,(q)}\,\varphi_p - a^{(p)\,(q)}\,\varphi_t$$

Quanto precede legittima la seguente conclusione: *la geometria in una varietà a tre dimensioni a connessione metrica bivettoriale, è determinata* (dalle (22) che ne individuano i parametri, soggetti alle condizioni (21)) *quando si assegnino una forma differenziale quadratica e una forma differenziale lineare*

$$(23) \qquad d\sigma^2 = a_{(rs)\,(tp)}\,d\,(x^r\,x^s)\,d\,(x^t\,x^p) \quad , \quad w = \varphi_t\,dx^t,$$

ove le $a_{(rs)\,(tp)}$ *soddisfino alle* (19). *Tale connessione subordina una connessione metrica vettoriale, senza torsione* (individuata dalle (18)), *soddisfacente con la data alle* (3), (4) *in corrispondenza alla medesima scelta di* w, *quando si assuma* a_{rs} *quale tensore fondamentale della metrica vettoriale subordinata.* La rappresentazione affine tra gli spazi tangenti in P e P_1 è una stessa similitudine di rapporto $1 - \frac{w}{2} = 1 - \frac{1}{2}\,\varphi_t\,dx^t$. Inversamente: data la connessione metrica tensoriale, le due forme dette sopra non sono univocamente determinate, ma ogni coppia di forme, una quadratica e una lineare, $d\sigma'^2$ e w' che alle (23) sono collegate da formule del tipo $d\sigma'^2 = k^2\,d\sigma^2$, $w' = w - d\log\cdot|k|$, ove k è una funzione arbitraria delle x^t, dà luogo alla stessa connessione metrica tensoriale data da $d\sigma^2$ e w e alla stessa connessione metrica vettoriale subordinata che risulta determinata dalla forma w medesima e dalla forma quadratica $ds^2 = a_{rs}\,dx^r\,dx^s$. Se nelle (20) è $\varphi_q = 0$, la connessione su V_3 sarà *euclidea*; se poi, oltre la $\varphi_q = 0$, valgono le condizioni (21), la varietà sarà a *connessione riemanniana tensoriale* o *a connessione di Levi-Civita tensoriale.* In quest'ultimo caso i suoi parametri sono rappresentabili coi simboli $\mathrm{L}^{(q)}_{(t)\,p} = \left\{ {(q) \atop (t)\,(p)} \right\}$ il cui effettivo valore si calcola dalle (22).

Osservazione. Va notato che le precedenti conclusioni relative ad una V_3, trovano immediata generalizzazione per le varietà V_n relative a tensori multipli plückeriani di ordine $n-1$. La metrica tensoriale risulta individuata da un tensore le cui componenti sono proporzionali alle componenti controvarianti del tensore a_{rs} che individua la connessione metrica tensoriale, in corrispondenza ad una medesima determinazione del vettore φ_t da cui dipende il rapporto di similitudine dei vettori trasportati.

IV) Connessioni euclidee bivettoriali su V_n. – Torniamo al caso di una V_n qualunque. Le condizioni d'integrabilità delle (17), considerate come equazioni differenziali lineari nelle funzioni incognite $a_{(rs)\,(tp)}$ si esprimono come segue

$$a_{(rs)(mn)}\,[L^{\cdots mn}_{tplq} + 2\,L^{mn}_{tpl}\,\varphi_q - 2\,L^{mn}_{tpq}\,\varphi_l] + a_{(tp)(mn)}\,[L^{\cdots mn}_{rslq} + \tag{24}$$

$$+ 2\,L^{mn}_{rsl}\,\varphi_q - 2\,L^{mn}_{rsq}\,\varphi_l] - 2\,a_{(rs)(mn)}\left[\frac{\partial\varphi_l}{\partial x^q} - \frac{\partial\varphi_q}{\partial x^l}\right] = 0\,,$$

ove

$$L^{\cdots mn}_{tplq} = \partial_q\,L^{mn}_{tpl} - \partial_l\,L^{mn}_{tpq} + L^{hk}_{tpl}\,L^{mn}_{hkq} - L^{hk}_{tpq}\,L^{mn}_{hkl} \tag{25}$$

è un tensore costruito a partire dai parametri L^{ik}_{rst} allo stesso modo del tensore di curvatura riemanniana di una varietà a connessione affine vettoriale e rappresenta la parte principale del divario subìto dal tensore ξ^{ik} nel trasporto ciclico (Cossu, [2] N° 7, pp. 388–389). Il suo annullarsi esprime che tale trasporto è *integrabile*. Se, d'altra parte, si suppone esistente una connessione metrica vettoriale da cui la data connessione tensoriale sia dedotta, corrispondente perciò alla stessa forma w e quindi al medesimo vettore φ_t, l'annullarsi del tensore $\psi_{tq} = \frac{\partial\varphi_t}{\partial x^q} - \frac{\partial\varphi_q}{\partial x^t}$ (tensore di curvatura segmentaria, secondo Weyl), è condizione necessaria e sufficiente per *l'integrabilità delle lunghezze* nella varietà a connessione metrica vettoriale. Avremo dunque che, per *l'integrabilità delle aree e delle lunghezze*, dovranno simultaneamente annullarsi i tre tensori

$$\psi_{tq} = 0 \quad , \quad L^{\cdots mn}_{tplq} = 0 \quad , \quad a_{(rs)(mn)}\,L^{mn}_{tp\;[l}\varphi_{q]} + a_{(tp)(mn)}\,L^{mn}_{rs\;[l}\varphi_{q]} = 0. \tag{26}$$

La prima di tali condizioni esprime che φ_t è il gradiente di uno scalare φ per cui sarà possibile in virtù delle (13), rendere $w' = 0$ assumendo $\log\cdot|k| = \varphi$. La particolare connessione che si ottiene quando si operi la scelta ora detta di φ, sarà per la supposta V_n, una *connessione euclidea bivettoriale*. Se la connessione metrica vettoriale subordinata da questa, è pure euclidea (secondo la definizione richiamata nella premessa), il raccordo tra gli spazi tangenti in due punti infinitamente vicini, risulterà una *rappresentazione congruente*.

BIBLIOGRAFIA.

[1] E. BOMPIANI, *Le connessioni tensoriali*, « Rend. Acc. dei Lincei », serie VIII, vol. I, fasc. 5 (1946).

[2] A. COSSU, *Alcune osservazioni sulle connessioni tensoriali*, « Rend. di Matem. », serie V, vol. XIII, fasc. 3–4, Roma (1955).

[3] J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci Kalkül*, Berlin (1924).

[4] H. WEYL, *Mathematiche Analyse des Raumsproblems*, Berlin (1023).