
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MARIA TALLINI SCAFATI

Archi completi in un $S_{2,q}$ con q pari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 37 (1964), n.1-2, p. 48-51.
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_1-2_48_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Archi completi in un $S_{2,q}$, con q pari.* Nota (*) di MARIA TALLINI SCAFATI, presentata dal Socio B. SEGRE (**).

1. In un piano di Galois (cioè un piano costruito sopra un campo finito, o di Galois, γ_q , d'ordine q [3], § 12; [8], Ch. 12) definiscesi, come è noto, [8] p. 265, k -arco un insieme di k punti tre a tre non allineati. Un k -arco dicesi completo, [1], se non è contenuto in nessun $(k+1)$ -arco, cioè se per ogni punto del piano passa almeno una secante al k -arco. Lo studio degli archi si riconduce evidentemente a quello degli archi completi. Fissato q , se per un k -arco, k assume il massimo valore possibile, l'arco prende il nome di ovale, [8] p. 270. Per q dispari, è noto, [4], che ogni ovale è costituito dai punti di una conica non degenerare, e viceversa. Per q pari, un ovale è un $(q+2)$ -arco; un esempio di ovale essendo dato dall'insieme dei punti ottenuto aggregando a quelli di una conica il suo nucleo, [5] p. 100; si conoscono però altri esempi di ovali, determinati da B. Segre, [6], [7].

Esempi di k -archi completi che non siano ovali, sono stati determinati da L. Lombardo-Radice, [1], per q dispari. Nel caso q pari, non si avevano ancora esempi al riguardo, tranne che per particolari valori di q , [6], [2]. Nel presente Lavoro daremo appunto esempi di $(q+4)/2$ -archi completi in un $S_{2,q}$, con $q = 2^{2n+1}$, qualunque sia $n \geq 2$.

Precisamente, dopo alcune premesse di carattere algebrico, contenute nel n. 2, proveremo nel n. 3 che in un $S_{2,q}$, con $q = 2^{2n+1}$, di coordinate non omogenee (x, y) , il $(q+4)/2$ -insieme costituito dai $q/2$ punti di coordinate $(a, a^2 + a)$, ove a è un elemento variabile di prima categoria, [3] p. 76, di γ_q , e dai punti impropri degli assi coordinati, è un arco. Nel n. 4 proveremo infine che, se $n \geq 2$, siffatto arco risulta completo, mentre, se $n = 0, 1$, esso è incompleto e contenuto in un'ovale.

2. Sia γ_q un campo di Galois d'ordine $q = 2^h$. Un elemento a di γ_q dicesi di prima o di seconda categoria, [3], n. 80, a seconda che l'equazione $x^2 + x + a = 0$ ammetta soluzioni in γ_q oppure no. Si prova facilmente che, [3] n. 80.

PROPOSIZIONE I. — *Gli elementi di una stessa categoria sono in numero di $q/2$. La somma di due elementi di una stessa categoria è un elemento di prima categoria, la somma di due elementi di categorie diverse è un elemento di seconda categoria. Il quadrato e la radice quadrata di un elemento di una data categoria appartengono alla stessa categoria. Gli elementi a di prima categoria soddisfano all'equazione:*

$$a^{2^{h-1}} + a^{2^{h-2}} + \dots + a^2 + a = 0,$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1964.

(**) Il presente lavoro è stato eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca del C.N.R. n. 17.

quelli di seconda all'equazione:

$$a^{2^h-1} + a^{2^h-2} + \dots + a^2 + a = 1.$$

Ne segue che:

PROPOSIZIONE II. — *Se, e soltanto se, h è dispari, risulta 1 di seconda categoria e quindi, per ogni a di γ_q , a ed $a + 1$ sono sempre di categorie diverse.*

Dimosteremo ora che:

PROPOSIZIONE III. — *Se $h \geq 4$, oppure $h = 2$, in γ_q esiste un elemento $b \neq 0, 1$, di seconda categoria, tale che $1/b$ risulti ancora di seconda categoria. Per $h = 1, 3$ un siffatto elemento non esiste.*

Per $h < 4$ il suddetto risultato si prova direttamente. Supporremo perciò $h \geq 4$. Cominciamo col provare che in γ_q esiste un elemento $a \neq 0, 1$, tale che a ed $1/a$ risultino ambedue di prima categoria.

Si consideri nell' $S_{2,q}$ affine di coordinate non omogenee (x, y) la quartica:

$$(1) \quad (x^2 + x)(y^2 + y) + 1 = 0.$$

Essa risulta — come si verifica facilmente — irriducibile, ed ammette come unici punti multipli i punti $O_1(1, 0, 0)$ ed $O_2(0, 1, 0)$, che sono ambedue doppi di tipo biflecnodale. La curva (1) è dunque ellittica e, detto N il numero dei suoi punti semplici, che coincide con quello dei suoi punti propri, in forza di una formula di Hasse-Weil, [9], [10], si ha:

$$(\sqrt{q} - 1)^2 \leq N + 4 \leq (\sqrt{q} + 1)^2.$$

Risultando $q = 2^h \geq 16$ (in quanto è attualmente $h \geq 4$), sarà $N \geq 5$. Dunque esiste certamente in γ_q un punto proprio (X, Y) appartenente alla curva (1) e che non giaccia sulle rette di equazione complessiva $x^2 + x = 1$. Posto $X^2 + X = a$, risulterà intanto $a \neq 1$, ed inoltre:

$$(1') \quad a(Y^2 + Y) + 1 = 0,$$

onde è certamente $a \neq 0$; inoltre a è di prima categoria (in quanto l'equazione $x^2 + x + a = 0$ ammette in γ_q la soluzione X) ed anche $1/a$ è di prima categoria (in quanto l'equazione $x^2 + x + 1/a = 0$, in forza della (1'), ammette in γ_q la soluzione Y). Rimane così provato l'asserto. La Proposizione III segue allora facilmente, osservando che gli elementi di seconda categoria, diversi da $0, 1$, sono — in ogni caso — in numero maggiore od uguale a quelli di prima categoria diversi da $0, 1$.

3. In un $S_{2,q}$ (con $q = 2^{2n+1}$, $n \geq 0$) affine di coordinate non omogenee (x, y) si consideri la conica di equazione:

$$(2) \quad x^2 + x + y = 0.$$

Essa è una parabola non degenera, tangente alla retta impropria nel punto improprio dell'asse y ed avente nucleo nel punto $N(1, 1, 0)$. Sia $\mathfrak{J}$ l'insieme dei punti propri della (2), di coordinate $(a, a^2 + a)$, con a elemento di prima categoria in γ_q . $\mathfrak{J}$ consta di $q/2$ punti.

Proveremo ora che:

PROPOSIZIONE IV. - *Le rette $y = \text{cost.}$, secanti la (2), la incontrano in due punti di cui uno soltanto appartiene ad $\mathfrak{J}$.*

Sia $y = c$ una retta secante la (2), onde c è un elemento di prima categoria, e sia a una soluzione dell'equazione $x^2 + x + c = 0$. L'ulteriore soluzione dell'equazione suddetta sarà allora data da $a + 1$ (cfr. [3] n. 80). La retta $y = c$ interseca la (2) nei due punti (a, c) ed $(a + 1, c)$. Poiché a ed $a + 1$ appartengono a categorie diverse (cfr. Proposizione II), dei due punti (a, c) e $(a + 1, c)$ uno soltanto appartiene ad $\mathfrak{J}$.

Dalla Proposizione testé provata, si ha che il $(q + 4)/2$ -insieme K costituito dai punti di $\mathfrak{J}$ e dai punti impropri degli assi coordinati è un $(q + 4)/2$ -arco.

Nel successivo n. 4 mostreremo che, se $n \geq 2$, il $(q + 4)/2$ -arco suddetto risulta completo, mentre per $q = 2, 8$ esso è incompleto.

4. In $S_{2,q}$ ($q = 2^{2n+1}$, $n \geq 2$), si consideri il $(q + 4)/2$ -arco K di cui al numero precedente. Per mostrare che K è completo, basta provare che da ogni punto proprio $P(\alpha, \beta)$ di $S_{2,q}$ passa almeno una secante di K . Se α è di prima categoria, la retta $x = \alpha$ è senz'altro una secante di K . Se β è di prima categoria, la retta $y = \beta$ è una secante della conica (2) e quindi (cfr. Proposizione IV) è una secante anche di K . Resta dunque soltanto più da esaminare il caso in cui α e β siano ambedue di seconda categoria.

Distinguiamo le eventualità:

$$(I) \quad \alpha^2 + \alpha + \beta + 1 \neq 0,$$

$$(II) \quad \alpha^2 + \alpha + \beta + 1 = 0.$$

Nel caso (I), si considerino i punti Q, R della (2) dati da: $Q[\alpha + 1, \alpha^2 + \alpha]$, $R[\alpha^2 + \beta, (\alpha^2 + \beta)^2 + \alpha^2 + \beta]$. Essi sono tra loro distinti; (risultando attualmente $\alpha^2 + \alpha + \beta + 1 \neq 0$); inoltre, essendo in virtù delle Proposizioni I e II $\alpha + 1$ ed $\alpha^2 + \beta$ di prima categoria (poiché α e β sono di seconda categoria), Q ed R appartengono ad $\mathfrak{J}$. D'altra parte si verifica immediatamente che la retta QR passa per P . Dunque per P passa una secante di $\mathfrak{J}$ e quindi di K .

Nel caso (II), si consideri in γ_q un elemento $b \neq 0, 1$, tale che b e $1/b$ siano ambedue di seconda categoria (un siffatto elemento esiste sempre, in forza della Proposizione III, supponendosi attualmente $n \geq 2$). I seguenti due punti della (2): $S[b + \alpha, (b + \alpha)^2 + b + \alpha]$, $T[1/b + \alpha, (1/b + \alpha)^2 + 1/b + \alpha]$ sono distinti (essendo $b \neq 1$) ed appartengono ad $\mathfrak{J}$ (in base alla Proposizione I ed essendo b, α ed $1/b$ di seconda categoria); d'altra parte la retta ST passa per P , come si verifica immediatamente, essendo $\alpha^2 + \alpha + \beta + 1 = 0$. Dunque per P passa una secante di $\mathfrak{J}$, cioè di K . Resta così provata la completezza di K , per $n \geq 2$.

Nel caso $q = 2$, l'arco K risulta certamente incompleto, ogni 3-arco di un $S_{2,2}$ essendo manifestamente contenuto in un'ovale.

Mostriamo ora che, anche per $q = 8$, K è incompleto e contenuto in un'ovale. Si consideri infatti l' $S_{2,8}$ costruito sul campo di Galois $\gamma_8(0, 1, i, i + 1, i^2, i^2 + 1, i^2 + i, i^2 + i + 1)$, ove $i^3 = i + 1$, e quindi

$$(3) \quad (i^2 + i)^2 = i, \quad i^4 = i^2 + i.$$

L'elemento i è di prima categoria in γ_8 (l'equazione $x^2 + x + i = 0$ ammettendo le soluzioni $i^2, i^2 + 1 \in \gamma_8$, cfr. (3)), e quindi anche i^2 ed $i^2 + i$ sono di prima categoria (cfr. Proposizione I). Cioè gli elementi di prima categoria di γ_8 sono: $0, i, i^2, i^2 + i$. Dunque il 6-arco K di $S_{2,8}$ è costituito dai punti:

$$(4) \quad (0, 0); (i, i^2 + i); (i^2, i); (i^2 + i, i^2);$$

e dai punti impropri degli assi. Esso è allora contenuto nel 10-arco (ovale) costituito dai punti della conica $y^2 = x$ e dal suo nucleo (che è il punto improprio dell'asse y), come segue immediatamente dalle (3) e (4).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] L. LOMBARDO-RADICE, *Sul problema dei k -archi completi in $S_{2,q}$* , « Boll. U.M.I. », (3) 11, 2, 178-181 (1956).
- [2] M. SCAFATI, *Sui 6-archi completi di un piano lineare $S_{2,8}$* . Atti Conv. Reticoli e geom. proiettive (Palermo 1957), Cremonese, Roma, pp. 128-132.
- [3] B. SEGRE, *Lezioni di Geometria Moderna*, (Zanichelli, Bologna 1948).
- [4] B. SEGRE, *Ovals in a finite projective plane*, « Canadian Journal of Math. », 7, 414-416 (1955).
- [5] B. SEGRE, *Intorno alla geometria sopra un campo di caratteristica due*, « Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul », (A) 21, 97-123 (1956).
- [6] B. SEGRE, *Sui k -archi nei piani finiti di caratteristica due*, « Revue de Math. Pures et Appl. », 2, 289-300 (1957).
- [7] B. SEGRE, *Ovali e curve σ nei piani di Galois di caratteristica due*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8) 32, 785-790 (1962).
- [8] B. SEGRE, *Lectures on Modern Geometry* (Cremonese, Roma 1961).
- [9] A. WEIL, *Number of solutions of equations in finite fields*, « Bull. Amer. Math. Soc. », 55, 497-508 (1949).
- [10] A. WEIL, S. LANG, *Number of points of varieties in finite fields*, « Amer. Journal of Math. » 76, 818-827 (1954).