Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giulio Supino

Sopra la possibilità di modelli geologici. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.6, p. 349–353.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_6_349_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 dicembre 1964

Presiede il Socio anziano PAOLO DORE

NOTE DI SOCI

Teoria dei modelli. — *Sopra la possibilità di modelli geologici.* Nota I [*] del Corrisp. GIULIO SUPINO.

1. Da qualche decennio è stata sollevata la questione della possibilità o meno di eseguire modelli in scala ridotta per riprodurre fenomeni geologici. Rinviando ad un lavoro più esteso l'esame delle più importanti ricerche svolte in questo campo, si vuole qui ricordare che M. King Hubbert [1], cercando le modifiche della viscosità colla riduzione delle scale delle lunghezze e dei tempi, giunge a ritenere che debba rimanere invariato il numero puro $\eta V/\gamma l^2$ [2], ciò che corrisponde a ritenere invariato il quoziente F/N (essendo $F = \frac{V^2}{gl}$ il numero di Froude ed $N = \frac{\rho V d}{\eta}$ il numero di Reynolds). L'Hubbert giunge a questa conclusione (che è corretta) con considerazioni intuitive e, data la via seguita, non ne ricava tutte le conseguenze.

Nel presente lavoro mi propongo di ampliare e completare la ricerca di Hubbert, di introdurre il concetto di modello inverso, e di presentare qualche

(*) Presentata nella seduta del 12 dicembre 1964.

(1) Si veda M. KING HUBBERT, *Theory of scale Models as applied in the study of Geologic Structures,* « Bull. of Geol. Soc. of America », *48,* 1450–1520 (1937) e *Strenght of the Earth,* « Bull. Am. Assoc. of Petroleum Geologist », *29,* 1630–1653 (1945).

(2) È η il coefficiente di viscosità, γ il peso specifico, V e l rispettivamente una velocità e una lunghezza scelte arbitrariamente (con intendimento di caratterizzare il fenomeno) e comprendentisi nel modello e nel prototipo.

esempio di carattere concettuale di modello di lento scorrimento. Spero in seguito di svolgere effettivamente l'esperienza in laboratorio.

2. Per ottenere i risultati annunciati è opportuno scrivere le equazioni che reggono il fenomeno: finché si applica soltanto il teorema Pi non è possibile introdurre alcune semplificazioni che hanno importanza essenziale [3]. Noi scriveremo quindi le equazioni dei solidi plastici e dei liquidi viscosi; discuteremo in seguito della loro rispondenza con i fenomeni di deformazione effettivamente riscontrabili nei vari corpi.

In un corpo qualunque (solido, liquido, gassoso) in moto, soggetto a forze di massa F_x, F_y, F_z e a forze superficiali P_x, P_y, P_z, valgono (come è ben noto) le seguenti equazioni:

a) In ogni punto interno:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y_1}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z_1}=\rho\left(F_x-\dfrac{Du_1}{Dt_1}\right)\\[2mm] \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y_1}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial z_1}=\rho\left(F_y-\dfrac{Dv_1}{Dt_1}\right)\\[2mm] \dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z_1}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y_1}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z_1}=\rho\left(F_z-\dfrac{Dw_1}{Dt_1}\right)\end{cases}\qquad \text{(equazioni indefinite),}$$

essendo Du_1/Dt_1, Dv_1/Dt_1, Dw_1/Dt_1 le derivate sostanziali di u_1, v_1, w_1, cioè le componenti della accelerazione della particella che nel tempo t_1 passa per il punto di coordinate x_1, y_1, z_1;

b) In ogni punto della superficie limite

$$(2)\qquad \begin{cases} \sigma_x\cos(n,x_1)+\tau_{xy}\cos(n,y_1)+\tau_{zx}\cos(n,z_1)=P_x\\ \tau_{xy}\cos(n,x_1)+\sigma_y\cos(n,y_1)+\tau_{yz}\cos(n,z_1)=P_y\\ \tau_{zx}\cos(n,x_1)+\tau_{yz}\cos(n,y_1)+\sigma_z\cos(n,z_1)=P_z\end{cases}\qquad \text{(equazioni ai limiti).}$$

3. Le equazioni (1) e (2) tengono conto esclusivamente delle proprietà cui soddisfano le tensioni interne in base alle leggi della meccanica sulla composizione e decomposizione delle forze. Queste equazioni valgono perciò tanto nel campo elastico che in quello plastico o in quello viscoso. Ma, a seconda del tipo di solido o di liquido che si studia, il collegamento tra tensioni interne e deformazioni, o tra tensioni interne e velocità di deformazione risulta differente ed è assegnato in modo da completare la descrizione del fenomeno fisico (che le (1) e (2) lasciano indeterminato).

Nel caso dei liquidi viscosi si ammette il seguente legame tra tensioni e velocità di deformazione:

$$(3)\qquad \begin{cases} \sigma_x=p_1-2\eta\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad \sigma_y=p_1-2\eta\dfrac{\partial v_1}{\partial y_1} \qquad \sigma_z=p_1-2\eta\dfrac{\partial w_1}{\partial z_1}\\[2mm] \tau_{yz}=-\eta\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial y_1}+\dfrac{\partial v_1}{\partial z_1}\right) \qquad \tau_{zx}=-\eta\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}+\dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}\right) \qquad \tau_{xy}=-\eta\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1}\right).\end{cases}$$

(3) G. SUPINO, *Il valore della analisi dimensionale*, «Rendiconti del Seminario Matematico e fisico di Milano», vol. XXX, Milano 1960.

Questi valori sostituiti nella (1) (e tenuto conto che il liquido è incomprimibile e cioè $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0$) portano alle relazioni

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial x_1} - \eta \Delta_2 u_1 = \rho \left(F_x - \dfrac{D u_1}{D t_1} \right) \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial y_1} - \eta \Delta_2 v_1 = \rho \left(F_y - \dfrac{D v_1}{D t_1} \right) \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial z_1} - \eta \Delta_2 w_1 = \rho \left(F_z - \dfrac{D w_1}{D t_1} \right). \end{cases}$$

Conviene scrivere queste equazioni in *forma adimensionale*. Perciò al posto di $x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1$, t_1 e p_1 considereremo le variabili *ridotte* (o adimensionali) legate alle precedenti dalle relazioni

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{x_1}{l_1} \quad , \quad y = \dfrac{y_1}{l_1} \quad , \quad z = \dfrac{z_1}{l_1} \\ u = \dfrac{u_1}{V_1} \quad , \quad v = \dfrac{v_1}{V_1} \quad , \quad w = \dfrac{w_1}{V_1} \\ t = \dfrac{V_1}{l_1} t_1 \quad , \quad p = \dfrac{p_1}{\gamma_1 l_1} , \end{cases}$$

nelle quali l_1, V_1 rappresentano rispettivamente una dimensione lineare e una velocità scelte ad arbitrio, ma costanti (indipendenti cioè da x_1, y_1, z_1, e da t_1).

Con le sostituzioni (5), si ottengono le equazioni adimensionali

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} - A \Delta_2 u = \dfrac{1}{g} F_x - F \dfrac{Du}{Dt} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} - A \Delta_2 v = \dfrac{F_y}{g} - F \dfrac{Dv}{Dt} \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} - A \Delta_2 w = \dfrac{F_z}{g} - F \dfrac{Dw}{Dt} , \end{cases}$$

essendo sempre

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad , \quad F = \frac{V^2}{gl} \quad , \quad A = F/N = \frac{\eta V}{\gamma l^2} \text{ [4]}.$$

4. Quando si studia il comportamento di un corpo *plastico*, allora alle equazioni (1) e (2) si deve aggiungere la *condizione di scorrimento*. Si ammette che la plasticità si manifesti quando le tensioni interne (o una loro funzione scelta opportunamente) hanno raggiunto un certo valore: al disotto di questo valore si resta nel campo elastico determinato dalla legge di Hooke e quindi non si manifestano deformazioni permanenti.

(4) La trasformazione adimensionale usualmente applicata in aerodinamica dà $p = p_1/\rho V_1^2$. Qui si è preferito usare la trasformazione indicata dalle (5), perché normalmente si tratta di movimenti lenti nei quali conviene trascurare le forze d'inerzia.

La condizione di scorrimento più comunemente ammessa si fonda sulla osservazione che una tensione uniforme, per quanto alta sia, non dà luogo a fenomeni plastici. Conviene perciò considerare la media delle tensioni normali nell'interno di un punto:

$$S = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),$$

e porre poi

$$S_x = \sigma_x - S \quad , \quad S_y = \sigma_y - S \quad , \quad S_z = \sigma_z - S .$$

La sollecitazione definita dalle S_x, S_y, S_z è quindi una sollecitazione a dilatazione nulla.

Consideriamo ora l'invariante

$$J_2 = \frac{1}{2}(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 ,$$

che è proporzionale alla energia di distorsione. La condizione di scorrimento è allora

$$J_2 - K^2 = 0. \tag{7}$$

Vediamo ora il legame tra tensioni e velocità di deformazione. Si pone

$$\tag{8} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = \dfrac{\mu}{2G} S_x \quad , \quad \dfrac{\partial v_1}{\partial y_1} = \dfrac{\mu}{2G} S_y \quad , \quad \dfrac{\partial w_1}{\partial z_1} = \dfrac{\mu}{2G} S_z \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} = \dfrac{\mu}{G} \tau_{xy} \quad , \quad \dfrac{\partial v_1}{\partial z_1} + \dfrac{\partial w_1}{\partial y_1} = \dfrac{\mu}{G} \tau_{yz} \quad , \quad \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} = \dfrac{\mu}{G} \tau_{zx} . \end{array} \right.$$

Scriviamo poi

$$\dot{W} = S_x \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + S_y \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + S_z \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) \tau_{xy} +$$
$$+ \left(\frac{\partial v_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_1}{\partial y_1} \right) \tau_{yz} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \right) \tau_{zx} ;$$

allora segue

$$2 G\dot{W} = 2 \mu J_2$$

e quindi nel periodo plastico

$$\mu = \frac{G\dot{W}}{K^2} .$$

Si osservi che le dimensioni di $\mu/G = F^{-1} L^2 T^{-1}$ corrispondono all'inverso di una viscosità.

Deduciamo ora le equazioni valide in tutto il campo elastoplastico. Dalla legge di Hooke si ricava per derivazione rispetto al tempo:

$$2 G \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial S_x}{\partial t_1} + \frac{m - 1}{m} \frac{\partial S}{\partial t_1} , \qquad G \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t_1} + \cdots ;$$

componendo queste con la (8), si ottiene in definitiva

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial S_x}{\partial t_1} + \dfrac{m-1}{m}\dfrac{\partial S}{\partial t_1} = 2G\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - \dfrac{\dot{W}}{2K^2} S_x\right), & \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial t_1} = G\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial z_1} + \dfrac{\partial w_1}{\partial y_1} - \dfrac{\dot{W}}{2K^2}\tau_{yz}\right) \\ \dfrac{\partial S_y}{\partial t_1} + \dfrac{m-1}{m}\dfrac{\partial S}{\partial t_1} = 2G\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial y_1} - \dfrac{\dot{W}}{2K^2} S_z\right), & \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial t_1} = G\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} + \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1} - \dfrac{\dot{W}}{2K^2}\tau_{zx}\right) \\ \dfrac{\partial S_z}{\partial t_1} + \dfrac{m-1}{m}\dfrac{\partial S}{\partial t_1} = 2G\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial z_1} - \dfrac{\dot{W}}{2K^2} S_z\right), & \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial t_1} = G\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} - \dfrac{\dot{W}}{ZK^2}\tau_{xy}\right). \end{cases}$$

Queste relazioni valgono durante lo stato plastico, cioè quando sia $J_2 = K^2$.

5. Abbiamo scritto le equazioni dei liquidi viscosi [le (6)] e quelle dei solidi plastici [le (9)]. Tra le due scritture vi è però una differenza perché, mentre le (6) debbono essere completate soltanto con le condizioni ai limiti (valore della pressione sulla superficie libera e velocità nulla alle pareti), invece le (9) devono essere completate non solo con le condizioni ai limiti, ma anche con le equazioni indefinite (1). È tuttavia opportuno procedere ad alcune semplificazioni, in quanto, essendo molto lenti i movimenti geologici, possono essere trascurate le accelerazioni [5].

Perciò, trascurando nelle (9) $\dfrac{\partial S_x}{\partial t_1}, \dfrac{\partial S_y}{\partial t_1}, \cdots, \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial t_1}$, si può scrivere $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = \dfrac{\mu}{2G}(\sigma_x - S) + \cdots$ e le analoghe (cioè ci si riconduce alle (8)) e queste, sostituite nelle equazioni indefinite (1), portano alle equazioni

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{G}{\mu}\Delta_2 u_1 + \dfrac{\partial S}{\partial x_1} = \rho F_x \\ \dfrac{G}{\mu}\Delta_2 v_1 + \dfrac{\partial S}{\partial y_1} = \rho F_y \\ \dfrac{G}{\mu}\Delta_2 w_1 + \dfrac{\partial S}{\partial z_1} = \rho F_z, \end{cases}$$

equazioni che coincidono con quelle dei liquidi viscosi (4) trascurando in quelle $D_1 u/Dt$, Dv_1/Dt, Dw_1/Dt, e ponendo qui $\eta = -G/\mu$ (il che dal punto di vista dimensionale è perfettamente corretto).

Si conclude perciò rilevando che la *costruzione di un modello di lento scorrimento dal punto di vista dei solidi plastici richiede le stesse trasformazioni dimensionali che la costruzione fatta dal punto di vista dei liquidi viscosi, purché anche nel modello le deformazioni siano lente in modo da poter trascurare le accelerazioni.*

(5) Per i moti «rapidi» non sono state sollevate difficoltà da nessuno dei precedenti Autori e si può quindi applicare la similitudine come nei fenomeni elastici e plastici. Si tenga presente che prima del Hubbert si sono occupati del problema (se anche da un punto di vista non sempre accettabile) R. MAILLET et F. BLONDEL («Bull. de la Soc. Geol. de France», 1934), R. MAILLET et R. PAVANS DE CECCATY (Congrès Mond. du Petrole (1937)).