Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Prouse

Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea della membrana vibrante, con termine dissipativo quadratico. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.6, p. 364–370.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_6_364_0>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea della membrana vibrante, con termine dissipativo quadratico.* Nota II di GIOVANNI PROUSE, presentata (*) dal Corrisp. L. AMERIO.

3. Dal teorema 2.1 segue il

TEOREMA 3.1. – *Supponiamo che* $f(t)$ *ed* $f'(t)$ *siano* L_0^2*-limitate in* J. *Esiste allora in* J *una ed una sola soluzione* $\tilde{u}(\eta)$ *della* (1.3) *che sia* E*-limitata in* J; *inoltre* $\tilde{u}'(\eta)$ *risulta pure* E*-limitata in* J.

Consideriamo infatti la successione di funzioni $\{u_n(\eta)\}$ definite nel modo seguente. Per $\eta \geq -n$, $u_n(\eta)$ sia la soluzione della (1.3) soddisfacente alle condizioni iniziali $u_n(-n) = u'_n(-n) = 0$; per $\eta \leq -n$, sia $u_n(\eta) = 0$.

È evidente che, posto

$$f_n(\eta) = \begin{cases} f(\eta) & \text{per} \quad \eta \geq -n \\ 0 & \text{per} \quad \eta < -n, \end{cases} \tag{3.1}$$

la funzione $u_n(\eta)$ sarà una soluzione, in J, della (1.3) corrispondente al termine noto $f_n(\eta)$. Si ha poi, per le (1.14), (2.2),

$$\sup_{\eta \in J} \| u_n(\eta) \|_E \leq K \quad , \quad \sup_{\eta \in J} \| u'_n(\eta) \|_E \leq \tilde{K}. \tag{3.2}$$

È quindi possibile estrarre dalla successione $\{u_n(\eta)\}$ una sottosuccessione (che diremo ancora $\{u_n(\eta)\}$) tale che risulti, per ogni $h_1 \in L_0^1(E)$ e per ogni $t \in J$, analogamente alle (1.11), (1.12),

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Delta_0} (u_n(t+\eta), h_1(\eta))_E \, d\eta = \int_{\Delta_0} (\tilde{u}(t+\eta), h_1(\eta))_E \, d\eta, \tag{3.3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Delta_0} (u'_n(t+\eta), h_1(\eta))_E \, d\eta = \int_{\Delta_0} (\tilde{u}'(t+\eta), h_1(\eta))_E \, d\eta. \tag{3.4}$$

Dimostriamo che la funzione $\tilde{u}(\eta)$ è una soluzione E-limitata in J della (1.3).

Dalle (3.2), (3.3), (3.4) si deduce anzitutto

$$\sup_{\eta \in J} \| \tilde{u}(\eta) \|_E \leq K \quad , \quad \sup_{\eta \in J} \| \tilde{u}'(\eta) \|_E \leq \tilde{K} \tag{3.5}$$

ed è quindi soddisfatta la condizione a_2) del § 1.

(*) Nella seduta del 14 novembre 1964.

Dalla (3.4) segue inoltre, indicato con Δ un generico intervallo limitato $\subset J$ e posto $Q = \Omega \times \Delta$:

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\, u'_n \underset{H^1(Q)}{=} \tilde{u}' \text{ (3)}. \tag{3.6}$$

Per la completa continuità, già ricordata, dell'immersione di $H^1(Q)$ in $L^4(Q)$, si può senz'altro ammettere, per la (3.6), che risulti

$$\lim_{n\to\infty} u'_n \underset{L^4(Q)}{=} \tilde{u}'. \tag{3.7}$$

Ricordiamo ora che le $u_n(\eta)$ soddisfano all'equazione

$$\int_J \{(u''_n(\eta), h(\eta))_{L^2} + (u_n(\eta), h(\eta))_{H_0^1} + (u'_n(\eta), h(\eta))_{L^2} + \\ + (|u'_n(\eta)|\, u'_n(\eta), h(\eta))_{L^2}\}\, d\eta = \int_J (f_n(\eta), h(\eta))_{L^2}\, d\eta, \tag{3.8}$$

per ogni $h(\eta) \in L^2_{\mathrm{loc}}(J; H_0^1)$ a supporto compatto, e che si ha, ovviamente,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) \underset{L_0^2}{=} f(t). \tag{3.9}$$

Dalle (3.3), (3.4), (3.9) si deduce immediatamente:

$$\lim_{n\to\infty} \int_J \{(u''_n(\eta), h(\eta))_{L^2} + (u_n(\eta), h(\eta))_{H_0^1} + (u'_n(\eta), h(\eta))_{L^2} + \\ - (f_n(\eta), h(\eta))_{L^2}\}\, d\eta = \int_J \{(\tilde{u}''(\eta), h(\eta))_{L^2} + (\tilde{u}(\eta), h(\eta))_{H_0^1} + \\ + (\tilde{u}'(\eta), h(\eta))_{L^2} - (f(\eta), h(\eta))_{L^2}\}\, d\eta. \tag{3.10}$$

Si ha inoltre, per la disuguaglianza di Hölder,

$$\left| \int_J \{(|u'_n(\eta)|\, u'_n(\eta), h(\eta))_{L^2} - (|\tilde{u}'(\eta)|\, \tilde{u}'(\eta), h(\eta))_{L^2}\}\, d\eta \right| \leq \\ \leq \int_J \{|(|u'_n(\eta)|\,(u'_n(\eta) - \tilde{u}'(\eta)), h(\eta))_{L^2}| + |((|u'_n(\eta)| - |\tilde{u}'(\eta)|)\, \tilde{u}'(\eta), h(\eta))_{L^2}|\}\, d\eta \leq \\ \leq \int_J \{(|u'_n(\eta)|\, |u'_n(\eta) - \tilde{u}'(\eta)|, |h(\eta)|)_{L^2} + (|u'_n(\eta) - \tilde{u}'(\eta)|\, |\tilde{u}'(\eta)|, |h(\eta)|)_{L^2}\}\, d\eta \leq \\ \leq (\|\tilde{u}'\|_{L^4(Q_h)} + \|u'_n\|_{L^4(Q_h)})\, \|u'_n - \tilde{u}'\|_{L^4(Q_h)}\, \|h\|_{L^2(Q_h)}, \tag{3.11}$$

avendo posto $Q_h = \Omega \times \Delta_h$, ove Δ_h è il supporto della funzione $h(\eta)$.

(3) Ossia, $\forall\, h_1 \in H^1(Q)$,

$$\lim_{n\to\infty} (u'_n - \tilde{u}', h_1)_{H^1(Q)} = 0.$$

Dalle (3.7), (3.11) segue:

$$(3.12)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_J (|u_n'(\eta)|\,u_n'(\eta)\,,\,h(\eta))_{L^2}\,d\eta = \int_J (|\tilde u'(\eta)|\,\tilde u'(\eta)\,,\,h(\eta))_{L^2}\,d\eta .$$

La funzione $\tilde u(\eta)$ è quindi, per le (3.8), (3.10), (3.12) una soluzione in J della (1.3); poiché $\tilde u(\eta)$ soddisfa alle (3.5) e poiché, in virtù di un risultato dimostrato in [2], non può esistere più di una soluzione E–limitata in J della (1.3), il teorema è dimostrato.

Si osservi, da ultimo, che, per la (3.5), *la soluzione* $\tilde u(\eta)$, E–*limitata in* J, *risulta* E–*uniformemente continua in* J.

4. Dimostriamo il seguente teorema.

TEOREMA 4.1. – *Supponiamo che siano verificate le ipotesi del teorema* 3.1. *Allora la traiettoria della soluzione* $\tilde u(\eta)$, E–*limitata in* J, *risulta* E–*relativamente compatta.*

Proviamo dapprima che la traiettoria di $\tilde u(t)$ è $L_0^2(E)$–relativamente compatta; utilizzeremo, per questo, un teorema di compattezza dimostrato da Amerio (cfr. [7], § 4) per le equazioni lineari negli spazi di Hilbert (4).

Notiamo che, se Ω è un aperto ad $m \le 5$ dimensioni, dotato della proprietà di cono, l'immersione di $H^1(\Omega\times\Delta_0)$ in $L^4(\Omega\times\Delta_0)$ è continua e si ha, per la (3.5),

$$(4.1)\qquad \|\,|\tilde u'(t)|\,\tilde u'(t)\|_{L_0^2} = \left\{\int_{\Delta_0}\int_{\Omega} |\tilde u'(x\,,t+\eta)|^4\,dQ\right\}^{1/2} =$$

$$= \|\tilde u'(t)\|_{L_0^4}^2 \le c_3\,[\|\tilde u''(t)\|_{L_0^2}^2 + \|\tilde u'(t)\|_{L_0^2(H_0^1)}^2] \le K_7 .$$

Posto $g(\eta) = f(\eta) - |\tilde u'(\eta)|\,\tilde u'(\eta)$, la funzione $\tilde u(t)$ risulta, per il teorema 3.1, una soluzione $L_0^2(H_0^1)$–limitata, con $\tilde u'(t)$ L_0^2–uniformemente continua, dell'equazione

$$(4.2)\qquad u''(\eta) - \Delta u(\eta) + u'(\eta) = g(\eta),$$

essendo $g(t)$ L_0^2–limitata, in virtù della (4.1). Segue allora dal teorema sopra citato che la traiettoria di $\tilde u(t)$ è $L_0^2(E)$–relativamente compatta.

Dimostriamo, in più, che tale traiettoria risulta E–relativamente compatta.

Indicata con $\{l_n\}$ una successione di numeri reali, poniamo

$$(4.3)\qquad w_{jk}(\eta) = \tilde u(\eta + l_j) - \tilde u(\eta + l_k).$$

(4) Gli spazi X ed Y introdotti da Amerio in tale teorema corrispondono rispettivamente a H_0^1 ed a L^2; inoltre W_0 è lo spazio da noi chiamato $L_0^2(E)$.

La funzione $w_{jk}(\eta)$ soddisfa ovviamente all'equazione

$$(4.4)\qquad \int_J \{ (w''_{jk}(\eta), h(\eta))_{L^2} + (w_{jk}(\eta), h(\eta))_{H^1_0} + (w'_{jk}(\eta), h(\eta))_{L^2} +$$
$$+ (|\bar u'(\eta + l_j)|\bar u'(\eta + l_j) - |\bar u'(\eta + l_k)|\bar u'(\eta + l_k), h(\eta))_{L^2} -$$
$$- (f(\eta + l_j) - f(\eta + l_k), h(\eta))_{L^2}\} \, d\eta = 0$$

per ogni $h(\eta) \in L^2_{loc}(J; H^1_0)$, a supporto compatto.

Posto, nella (4.4), $h(\eta) = w'_{jk}(\eta)$ per $\eta \in [\bar\eta, 0]$ $(-1 \leq \bar\eta \leq 0)$, $h(\eta) = 0$ per $\eta \notin [\bar\eta, 0]$ ed osservando che, come si può constatare [2],

$$(|\bar u'(\eta + l_j)|\bar u'(\eta + l_j) - |\bar u'(\eta + l_k)|\bar u'(\eta + l_k), w'_{jk}(\eta))_{L^2} \geq 0,$$

si ottiene dalla (4.4)

$$(4.5)\qquad \|w_{jk}(\bar\eta)\|^2_E \geq \|w_{jk}(0)\|^2_E - 2\left\{\int_{\bar\eta}^0 \|w'_{jk}(\eta)\|^2_{L^2} d\eta\right\}^{1/2} \cdot$$
$$\cdot \left\{\int_{\bar\eta}^0 \|f(\eta + l_j) - f(\eta + l_k)\|^2_{L^2} d\eta\right\}^{1/2} \geq \|w_{jk}(0)\|^2_E - K_8 \|w'_{jk}(-1)\|_{L^2_0}.$$

Supponiamo, per assurdo, che la traiettoria di $\bar u(\eta)$ non sia E-relativamente compatta. Esistono allora una successione $\{l_n\}$ ed un numero $\rho > 0$ tali che sia

$$(4.6)\qquad \|\bar u(l_j) - \bar u(l_k)\|_E = \|w_{jk}(0)\|_E \geq \rho \qquad (j \neq k).$$

Grazie alla L^2_0-relativa compattezza della traiettoria di $\bar u'(t)$, è poi possibile determinare n_0 in modo tale che, per $j, k > n_0$, risulti,

$$(4.7)\qquad \|w'_{jk}(-1)\|_{L^2_0} \leq \frac{\rho^2}{2 K_8}.$$

Introducendo le (4.6), (4.7) nella (4.5) si ottiene, per $j, k > n_0$,

$$(4.8)\qquad \|w_{jk}(\bar\eta)\|^2_E \geq \frac{\rho^2}{2} \qquad (-1 \leq \bar\eta \leq 0)$$

e quindi, integrando fra -1 e 0,

$$(4.9)\qquad \|w_{jk}(-1)\|^2_{L^2_0(E)} \geq \frac{\rho^2}{2},$$

ciò che è assurdo, essendo la traiettoria di $\bar u(t)$ $L^2_0(E)$-relativamente compatta.

Il teorema è così dimostrato.

Proviamo infine il seguente teorema di quasi-periodicità della soluzione limitata $\bar u(\eta)$.

TEOREMA 4.2. — *Supponiamo che $f(t)$ sia L^2_0-d.q.p. e che $f'(t)$ sia L^2_0-limitata in* J; *allora la soluzione $\bar u(\eta)$ E-limitata in* J, *individuata nel teorema 3.1, risulta E-q.p.*

Per provare la tesi basta dimostrare, per il criterio di Bochner, che da ogni successione reale $\{l_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione (che diremo ancora $\{l_n\}$) tale che risulti, uniformemente in J,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{u}(\eta + l_n) \underset{E}{=} z(\eta). \tag{4.10}$$

Poiché $f(t)$ è L_0^2–$d.q.p.$, si può senz'altro ammettere che sia

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} f(t + l_n) \underset{L_0^2}{=} g(t) \tag{4.11}$$

uniformemente in J. Osserviamo inoltre che, poiché $\tilde{u}(\eta)$ ha traiettoria E–relativamente compatta ed è E–uniformemente continua in J, si può senz'altro supporre che sia, per il teorema (vettoriale) di Ascoli–Arzelà,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{u}(\eta + l_n) \underset{E}{=} z(\eta), \tag{4.12}$$

uniformemente in ogni intervallo limitato.

Facciamo vedere che la (4.12) sussiste uniformemente in J; la dimostrazione che daremo estende un noto ragionamento di Favard [8].

Supponiamo, per assurdo, che tale uniformità non sussista; esistono allora un numero $\rho > 0$ e tre successioni $\{\eta_j\}$, $\{\alpha'_j\} \subseteq \{l_j\}$, $\{\alpha''_j\} \subseteq \{l_j\}$ tali che risulti

$$\| \tilde{u}(\eta_j + \alpha'_j) - \tilde{u}(\eta_j + \alpha''_j) \|_E \geq \rho. \tag{4.13}$$

Possiamo d'altra parte estrarre da $\{\eta_j + \alpha'_j\}$ e $\{\eta_j + \alpha''_j\}$ due sottosuccessioni (che diremo ancora $\{\eta_j + \alpha'_j\}$ e $\{\eta_j + \alpha''_j\}$) tali che risulti, uniformemente in J,

$$\lim_{j\to\infty}{}^{*} f(t + \eta_j + \alpha'_j) \underset{L^2}{=} g_1(t), \tag{4.14}$$

$$\lim_{j\to\infty}{}^{*} f(t + \eta_j + \alpha''_j) \underset{L_0^2}{=} g_2(t), \tag{4.15}$$

ed inoltre, analogamente alle (3.3), (3.4), per ogni $h_1 \in L_0^1(E)$,

$$\left\{\begin{aligned}
&\lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_0} (\tilde{u}(t + \eta + \eta_j + \alpha'_j)\,,\, h_1(\eta))_E \, d\eta = \int_{\Delta_0} (z_1(t + \eta)\,,\, h_1(\eta))_E \, d\eta\,, \\
&\lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_0} (\tilde{u}'(t + \eta + \eta_j + \alpha'_j)\,,\, h_1(\eta))_E \, d\eta = \int_{\Delta_0} (z'_1(t + \eta)\,,\, h_1(\eta))_E \, d\eta\,, \\
&\lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_0} (\tilde{u}(t + \eta + \eta_j + \alpha''_j)\,,\, h_1(\eta))_E \, d\eta = \int_{\Delta_0} (z_2(t + \eta)\,,\, h_1(\eta))_E \, d\eta\,, \\
&\lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_0} (\tilde{u}'(t + \eta + \eta_j + \alpha''_j)\,,\, h_1(\eta))_E \, d\eta = \int_{\Delta_0} (z'_2(t + \eta)\,,\, h_1(\eta))_E \, d\eta\,.
\end{aligned}\right. \tag{4.16}$$

Ripetendo i ragionamenti fatti per dimostrare il teorema 3.1. si vede poi che le funzioni limiti $z_1(\eta)$ e $z_2(\eta)$ risultano soluzioni E–limitate in J della (1.3) corrispondenti rispettivamente ai termini noti $g_1(\eta)$ e $g_2(\eta)$.

Per la uniformità della convergenza, dalle (4.11), (4.14), (4.15) segue d'altra parte, per ogni $v \in L_0^2$,

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{t\in J} |(f(t+\eta_j+\alpha_j'), v)_{L_0^2} - (f(t+\eta_j+\alpha_j''), v)_{L_0^2}| \le$$

$$\le \lim_{j\to\infty} \sup_{t\in J} |(f(t+\eta_j+\alpha_j') - f(t+\eta_j+l_j), v)_{L_0^2}| +$$

$$+ \lim_{j\to\infty} \sup_{t\in J} |(f(t+\eta_j+l_j) - f(t+\eta_j+\alpha_j''), v)_{L_0^2}| = 0.$$

Ne segue, per le (4.14), (4.15),

$$g_1(t) = g_2(t) \tag{4.17}$$

e si ha quindi, per l'unicità della soluzione E-limitata in J,

$$z_1(\eta) = z_2(\eta) \tag{4.18}$$

Si deduce poi, in modo analogo alla (4.12),

$$\lim_{j\to\infty} \tilde{u}(\eta+\eta_j+\alpha_j') \underset{E}{=} z_1(\eta) = z_2(\eta) \underset{E}{=} \lim_{j\to\infty} \tilde{u}(\eta+\eta_j+\alpha_j'') \tag{4.19}$$

La (4.19), scritta per $\eta = 0$, contraddice alla (4.13); il limite (4.12) sussiste perciò uniformemente in J ed il teorema è dimostrato.

Osservazione: È possibile dimostrare direttamente l'unicità di una soluzione E-$q.p.$ della (1.3), liberandosi completamente della condizione che Ω sia un aperto bidimensionale, dotato della proprietà di cono.

Sia infatti Ω *un aperto limitato e connesso* $\in S_m$, *con* m *qualsiasi, e sia* $u_1(\eta)$ *una soluzione* E-$q.p.$ *della* (1.3). *Dimostriamo che non possono esistere altre soluzioni* E-$q.p.$

Supponiamo infatti, per assurdo, che $u_2(\eta)$ sia una seconda soluzione E-$q.p.$ e poniamo $w(\eta) = u_1(\eta) - u_2(\eta)$. La funzione $w(\eta)$ soddisfa, per ogni $h(\eta) \in L^2_{loc}(J; H_0^1)$, a supporto compatto, all'equazione

$$\int_J \{(w''(\eta), h(\eta))_{L^2} + (w(\eta), h(\eta))_{H_0^1} + (w'(\eta), h(\eta))_{L^2} + \\ + (|u_1'(\eta)|\, u_1'(\eta) - |u_2'(\eta)|\, u_2'(\eta), h(\eta))_{L^2}\}\, d\eta = 0, \tag{4.20}$$

da cui si ricava, in modo analogo alla (4.5),

$$\|w(\eta_2)\|_E^2 - \|w(\eta_1)\|_E^2 + 2\int_{\eta_1}^{\eta_2} \|w'(\eta)\|_{L^2}^2\, d\eta \le 0 \qquad (\eta_1 < \eta_2). \tag{4.21}$$

Dalla (4.21) segue che la funzione $\|w(\eta)\|_E$ è non crescente; essendo $w(\eta)$ E-$q.p.$, la funzione $\|w(\eta)\|_E$ risulta $q.p.$ e si ha, necessariamente,

$$\|w(\eta)\|_E = K. \tag{4.22}$$

Dalle (4.21), (4.22) si deduce quindi, ponendo $\eta_1 = t$, $\eta_2 = t + 1$,

$$\|w'(t)\|_{L_0^2} = 0 \tag{4.23}$$

e perciò, essendo $w'(\eta)$ L^2–continua,

$$\|w'(\eta)\|_{L^2} = 0. \tag{4.24}$$

Si ha dunque, per la (4.24),

$$\|w''(\eta)\|_{L^2} = 0. \tag{4.25}$$

Introducendo le (4.24), (4.25) nella (4.20), si ottiene

$$\int_J (w(\eta), h(\eta))_{H_0^1} d\eta = 0, \tag{4.26}$$

da cui segue, per ogni $\varphi \in H_0^1$ e per ogni $\eta \in J$, osservando che $w(\eta)$ è H_0^1–continua,

$$(w(\eta), \varphi)_{H_0^1} = 0. \tag{4.27}$$

La funzione $w(\eta)$ è quindi, per ogni $\eta \in J$, una soluzione (debole) della equazione di Laplace

$$\Delta w(\eta) = 0, \tag{4.28}$$

soddisfacente a condizioni al contorno di Dirichlet omogenee.

È dunque, per ogni $\eta \in J$,

$$w(\eta) = 0 \tag{4.29}$$

ed il teorema di unicità risulta dimostrato.

BIBLIOGRAFIA.

[1] J. L. LIONS e W. A. STRAUSS, *Some non-linear evolution equations*. In corso di stampa su « Bull. Soc. Math. Fr. ».

[2] G. PROUSE, *Soluzioni periodiche dell'equazione non omogenea delle onde con termine dissipativo quadratico*. In corso di stampa su « Ric. di Mat. ».

[3] G. PROUSE, *Soluzioni limitate dell'equazione non omogenea delle onde con termine dissipativo quadratico*. In corso di stampa su « Ric. di Mat. ».

[4] E. HILLE e R. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups*, p. 37.

[5] E. GAGLIARDO, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, « Ric. di Mat. », vol. 7 (1958).

[6] J. L. LIONS, *Equations différentielles opérationelles*, Springer Verlag (1961), p. 59.

[7] L. AMERIO, *Soluzioni quasi–periodiche di equazioni quasi–periodiche negli spazi hilbertiani*, « Ann. di Mat. », vol. 61 (1963).

[8] J. FAVARD, *Leçons sur les fonctions presque–périodiques*, Gauthier–Villars (1933), (cfr. anche [7]).