Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Livio Gratton

Configurazioni di equilibrio di corpi fortemente implosi. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.1, p. 25–33.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_1_25_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Astronomia. — *Configurazioni di equilibrio di corpi fortemente implosi.* Nota III [*] del Corrisp. LIVIO GRATTON.

1. Nelle due Note anteriori [1] sono state integrate le equazioni della Relatività Generale per l'equilibrio idrostatico di un corpo a simmetria sferica nella ipotesi in cui fra la densità ρ e la pressione P passa una relazione del tipo

$$c^2 \rho = 3\,\mathrm{P} + \mathrm{Q}\mathrm{P}^q , \tag{1}$$

dove Q e q (< 1) sono costanti. L'integrazione è stata effettuata per i valori 3/2 e 3 dell'indice politropico

$$n = \frac{1}{1-q} \cdot \tag{2}$$

Inoltre alcune conseguenze di carattere generale sono state discusse brevemente. Lo scopo di questa Nota è di applicare questi risultati a problemi astrofisici.

L'equilibrio di una stella di neutroni è stato discusso fin dai classici lavori di Oppenheimer [2] e collaboratori e più recentemente da Cameron, Salpeter ecc. [3]. Ora, si può facilmente verificare che la semplice equazione (1), con $q = 3/5$ e

$$\mathrm{Q} = 20^{3/5}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/5}\left(\frac{m_{\mathrm{N}}}{h^2}\right)^{3/5} m_{\mathrm{N}}\, c^2 = 1{,}304 \times 10^{15} \qquad (c.g.s.),$$

dà un'eccellente rappresentazione della equazione di stato di un gas di neutroni a temperatura zero, se si trascura l'effetto delle forze nucleari. D'altra parte Gratton e Szamosi [4] hanno mostrato che l'effetto delle forze nucleari, incluso il cosidetto « nucleo duro », sull'equazione di stato di un gas di barioni è certamente assai piccolo.

Pertanto i risultati delle Note I e II per $n = 3/2$ si possono trasportare immediatamente al caso di una stella di neutroni. Poiché la discussione non

(*) Nella seduta del 14 novembre 1964.

(1) L. GRATTON, « Acc. dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze fisiche e naturali » (in stampa); queste due Note saranno citate brevemente nel seguito come I e II rispettivamente.

(2) J. R. OPPENHEIMER and R. SERBER, « Phys. Rev. », *54*, 540 (1938); J. R. OPPENHEIMER and G. M. VOLKOFF, « Phys. Rev. », *55*, 374 (1939); vedi anche L. D. LANDAU and E. M. LIFSHITZ, *Statistical Physics*, p. 325 (Trad. inglese), 1959.

(3) A. G. W. CAMERON, « Ap. J. », *130*, 884 (1959); T. HAMADA and E. E. SALPERER. « Ap. J. », *134*, 683 (1961); V. A. AMBARTSUMIAN and G. S. SAAKYAN, « Soviet Astr. – A. J. », (trad.) *5*, 779 (1962).

(4) L. GRATTON e G. SZAMOSI, « Nuovo Cim. », *33*, 1056 (1964).

porta alcun elemento sostanzialmente nuovo, non è necessario ripetere qui i risultati; un breve sommario sarà pubblicato nella comunicazione presentata al Colloquio sulla Cosmologia (Padova, 9–11 settembre 1964).

2. Più interessante è il caso di un corpo di massa molto grande, in cui la temperatura è abbastanza elevata perché la pressione di radiazione sia molto maggiore della pressione materiale e anche il contributo della radiazione alla massa gravitazionale sia importante.

Se N è il numero di particelle per unità di volume, $\tilde{\omega}$ il peso molecolare medio ed $H = 1{,}6598 \times 10^{-24}$ gr l'unità di peso atomico, ad una temperatura T non eccessivamente elevata, di modo che l'energia di riposo delle particelle è molto maggiore della loro energia cinetica, si ha

$$\text{(3)} \qquad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{1}{3} a T^4 + N k T \,, \\ \rho c^2 &= a T^4 + H c^2 \tilde{\omega} N \,. \end{aligned} \right.$$

Se, ora, definiamo β come il rapporto fra la pressione totale P e la pressione materiale,

$$\text{(4)} \qquad \beta = \frac{NkT}{P} \quad , \quad 1 - \beta = \frac{1}{3} a \frac{T^4}{P} \,.$$

ed osserviamo che se N non è molto grande, NkT si può trascurare rispetto a $(1/3)\, aT^4$, si trova facilmente

$$\text{(5)} \qquad c^2 \rho = + \frac{Hc^2}{k} \left(\frac{a}{3}\right)^{1/4} \tilde{\omega} \frac{\beta}{(1-\beta)^{1/4}} P^{3/4} + 3 P (1 - \beta) \,.$$

Poiché nel caso di interesse $\beta \ll 1$, questa equazione è formalmente identica alla (1) con

$$\text{(6)} \qquad \left\{ \begin{aligned} q &= 3/4 \quad (n = 3), \\ Q &= \frac{Hc^2}{k} \left(\frac{a}{3}\right)^{1/4} \tilde{\omega} \frac{\beta}{(1-\beta)^{1/4}} \,. \end{aligned} \right.$$

Naturalmente in generale β varierà entro la configurazione e la legge di variazione non può essere ricavata che da uno studio del trasporto di energia. Allo stato attuale del problema uno studio così approfondito sembra prematuro; noi supporremo perciò che l'approssimazione $\beta = \text{cost}$ sia sufficiente. In altre parole nelle condizioni in cui ci siamo posti e che equivalgono a

$$T \ll \frac{c^2 H}{k} \tilde{\omega} = 10^{13} \tilde{\omega} \,, \, {}^0\mathrm{K} \,,$$

$$\rho_{\mathrm{mat}} = NH\tilde{\omega} \ll \frac{ac^6 H^4}{3 k^4} \tilde{\omega}^4 = 11 \cdot 5 \, \tilde{\omega}^4 \quad \mathrm{gr\ cm^{-3}} \,,$$

noi ammettiamo che il modello politropico relativistico con indice $n = 3$ rappresenti una ragionevole approssimazione per la configurazione di equilibrio di un corpo di massa molto grande.

Una difficoltà relativa a questo modello è la sua inerente instabilità (vedi Nota II). Il punto di vista che noi vogliamo qui adottare è che tale instabilità sia compensata, per esempio, da una (lenta) rotazione assiale e che, pertanto, possa essere trascurata.

3. Dalle equazioni (13) e (14) di I si trova, ora, indicando con M la massa osservabile ed introducendo l'espressione (6) di Q,

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{M}^2\,\bar{\omega}^4}{\mu_1^2} &= \frac{3}{32\,\pi\,G^3\,a}\left(\frac{k}{H}\right)^4\frac{1-\beta}{\beta^4} = \\ &= 0.1576\,\frac{1-\beta}{\beta^4}\,\mathfrak{M}_\odot^2\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Questa equazione è l'equivalente della ben nota equazione quartica di Eddington; essa dà il valore di β in funzione della massa. In pratica per tutti i casi che interessano β può essere trascurato di fronte all'unità.

La pressione e la temperatura centrali si ricavano facilmente in funzione del parametro centrale, φ_c. In particolare, eliminando β, si trova per la temperatura centrale

$$T_c = \frac{3\,c^8}{32\,\pi\,a G^3}\,\varphi_c^4\,\mu_1^2\,\frac{1}{\mathfrak{M}^2}$$

ossia

$$T_c = 6.84\times 10^{12}\,\varphi_c\,\mu_1^{1/2}\left(\frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{M}}\right)^{1/2}\,{}^0\mathrm{K}\,. \tag{8}$$

La (8), tuttavia non è un'equazione conveniente per seguire la variazione della temperatura centrale man mano che la densità centrale di un corpo di una data massa aumenta per effetto della contrazione, perché la massa osservabile varia. Più ragionevole è invece esprimere T_c in funzione della massa própria delle sole particelle materiali, $\mathfrak{M}_0$; se invero non c'è emissione di materia da parte del corpo, $\mathfrak{M}_0$ dovrebbe restare costante, perché il numero totale dei barioni non può cambiare.

Ora, $\mathfrak{M}_0$ è data evidentemente da

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_0 &= \frac{4\pi}{c^2}\int_0^R Q P^{3/4}\,\frac{r^2\,dr}{\sqrt{1-\theta}} = \\ &= \frac{\mathfrak{M}}{\mu_1}\int_0^{\mu_1}\frac{d\mu}{(1+3\varphi)\sqrt{1-\theta}}\,.\end{aligned}$$

Conviene, perciò, definire

$$\alpha_1 = \int_0^{\mu_1}\frac{d\mu}{(1+3\varphi)\sqrt{1-\theta}}\,, \tag{9}$$

così l'equazione

$$\mathfrak{M} = \frac{\mu_1}{\alpha_1}\,\mathfrak{M}_0 \tag{10}$$

rappresenta la variazione della massa osservabile di un corpo la cui massa iniziale, corrispondente ad una configurazione di temperatura zero dispersa all'infinito, è $\mathfrak{M}_0$, mentre esso passa attraverso una successione di configurazioni di equilibrio corrispondenti al modello adottato.

La temperatura, la densità delle sole particelle materiali, e la pressione al centro sono, come si verifica subito,

$$\begin{aligned}
T_c &= 6{,}48 \times 10^{12}\,(\varphi_c^2\,\alpha_1\,\mathfrak{M}_\odot/\mathfrak{M}_0)^{1/2} && {}^0\mathrm{K}\\
\rho_c^{(\mathrm{mat})} &= 9{,}93 \times 10^{15}\,(\varphi_c^2\,\alpha_1\,\mathfrak{M}_\odot/\mathfrak{M}_0)^{3/2}\,\tilde{\omega}\beta && \mathrm{gr\ cm^{-3}}\\
P_c &= 5{,}52 \times 10^{36}\,(\varphi_c^2\,\alpha_1\,\mathfrak{M}_\odot/\mathfrak{M}_0)^2 && \mathrm{dyn\ cm^{-2}},
\end{aligned} \tag{11}$$

essendo β dato dall'equazione quartica

$$\frac{(\mathfrak{M}_0/\mathfrak{M}_\odot)^2\,\tilde{\omega}^4}{\alpha_1^2} = 0{,}1576\,\frac{1-\beta}{\beta^4}\,. \tag{12}$$

Conviene conoscere anche la quantità totale di radiazione nera racchiusa. Ovviamente l'energia di questa è uguale alla differenza fra la massa propria ed $\mathfrak{M}_0$ moltiplicata per c^2; ossia

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{rad}} &= \frac{\mathfrak{M}c^2}{\mu_1}\int_0^{\mu_1} \frac{3\varphi}{(1+3\varphi)\sqrt{1-\theta}}\,d\mu = \\
&= \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,\mathfrak{M}_0\,c^2\,,
\end{aligned} \tag{13}$$

essendo

$$\alpha_2 = \int_0^{\mu_1} \frac{3\varphi}{(1+3\varphi)\sqrt{1-\theta}}\,d\mu\,. \tag{14}$$

4. Noi siamo ora in grado di seguire l'evoluzione di un corpo di grande massa, per effetto della contrazione a partire da una configurazione iniziale di raggio grandissimo e temperatura zero, attraverso una successione di stati di equilibrio corrispondenti al modello adottato in queste Note. Questa evoluzione è alquanto complicata, perché la densità centrale cresce assai più rapidamente della densità media, a causa della enorme differenza nella condensazione centrale per differenti valori di φ_c. Invero, si può vedere che il raggio

$$R = 2{,}955 \times 10^5\,\frac{\xi_1}{\alpha_1}\,\frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}_\odot}\ \mathrm{cm}$$

dapprima decresce fino ad un minimo piatto per $\varphi_c = 0{,}1$, ma poi aumenta di nuovo fino ad un massimo assai acuto in prossimità $\varphi_c = 0{,}4$, dopo di che diminuisce ancora.

Ora tra $\varphi_c = 0{,}1$ e $\varphi_c = 0{,}4$, la contrazione della regione centrale libera dapprima più energia di quanto occorre per l'espansione degli strati esterni; ma da $\varphi_c = 0{,}3$ in poi ciò non avviene più e quindi l'espansione deve verificarsi a spese della energia della radiazione nera. L'evoluzione diviene

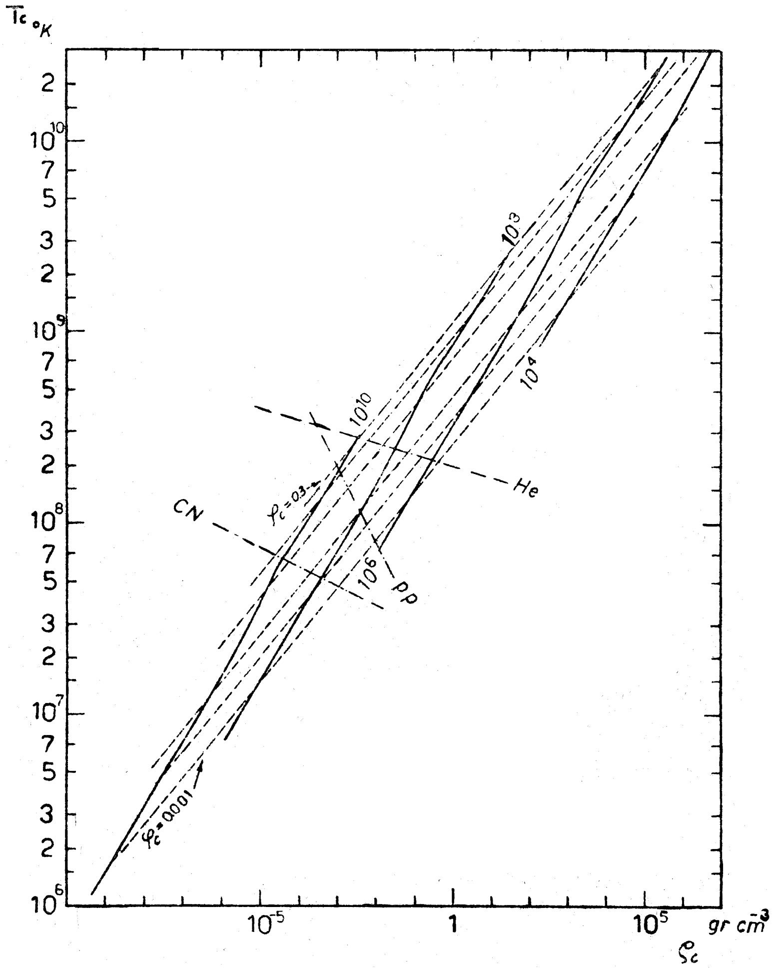

Fig. 1. – Temperature e densità centrali per corpi di grande massa.

Le curve a tratto pieno rappresentano la temperatura centrale in funzione della densità centrale corrispondente alle sole particelle materiali, per diversi valori della massa iniziale; le curve tratteggiate corrispondono a valori costanti del parametro centrale, φ_c, cioè della condensazione centrale. Le linee contrassegnate con CN, *pp*, He corrispondono alle densità e temperature per cui si iniziano le reazioni del ciclo di Bethe, della catena *pp* e dell'He, rispettivamente (solo indicative).

allora assai difficile da comprendere, se si tiene conto del fatto che, essendo ora la temperatura del corpo diversa da zero, esso deve perdere energia per irraggiamento.

In verità è difficile immaginare un meccanismo per cui le proprietà fisiche della materia del corpo (opacità, rapporto dei calori specifici, ecc.) in tutti i punti dell'interno siano proprio quelli richiesti dal modello presente. Al massimo si può perciò sperare di ottenere da esso alcune indicazioni generali circa le possibili configurazioni e l'evoluzione di un corpo di grande massa.

In quest'ordine di idee è legittimo limitare le considerazioni presenti alle sole configurazioni con $\varphi_c = 0{,}1$ circa. Il corrispondente andamento della temperatura centrale in funzione della densità centrale delle particelle materiali, per diversi valori di $\mathfrak{M}_0$ è rappresentato nella fig. 1. Con buona approssimazione si trova che T_c cresce proporzionalmente a $[\rho_c^{(\text{mat})}]^{2/5}$, ma per una certa condensazione centrale, cioè per un valore dato di φ_c, le temperature e le densità dipendono molto fortemente dalla massa $\mathfrak{M}_0$.

Consideriamo, per esempio, una massa di $10^4\,\mathfrak{M}_\odot$; la figura 1 mostra che un corpo di questa massa raggiunge molto presto una temperatura centrale assai elevata. Ciò significa che non solo le reazioni termonucleari dell'H e dell'He, ma anche gli stati altamente esplosivi in cui la materia si trasforma endotermicamente da una miscela di elementi del gruppo del Fe a quasi puro He, oppure la produzione di neutrini diviene il fenomeno dominante, si raggiungono in una fase in cui la condensazione centrale è ancora relativamente piccola. In questo caso è praticamente certo che tutto il corpo esploderà o, più probabilmente, imploderà senza seguire una serie di stati di equilibrio; il suo comportamento non può quindi essere previsto dalla presente teoria, ma è da presumere che la vita media di un corpo siffatto sia assai breve.

D'altra parte, consideriamo invece un corpo di 10^8 o 10^{10} masse solari. Dalla figura 1 appare che non solo questi stati fortemente esplosivi, ma anche lo stato corrispondente alle reazioni dell'He e dell'H vengono raggiunti alquanto tardi, quando la condensazione della materia verso il centro è così avanzata che solo una parte assai limitata del corpo viene interessata nei processi nucleari. Questi ultimi pertanto non possono acquistare mai grande importanza, ma l'unico agente che determina l'evoluzione di un corpo estremamente pesante (per lo meno durante gran parte della sua vita è la gravitazione. Un'identica conclusione è stata raggiunta anche da Fowler [5].

5. Per valutare l'energia totale liberata dal corpo durante la contrazione, basta osservare che il contenuto attuale di energia ad ogni istante è $\mathfrak{M}c^2$, essendo $\mathfrak{M}$ la *massa osservabile*.

Questo include automaticamente tutte le forme di energia presenti, perché, per l'equivalenza fra massa ed energia, tutte le forme di energia (inclusa l'energia termica) contribuiscono ugualmente alla massa.

D'altra parte, l'energia corrispondente allo stato iniziale disperso è solamente $\mathfrak{M}_0 c^2$, perché inizialmente non esisteva radiazione nera o, rispettivamente, se noi lasciamo che la radiazione si espanda, i fotoni perdono interamente la loro massa per raffreddamento.

(5) R. FOWLER, « Rev. of Mod. Phys. », *36*, 545 (1964).

In definitiva l'energia liberata è

$$\Delta E = (\mathfrak{M}_0 - \mathfrak{M})\, c^2, \tag{15}$$

ossia l'energia di legame totale, diminuita della energia propria della radiazione.

Introducendo le espressioni di $\mathfrak{M}$ e di $\mathfrak{M}_0$, si ricava subito

$$\begin{aligned} \Delta E &= \mathfrak{M}_0\, c^2 \frac{\alpha_1 - \mu_1}{\alpha_1} = \\ &= 1.79 \times 10^{54} \frac{\alpha_1 - \mu_1}{\alpha_1} \frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}_\odot} \text{ erg.} \end{aligned} \tag{16}$$

La Tabella I contiene i valori di ξ_1/α_1, μ_1, α_1, α_2/α_1, e $(\alpha_1 - \mu_1)/\alpha_1$ in funzione del parametro centrale φ_c. Come si vede il coefficiente $(\alpha_1 - \mu_1)/\alpha_1$, diviene negativo per $\varphi_c > 0{,}03$; quindi le corrispondenti configurazioni di questo modello non sono fisicamente realizzabili, perché bisognerebbe fornire energia al corpo, per continuare la contrazione.

La massima energia liberata (corrispondente a $\varphi_c = 0{,}03$ circa) è presso a poco l'1,7 % dell'energia di riposo iniziale delle particelle materiali, cioè circa il doppio della massima energia ottenibile dalle reazioni termonucleari. Per una massa di $10^9\, \mathfrak{M}_\odot$ questa equivale a quasi 3×10^{61} ergs.

TABELLA I.

Costanti numeriche per l'evoluzione di un corpo di grande massa.

φ_c	ξ_1/α_1	μ_1	α_1	α_2/α_1	$(\alpha_1 - \mu_1)/\alpha_1$
0,001	431	45,1	45,2	0,002	0,001
0,002	201	44,6	44,6	0,003	0,001
0,003	147	44,1	44,1	0,005	0,001
0,01	70,1	40,8	40,9	0,017	0,003
0,03	19,3	33,2	33,8	0,050	0,017
0,1	12,2	19,4	18,8	0,158	neg
0,2	17,3	12,2	11,2	0,271	neg
0,3	41,6	10,1	9,1	0,314	neg
0,4	96,0	12,0	10,9	0,253	neg
0,5	75,9	14,9	14,0	0,200	neg
0,7	44,7	16,4	15,4	0,195	neg
1,0	35,6	15,5	14,5	0,207	neg

Per $\varphi_c = 0{,}03$ e $\mathfrak{M} = 10^9 \mathfrak{M}_\odot$, si ricava

$$T_c = 3.6 \times 10^7$$

$$\rho_c^{(\mathrm{mat})} = 1{,}9 \times 10^{-5} \text{ gr cm}^{-3}$$

$$R = 5{,}6 \times 10^{15} \text{ cm.}$$

Probabilmente la temperatura e la densità sono insufficienti anche per le reazioni termonucleari dell'H.

6. La luminosità del corpo può essere stimata se si conosce l'opacità. A meno di termini d'ordine superiore, si può facilmente mostrare invero, che il flusso totale L_r attraverso una sfera corrispondente alla coordinata radiale r è dato dall'equazione classica

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{L_r}{4\pi r^2}\frac{k}{c} \tag{17}$$

dove K è il coefficiente di opacità.

Ora nelle condizioni considerate in questa Nota, l'opacità è dovuta essenzialmente alla diffusione Thomson. Quindi

$$k = \sigma N_e,$$

dove $N_e = \rho^{(\mathrm{mat})}/\tilde{\omega}_e H$ è la densità degli elettroni liberi ($\tilde{\omega}_e$ essendo il peso molecolare medio per elettrone), e $\sigma = 6.7 \times 10^{-25}$ cm^2 è la sezione Thomson.

Sostituendo si ricava

$$L_r \simeq -\frac{16\pi c^2 H}{\sigma}\tilde{\omega}_e A \xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi},$$

valida nella regione più esterna, dove la densità della radiazione è piccola rispetto a quella della materia. In questa regione si trova che, per il modello presente, $\xi^2 (d\varphi/d\xi)$ è praticamente costante e risulta

$$\xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi} \simeq -\frac{1}{8}\frac{\mu_1}{1-\theta_1}.$$

Ricordando che $A = (2G/c^2)\mathfrak{M}/\mu_1$, si trova così

$$\begin{aligned} L &\simeq 4\pi c G \frac{H}{\sigma}\tilde{\omega}_e \mathfrak{M} \simeq \\ &\simeq 8.2 \times 10^4 \tilde{\omega}_e \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot} L_\odot \end{aligned} \tag{18}$$

trascurando θ_1, di fronte all'unità.

Un oggetto di $10^9 \mathfrak{M}_\odot$ avrebbe quindi una luminosità di 5×10^{13} $L_\odot = 2 \times 10^{47}$ erg/sec. La corrispondente magnitudine bolometrica è circa -30 e la temperatura effettiva intorno a 50.000° K. La magnitudine visuale è difficile da valutare perché non si conosce naturalmente la correzione bolometrica. Ma le proprietà dell'oggetto rassomigliano così notevolmente a quelle che secondo Greenstein e Schmidt (6) sono richieste dai dati osservativi per l'oggetto centrale di 3C 48 e 3C 273, da permettere di considerare molto incoraggiante il modello qui considerato, malgrado l'evidente carattere esplorativo di questo lavoro.

Si può notare, per concludere, che la vita dell'oggetto

$$\tau = \frac{\Delta E}{L}$$

risulta considerevolmente lunga; circa 5×10^6 anni, indipendentemente dalla massa.

Nel concludere questo gruppo di Note, è per me un vivo piacere ringraziare qui i miei collaboratori, Szamosi, Pacini, Renzini e Setti per molto importanti discussioni, Giannone, Occhionero ed il sig. Martino per il valido aiuto nei calcoli numerici.

(6) J. GREENSTEIN e M. SCHMIDT, «Ap. J.», *140*, 1 (1964).