Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Scarpini

Sul calcolo degli autovalori relativi ad una equazione differenziale inerente ad un problema di conduzione del calore. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.1, p. 53–60.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_1_53_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Analisi numerica. — *Sul calcolo degli autovalori relativi ad una equazione differenziale inerente ad un problema di conduzione del calore* (*). Nota I di FRANCESCO SCARPINI, presentata (**) dal Corrisp. G. FICHERA.

In una Nota [14] (1) pubblicata nel 1961, sugli « Annali di Matematica », il prof. Giovanni Sansone ha considerato una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine, già introdotta da H. Latzko in una sua ricerca [11] sulla conduzione del calore in un fluido soggetto a turbolenza. Tale equazione [la (1) del presente scritto] viene considerata nell'intervallo (0, 1). Essa ha una singolarità per $x = 1$.

Il problema studiato consiste nel dimostrare l'esistenza degli autovalori per un problema al contorno connesso con la detta equazione e posto in una opportuna classe di soluzioni. A tal proposito il prof. Sansone ha dimostrato che ogni autosoluzione per il detto problema al contorno è altresì autosoluzione di una equazione integrale di Fredholm da Lui costruita e dotata di una infinità numerabile di autovalori tutti positivi.

Egli ha successivamente proposto il calcolo numerico, per eccesso e per difetto, del più piccolo autovalore λ_1. Tale questione è stata considerata da D. Caligo [3], il quale ha indicato le seguenti limitazioni per λ_1:

$$8{,}7275 < \lambda_1 < 8{,}7448.$$

Successivamente D. Caligo e N. Cotugno [4] hanno fornito le seguenti limitazioni:

$$8{,}72752 < \lambda_1 < 8{,}72759.$$

In questa Nota ed in una successiva dallo stesso titolo, ho ripreso lo studio del problema di autovalori anzidetto, dimostrando anzitutto la perfetta equivalenza fra il problema differenziale ed il problema integrale introdotto da G. Sansone. Successivamente mi sono occupato della questione di Analisi numerica anzidetta proposta dal prof. Sansone.

Ho dapprima fatto vedere in qual modo valori per eccesso degli autovalori del problema – ancorché relativi ad una equazione differenziale singolare – possano ottenersi con un procedimento del tipo Rayleigh–Ritz. Tale metodo è estremamente più semplice di quello impiegato dal Caligo.

Ho potuto, per tale via, constatare la erroneità delle limitazioni inferiori date in [3] ed in [4] e sopra riportate. In effetti dal teorema VI della

(*) Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 21 del C.N.R. nell'Anno Accademico 1964–65.

(**) Nella seduta del 9 gennaio 1965.

(1) I numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia alla fine della Nota II.

presente Nota segue:

$$\text{(I)} \qquad \lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 (1-x^7)\left[\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k x^k\right)\right]^2 dx}{\int_0^1 x^7 \left(\sum_{k=1}^{n} c_k x^k\right)^2 dx},$$

quali si siano le costanti $c_1, \cdots, c_n$. Assumendo $n = 5$ e $c_1 = 6{,}858248981$, $c_2 = -0{,}02477586 90$, $c_3 = 0{,}272497936$, $c_4 = -0{,}904960750$, $c_5 = 1$ si ottiene:

$$\lambda_1 < \eta = 8{,}72747134 \ ^{(2)}.$$

Il valore per eccesso η è più piccolo dei presunti valori per difetto indicati da Caligo e da Caligo–Cotugno.

Per ottenere valori per difetto di λ_1 ho applicato tre procedimenti. Due rientrano, come casi particolari, in un metodo generale indicato molto recentemente dal prof. Gaetano Fichera, il terzo è l'estensione, al problema in esame, di un metodo originariamente dovuto a Barta [1]. Occorre dire che i primi due procedimenti mi hanno anche consentito di fornire limitazioni per i successivi autovalori.

Le migliori limitazioni ottenute per λ_1 sono le seguenti:

$$8{,}7207232 < \lambda_1 < 8{,}7274704 \ ^{(3)}.$$

Le limitazioni ottenute per λ_1, λ_2, e λ_3 sembrano confermare i valori approssimati per tali autovalori, ottenuti dallo stesso Latzko, da Durfee [5] e da Fettis [6], ad eccezione del valore per λ_3 ottenuto da Latzko che è molto in disaccordo con le limitazioni da me conseguite.

1. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{E}u + \lambda x^7 u = 0 \quad , \qquad x \in \mathrm{I},$$

essendo E l'operatore differenziale $\frac{d}{dx}\left[(1-x^7)\frac{d}{dx}\right]$, λ un parametro reale, I l'intervallo superiormente aperto $0 \leq x < 1$.

Si indichi con $\mathfrak{L}^{(2)}(\mathrm{I})$ lo spazio hilbertiano delle funzioni reali di quadrato sommabile in I, con il seguente prodotto scalare:

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx.$$

(2) Per meglio avere un'idea della efficacia del metodo di Rayleigh–Ritz – d'altronde ben nota a tutti i cultori di Analisi numerica – si osservi che assumendo $n = 1$ e $c_1 = 1$, nella (I), già si ottiene la limitazione $\lambda_1 < 8{,}75$ che confrontata con i risultati finali ottenuti in queste Note si rivela non disprezzabile.

(3) Il valore per eccesso riportato, che migliora lievemente il valore di η precedentemente indicato, è stato ottenuto usando un numero di costanti maggiore di quello impiegato per ottenere η.

Ci proponiamo di ricercare le soluzioni dell'equazione (1), appartenenti alla varietà lineare $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{L}^{(2)}(\mathrm{I})$ delle funzioni $u(x)$ soddisfacenti le seguenti condizioni:

I) $u(x)$ *è di classe* $\mathfrak{C}^{(2)}(\mathrm{I})$ (4);

II) $u(x)$ *s'annulla per* $x = 0$;

III) $\mathrm{E}u \in \mathfrak{L}^{(2)}(\mathrm{I})$;

IV) $u(x)$ *è continua nell'intervallo chiuso* $\bar{\mathrm{I}} : 0 \leq x \leq 1$.

Sussiste il seguente teorema:

I. – *Il valore* $\lambda = 0$ *non è autovalore per la* (1) *nella classe* $\mathfrak{A}$.

Ciò si constata immediatamente, dato che, per $\lambda = 0$, ogni soluzione non identicamente nulla della (1), verificante la condizione II), non verifica la condizione IV).

Poniamo:

$$\gamma(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{1 - \xi^7}, \; x \in \mathrm{I} \quad ; \quad \mathfrak{G}(x, \xi) = \begin{cases} = \gamma(\xi), \; 0 \leq \xi \leq x < 1 ; \\ = \gamma(x), \; 0 \leq x \leq \xi < 1 ; \end{cases}$$

$$k(x, \xi) = x^{7/2}\, \mathfrak{G}(x, \xi)\, \xi^{7/2}, \qquad (x, \xi) \in \mathrm{I} \times \mathrm{I} ;$$

ed osserviamo che:

$$1^{\circ}: \; k(x, \xi) \in \mathfrak{L}^{(2)}_{\xi}(\mathrm{I}), \qquad 2^{\circ}: \; \int_0^1 [k(x, \xi)]^2\, d\xi \in \mathfrak{L}_x(\mathrm{I}).$$

L'operatore integrale

$$\mathrm{T}f = \int_0^1 k(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$$

risulta pertanto definito in $\mathfrak{L}^{(2)}_{\xi}(\mathrm{I})$, ha codominio contenuto in $\mathfrak{L}^{(2)}_{x}(\mathrm{I})$, è compatto e simmetrico, [7], [8].

Consideriamo la seguente equazione

$$\mathrm{T}w - \mu w = 0. \tag{2}$$

Questa è una equazione integrale di Fredholm di seconda specie, omogenea a nucleo simmetrico.

II. – *Il valore* $\mu = 0$ *non è autovalore per la* (2) *nella classe* $\mathfrak{L}^{(2)}(\mathrm{I})$.

Dalla (2), per $\mu = 0$, si deduce

$$\int_0^x \gamma(\xi)\, \xi^{7/2} w(\xi)\, d\xi + \gamma(x) \int_x^1 \xi^{7/2} w(\xi)\, d\xi = 0$$

(4) Con $\mathfrak{C}^{(n)}(\mathrm{I})$ si indica la classe delle funzioni reali continue con tutte le derivate fino all'ordine n in I.

e quindi

$$\frac{1}{1-x^7}\int_x^1 \xi^{7/2} w(\xi)\, d\xi = 0 ,$$

che implica $w(x) = 0$ quasi ovunque in I.

Vogliamo dimostrare il seguente teorema di equivalenza tra la (1) e la (2).

III. – *Se* $u(x)$ *è un'autosoluzione dell'equazione* (1), *appartenente ad* $\mathfrak{A}$, *pòsto* $w(x) = x^{7/2} u(x)$, *risulta* $w(x)$ *autosoluzione dell'equazione* (2), *con* $\mu = 1/\lambda$, *ed appartiene ad* $\mathfrak{L}^{(2)}(\mathrm{I})$.

Viceversa se $w(x)$ *è autosoluzione dell'equazione* (2), *appartenente ad* $\mathfrak{L}^{(2)}(\mathrm{I})$, *la* $u(x) = x^{-7/2} w(x)$ *soddisfa l'equazione* (1), *con* $\lambda = 1/\mu$, *ed appartiene alla varietà* $\mathfrak{A}$.

Dimostriamo la prima parte. Sia $u(x)$ una funzione appartenente ad $\mathfrak{A}$ e poniamo $\mathrm{E}u = v$. Sarà allora:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1-x^7}\left(c_1 + \int_0^x v(\xi)\, d\xi\right), \qquad x \in \mathrm{I} \tag{3}$$

essendo c_1 una costante.

Ne segue che:

$$u(x) = \gamma(x)\left[c_1 + \int_0^x v(\xi)\, d\xi\right] - \int_0^x \gamma(\xi)\, v(\xi)\, d\xi .$$

La condizione IV) comporta necessariamente:

$$c_1 = -\int_0^1 v(\xi)\, d\xi \tag{4}$$

e quindi

$$u(x) = -\int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi , \qquad x \in \mathrm{I} . \tag{5}$$

Se inoltre $u(x)$ è un'autosoluzione di (1), appartenente ad $\mathfrak{A}$, essa renderà soddisfatta la seguente equazione integrale:

$$u(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi)\, \xi^7 u(\xi)\, d\xi , \qquad x \in \mathrm{I} .$$

Ne segue che $w(x) = x^{7/2} u(x)$ appartiene ad $\mathfrak{L}^{(2)}(\mathrm{I})$ ed è autosoluzione dell'equazione integrale (2).

Supponiamo viceversa che $w(x)$ sia autosoluzione della (2), appartenente, ad $\mathfrak{L}^{(2)}(\mathrm{I})$. Pòsto $v(x) = -\lambda x^{7/2} w$, sarà

$$v(x) = \lambda x^7 \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi , \qquad x \in \mathrm{I} , \tag{6}$$

cioè

$$v(x) = \lambda x^7 \left[\int_0^x \gamma(\xi)\, v(\xi)\, d\xi + \gamma(x) \int_x^1 v(\xi)\, d\xi \right], \qquad x \in \mathrm{I}.$$

Da questa relazione segue la continuità di $v(x)$ in I.

Consideriamo la funzione $u(x) = x^{-7/2} w(x) \equiv -\frac{1}{\lambda} x^{-7} v$; in virtù della (6) possiamo scrivere:

$$u(x) = -\int_0^x \gamma(\xi)\, v(\xi)\, d\xi - \gamma(x) \int_x^1 v(\xi)\, d\xi, \qquad x \in \mathrm{I}. \tag{7}$$

Essendo $v \in \mathfrak{L}^{(2)}(\mathrm{I})$ e $\gamma(x) = \mathrm{O}(\log(1-x))$, dalla (7) segue la continuità di $u(x)$ in $\overline{\mathrm{I}}$, che $u(0) = 0$ e che $u(x) \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathrm{I})$. Derivando ambo i membri di (7) si ha

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{1-x^7} \int_x^1 v(\xi)\, d\xi, \qquad x \in \mathrm{I}. \tag{3'}$$

Da qui si trae che $u \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathrm{I})$ e che

$$\mathrm{E}u = v(x), \qquad x \in \mathrm{I}. \tag{8}$$

Pertanto $u(x)$ soddisfa la condizione III).

Tenendo conto della definizione di $u(x)$ e della (8), si constata che $u(x)$ è soluzione dell'equazione (1).

Si è così dimostrata l'equivalenza delle equazioni (1) e (2) nelle classi rispettive $\mathfrak{A}$ ed $\mathfrak{L}^{(2)}(\mathrm{I})$.

Osservazione I. – Dalla dimostrazione, ora esposta, segue che le autosoluzioni di (2) appartengono a $\mathcal{C}^{(0)}(\overline{\mathrm{I}})$ e nell'origine sono $\mathrm{O}(x^{9/2})$.

Osservazione II. – Se $u(x)$ appartiene ad $\mathfrak{A}$, riesce

$$\int_0^1 (1-x^7) \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx < +\infty .$$

Infatti dalla (3) e dalla (4) si trae

$$(1-x^7)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \frac{1}{1-x^7}\left(\int_x^1 v(\xi)\, d\xi\right)^2 \leq \frac{1}{\sum_{k=0}^{6} x^k} \int_x^1 v^2(\xi)\, d\xi .$$

Da ciò l'asserto.

IV. – *Gli autovalori della* (1) *sono tutti positivi.*

Se λ è un autovalore di (1) ed $u(x)$ una corrispondente autofunzione, si ha:

$$\lambda \int_0^1 x^7 u^2(x)\, dx = -\int_0^1 u\, \mathrm{E}u\, dx = \int_0^1 (1-x^7)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx ,$$

e ciò prova l'asserto.

Dal teorema III segue che l'operatore T è definito positivo.

2. Vogliamo ora dimostrare l'applicabilità del classico metodo di Ritz, per il calcolo degli autovalori, all'operatore differenziale E. A tale scopo dimostriamo anzitutto il seguente teorema:

V. – *Sia* $u(x) \in \mathfrak{A}$ *e non identicamente nulla*; $\{w_n(x)\}$ *una successione ortonormale e completa di autosoluzioni dell'equazione* (2), *appartenenti ad* $\mathfrak{L}^{(2)}$ (I). *Posto* $u_n(x) = x^{-7/2} w_n(x)$ *e* $v(x) = \mathrm{E}u$, *si ha:*

$$\mathfrak{R}(u) \equiv \frac{\int_0^1 (1-x^7)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx}{\int_0^1 x^7 u^2(x)\,dx} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\left[\int_0^1 v(x)\,u_n(x)\,dx\right]^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}\left[\int_0^1 v(x)\,u_n(x)\,dx\right]^2}. \tag{9}$$

Integrando per parti si ha:

$$\int_0^1 (1-x^7)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = -\int_0^1 u(x)\,v(x)\,dx$$

e quindi per la (5):

$$\int_0^1 (1-x^7)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \int_0^1\int_0^1 \mathfrak{G}(x,\xi)\,v(x)\,v(\xi)\,dx\,d\xi. \tag{10}$$

D'altra parte si ha:

$$\int_0^1 x^7 u^2(x)\,dx = \int_0^1 x^7\left(\int_0^1 \mathfrak{G}(x,\xi)\,v(\xi)\,d\xi\right)^2 dx,$$

cioè

$$\int_0^1 x^7 u^2(x)\,dx = \int_0^1\int_0^1 v(\xi)\,v(y)\left(\int_0^1 x^7\,\mathfrak{G}(\xi,x)\,\mathfrak{G}(x,y)\,dx\right)d\xi\,dy. \tag{11}$$

Il nucleo $k(x,\xi)$, positivo e simmetrico, dell'operatore compatto T è somma in $\mathrm{I}\times\mathrm{I}$ della seguente serie (5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} w_n(x)\,w_n(\xi), \qquad (x,\xi)\in \mathrm{I}\times\mathrm{I}.$$

(5) In base al teorema di Mercer (cfr. [12], p. 614) si può, di più, dire che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} w_n(x)\,w_n(\xi)$ converge uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in $\bar{\mathrm{I}}\times\bar{\mathrm{I}}$ privato del punto (1, 1).

Da ciò segue che

$$\mathcal{G}(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} x^{-7/2} w_n(x) \xi^{-7/2} w_n(\xi) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} u_n(x) u_n(\xi),$$

$(x, \xi) \in (a, b) \times (a, b)$, $0 < a < b < 1$ per altro arbitrari. Per la diseguaglianza di Cauchy–Schwarz, si ha

$$\left| v(x) v(\xi) \cdot \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\lambda_n} u_n(x) u_n(\xi) \right| \leq | v(x) v(\xi) | \left[\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\lambda_n} (u_n(x))^2 \cdot \right.$$

$$\left. \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\lambda_n} \left(u_n(\xi) \right)^2 \right]^{1/2} < | v(x) v(\xi) | \cdot [\mathcal{G}(x, x) \cdot \mathcal{G}(\xi, \xi)]^{1/2},$$

e quindi (per il teorema di Lebesgue [7]) la possibilità di calcolare il primo membro della (10) mediante integrazione per serie:

$$\int_0^1 (1 - x^7) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = \int_0^1 \int_0^1 v(x) v(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} u_n(x) u_n(\xi) \, dx \, d\xi =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left[\int_0^1 v(x) u_n(x) \, dx \right]^2.$$

Con analogo procedimento, dalla (11), si ottiene:

$$\int_0^1 x^7 u^2(x) \, dx = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \int_0^1 \int_0^1 v(\xi) v(y) \left(\int_0^1 x^7 u_n(\xi) u_n(x) u_m(x) u_m(y) \, dx \right) d\xi \, dy =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \int_0^1 \int_0^1 v(\xi) u_n(\xi) v(y) u_m(y) \left(\int_0^1 w_n(x) \cdot w_m(x) \, dx \right)^2 d\xi \, dy,$$

e, tenuto conto che il sistema $\{w_n(x)\}$ è ortonormale:

$$\int_0^1 x^7 u^2(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left[\int_0^1 v(x) u_n(x) \, dx \right]^2.$$

Si è così ottenuta l'espressione di $\mathfrak{R}(u)$ indicata nell'enunciato.

Consideriamo lo spazio di Hilbert Σ delle successioni σ di numeri reali $\{\sigma_k\}$ tali che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{\lambda_k} < +\infty,$$

nel quale il prodotto scalare è definito al modo seguente:

$$[\sigma , \tau] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k \tau_k}{\lambda_k} .$$

Possiamo considerare la $\mathfrak{A}$ come una varietà lineare immersa (a meno di un isomorfismo lineare) in Σ, se identifichiamo ogni u di $\mathfrak{A}$ con la successione $\{\sigma_k\}$ data da

$$\sigma_k = \int_0^1 u_k \, \mathrm{E}u \, dx . \tag{12}$$

Consideriamo in Σ il sistema ortonormale di vettori $\{\varphi^n\}$, essendo φ^n la successione di numeri reali $\{\sqrt{\lambda_k}\, \delta_k^n\}$. Sia $\mathfrak{L}\, \sigma$ l'operatore lineare e compatto di Σ in Σ, così definito:

$$\mathfrak{L}\, \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} [\sigma , \varphi^n] \, \varphi^n .$$

La (9) può scriversi al modo seguente:

$$\mathfrak{R}\,(u) = \frac{[\sigma , \sigma]}{[\mathfrak{L}\sigma , \sigma]} ,$$

essendo σ ed u legate dalla (12).

È immediato constatare che gli autovettori di $\mathfrak{L}$ appartengono ad $\mathfrak{A}$ e sono le $\{u_n\}$, laddove gli autovalori dell'equazione

$$\mathfrak{L}\, \sigma - \mu \sigma = 0$$

sono tutti e soli i numeri $1/\lambda_n$.

Dai teoremi III e V e da quanto abbiamo testè detto, segue che:

VI. – *L'equazione* (1) (*relativamente alla classe* $\mathfrak{A}$) *è dotata di una infinità numerabile di autovalori positivi aventi* $+\infty$ *come unico punto d'accumulazione. Indicata con* $\{\lambda_n\}$ *la successione non decrescente degli autovalori e con* $\{u_n\}$ *una successione ortonormale di corrispondenti autosoluzioni, si ha:*

$$\lambda_n = \min \mathfrak{R}\,(u) \quad \text{con } [(u , \mathrm{E}u_h) = 0 \ ; \ h = 1 , \cdots , n-1)].$$

Detto $\{\varphi_k\}$ *un sistema di vettori con* $\{\mathrm{E}\varphi_k\}$ *completo in* $\mathfrak{L}^{(2)}(\mathrm{I})$, *contenuti in* $\mathfrak{A}$ *e* $\Lambda_k^{(n)}$ *le* n *radici dell'equazione*

$$\det. \left(\left(\int_0^1 (1 - x^7) \frac{d\varphi_h}{dx} \cdot \frac{d\varphi_k}{dx} \, dx - \Lambda \int_0^1 x^7 \varphi_h(x)\, \varphi_k(x)\, dx\right)\right) = 0$$

$$(h , k = 1 , 2 , \cdots , n),$$

disposte in ordine non decrescente, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \Lambda_k^{(n)} = \lambda_k \qquad (k = 1 , 2 , \cdots , n),$$

e $\Lambda_k^{(n)}$ *converge a* λ_k *non crescendo.*