Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Bruno Pini

Sulle tracce di un certo spazio funzionale. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.1, p. 61–66.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_1_61_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Analisi matematica. — *Sulle tracce di un certo spazio funzionale.* Nota II di BRUNO PINI presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

La presente Nota costituisce un seguito di una mia precedente dallo stesso titolo (in questi « Rendiconti », S. VIII, vol. XXXVII).

3. TRACCE DI H_P SU RETTE NON CARATTERISTICHE (*Seguito*). – Posto

$$P(iD_x, iD_y) = D_x^{2m} D_y^{2m} + (-1)^n D_x^{2n} + (-1)^n D_y^{2n}$$

e detta $H_P(R^2)$ la classe delle funzioni $u(x, y)$ per cui

$$\| u \|_P = \left(\int_{R^2} [1 + P(s, \sigma)] \, | \tilde{u} |^2 \, ds \, d\sigma \right)^{1/2} < + \infty ,$$

nel n. 2 abbiamo eseguito il cambiamento di variabili $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta \eta$ ($\alpha\delta - \beta\gamma = 1$), nell'ipotesi che $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ siano costanti (reali) non nulle, e abbiamo determinato la classe H^s cui appartiene $D_\eta^j F(\xi, 0)$ se $F \in H_P$. Attualmente completiamo tale studio.

Poniamo $\xi = x$, $\eta = \gamma x + y$, $\gamma \neq 0$ (il caso $\xi = x + \beta y$, $\eta = y$, $\beta \neq 0$, è simmetrico).

Sia $F(\xi, \eta) = \Phi(x, y)$; posto $s + \gamma\sigma = s'$, $\sigma = \sigma'$, si ha

$$\tilde{F}(s, \sigma) = \tilde{\Phi}(s', \sigma') \;, \quad \widetilde{D_x^h D_y^k \Phi} = (-i)^{h+k} (s + \gamma\sigma)^h \sigma^k \tilde{F}(s, \sigma) .$$

Indichiamo ora con ω un numero positivo da precisare nel seguito.

Si ha

$$(1 + |s|)^{2\omega} \left| \int_{R^1} e^{is\xi} D_x^h D_y^k \Phi \Big|_{\eta=0} d\xi \right|^2 = \frac{1}{4\pi^2} (1 + |s|)^{2\omega} \left| \int_{R^1} e^{-i\sigma\eta} \widetilde{D_x^h D_y^k \Phi} \, d\sigma \right|^2_{\eta=0} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} (1 + |s|)^{2\omega} \left| \int_{R^1} (-i)^{h+k} (s + \gamma\sigma)^h \sigma^k \tilde{F} \, d\sigma \right|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{R^1} [1 + P(s + \gamma\sigma, \sigma)] \, | \tilde{F} |^2 \, d\sigma \cdot \int_{R^1} \frac{(1 + |s|)^{2\omega} (s + \gamma\sigma)^{2h} \sigma^{2k}}{1 + P(s + \gamma\sigma, \sigma)} \, d\sigma .$$

Vogliamo determinare ω in modo che l'ultimo integrale sia limitato al variare di s. Non è restrittivo supporre $\gamma = -1$ e supporre $s > 1$.

(*) Nella seduta del 9 gennaio 1965.

Supponendo separatamente $\sigma > 0$ e $\sigma < 0$, si debbono studiare i seguenti integrali

$$(7) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{s^{2\omega}(s+\sigma)^{2h}\sigma^{2k}}{1+(s+\sigma)^{2m}\sigma^{2m}+(s+\sigma)^{2n}+\sigma^{2n}}\,d\sigma\,,$$

$$(8) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{s^{2\omega}(s-\sigma)^{2h}\sigma^{2k}}{1+(s-\sigma)^{2m}\sigma^{2m}+(s-\sigma)^{2n}+\sigma^{2n}}\,d\sigma\,.$$

Supponiamo $h+k \leq 2m-1$ e ricordiamo che $m<n<2m$.

Per valutare (7) poniamo $\sigma = s^{\lambda}$, $-\infty<\lambda<+\infty$; si ha $P(s+s^{\lambda}, s) = O(s^{2m+2m\lambda})$ per $1 \geq \lambda \geq (n-m)/m$, $= O(s^{2n})$ per $\lambda \leq (n-m)/m$, $= O(s^{4m\lambda})$ se $\lambda \geq 1$. Si è così condotti a valutare gli integrali

$$\int_{-\infty}^{(n-m)/m} \frac{s^{2\omega+2h+2k\lambda+\lambda}}{s^{2n}} \lg s\,d\lambda\quad,\quad \int_{(n-m)/m}^{1} \frac{s^{2\omega+2h+2k\lambda+\lambda}}{s^{2m+2m\lambda}} \lg s\,d\lambda\;,$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{s^{2\omega+2h\lambda+2k\lambda+\lambda}}{s^{4m\lambda}} \lg s\,d\lambda\,.$$

Volendo che questi integrali si mantengano limitati per $s \geq 1$, deve essere $\omega \leq n-h-(2k+1)(n-m)/2m$ per $k \leq m-1$, $\omega \leq 2m-h-k-1/2$ per $k \geq m$.

Per valutare (8) osserviamo dapprima che esistono due costanti positive C_1 e C_2 tali che, qualunque siano s e σ, riesce

$$C_1(1+s^{2m}\sigma^{2m}+s^{2n}+\sigma^{2n}) < (1+s^{2m}+\sigma^{2(n-m)})(1+s^{2(n-m)}+\sigma^{2m}) < \\ < C_2(1+s^{2m}\sigma^{2m}+s^{2n}+\sigma^{2n})\,;$$

per esempio si può assumere $C_1 = 1$, $C_2 = 20$. Ciò assicura che la norma $\|F\|_P$ è equivalente alla norma

$$\left(\int_{R^2}(1+s^{2m}+\sigma^{2(n-m)})(1+s^{2(n-m)}+\sigma^{2m})\,|\tilde{F}|^2\,ds\,d\sigma\right)^{1/2}.$$

Allora, in luogo di (8), consideriamo l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{s^{2\omega}(s-\sigma)^{2h}\sigma^{2k}\,d\sigma}{((s-\sigma)^{2(n-m)}+\sigma^{2m})((s-\sigma)^{2m}+\sigma^{2(n-m)})}\,,$$

o anche, posto $\sigma = st$,

$$(9) \qquad \frac{s^{2\omega+2h+2k+1}}{s^{4(n-m)}} \int_0^{+\infty} \frac{(1-t)^{2h}t^{2k}\,dt}{(s^{2(2m-n)}(1-t)^{2m}+t^{2(n-m)})((1-t)^{2(n-m)}+s^{2(2m-n)}t^{2m})}\,.$$

Fissato un ε tale che $0 < \varepsilon < 1/2$, spezziamo l'intervallo $(0, +\infty)$ negli intervalli $(0, \varepsilon)$, $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$, $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $(1+\varepsilon, +\infty)$.

La funzione integranda si può sostituire con $1/s^{4(2m-n)}$ in $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$; con $t^{2(h+k)}/s^{4(2m-n)}\,t^{4m}$ in $(1+\varepsilon, +\infty)$; con $t^{2k}/s^{2(2m-n)}(1+s^{2(2m-n)}\,t^{2m})$ se $k < m$ e con $1/s^{4(2m-n)}$ se $k \geq m$ in $(0, \varepsilon)$; con $(1-t)^{2h}/s^{2(2m-n)}(s^{2(2m-n)} \cdot (1-t)^{2m} + 1)$ se $h < m$ e con $1/s^{4(2m-n)}$ se $h \geq m$ in $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

Volendo allora che (9) sia limitato per $s \geq 1$ occorre che sia

$$\omega \leq 2m - h - k - 1/2 \quad , \quad \omega \leq n - h - (2k+1)(n-m)/2m\,,$$
$$\omega \leq n - k - (2h+1)(n-m)/2m\,.$$

Concludendo:

Se $F \in S$, *se* $h \leq n-1$, $k \leq n-1$, $h+k \leq 2m-1$, *allora* $\| D_x^h D_y^k F(\xi, 0)\|_{H^{\omega}(R^1)} \leq \text{cost.}\, \| F \|_P$ *con* $\omega = \min(2m-h-k-1/2,\; n-h-(2k+1)(n-m)/2m,\; n-k-(2h+1)(n-m)/2m)$.

Osserviamo che, assumendo $h=0$, e quindi $k \leq n-1$ (oppure $k=0$, e quindi $h \leq n-1$), riesce $\omega = n-k-(n-m)/2m$ ($\omega = n-h-(n-m)/2m$); ciò completa il risultato del n. 2.

Pertanto se $F \in H_P(R_\eta^{+2})$, $R_\eta^{+2} = \{(\xi, \eta); \eta \geq 0\}$, hanno traccia su $\eta = 0$ solo le derivate pure d'ordine $\leq n-1$; hanno invece traccia anche derivate d'ordine maggiore purché miste. Tra tutte le derivate $D_x^h D_y^k F$ con $h+k = 2p \leq 2m-2$, quella che ha traccia massima è $D_x^p D_y^p F$ riuscendo $D_x^p D_y^p F(\xi, 0) \in H^{n-p-(2p+1)(n-m)/2m}(R^1)$; tra tutte le derivate $D_x^h D_y^k F$ con $h+k = 2p+1 \leq 2m-1$, quelle che hanno traccia massima sono $D_x^{p+1} D_y^p F$ e $D_x^p D_y^{p+1} F$ riuscendo $D_x^{p+1} D_y^p F(\xi, 0)$, $D_x^p D_y^{p+1} F(\xi, 0) \in H^{n-p-1-(2p+1)(n-m)/2m)}(R^1)$.

4. COSTRUZIONE DI UNA FUNZIONE DI $H_P(R_\eta^{+2})$ CON ASSEGNATE TRACCE SU $\eta = 0$. – L'equazione

$$(10) \qquad (-is+\gamma\lambda)^{2m}\lambda^{2m} + (-1)^n(-is+\gamma\lambda)^{2n} + (-1)^n\lambda^{2n} = 0$$

ha $2m$ radici del tipo $\lambda_j' = \alpha_j |s|^{(n-m)/m} + o(|s|^{(n-m)/m})$ per $|s| \to +\infty$, delle quali m con $\mathcal{R}e\,\alpha_j < 0$ ed m con $\mathcal{R}e\,\alpha_j > 0$, e $2m$ radici del tipo $\lambda_j'' = is/\gamma + \beta_j |s|^{(n-m)/m} + o(|s|^{(n-m)/m})$ per $|s| \to +\infty$, delle quali m con $\mathcal{R}e\,\beta_j < 0$ ed m con $\mathcal{R}e\,\beta_j > 0$. Indichiamo con $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ le radici λ' con $\mathcal{R}e\,\alpha_j < 0$ e con $\lambda_{m+1}, \cdots, \lambda_{2m}$ le radici λ'' con $\mathcal{R}e\,\beta_j < 0$.

Consideriamo il caso che sia $m = n-2$ (il caso di $m = n-1$ si tratta allo stesso modo).

Si può disporre delle $2m$ radici in modo da determinare una soluzione in $\eta > 0$ di $P(iD_x, iD_y)\,u = 0$ soddisfacente $2m$ assegnate condizioni per $\eta = 0$.

Ad esempio assegnamo $\varphi_j(\xi) = D_y^j u|_{\eta=0}$, $0 \leq j \leq 2m-1$. Si ha

$$(11) \qquad u(x, y) = \sum_{j=0}^{2m-1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is\xi}\,\tilde{\varphi}_j(s)\,V_j(s, \eta)\,/\,V(s)\,ds = \sum_{j=0}^{2m-1} u_j(x, y),$$

ove $V(s)$ è il determinante di Vandermonde di $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2m}$ (che ha $(\lambda_1^j, \cdots, \lambda_{2m}^j)$ come riga di posto $j+1$, $j=0, 1, \cdots, 2m-1$) e $V_j(s, \eta)$ è il determinante che si ottiene da $V(s)$ sostituendo la riga di posto j con $(\exp(\lambda, \eta), \cdots, \exp(\lambda_{2m}\eta)$. Si ha

$$\int_{R^1} |\widetilde{D_x^h D_y^k u_j}|^2 d\sigma = 2\pi |\tilde{\varphi}_j(s)|^2 \left| \sum_{r,t=1}^{2m} (-1)^{r+t} \frac{V_{jr}\bar{V}_{jt}(-is+\gamma\lambda_r)^h (is+\gamma\bar{\lambda}_t)^h \lambda_r^k \bar{\lambda}_t^k}{|V|^2 (\lambda_r + \bar{\lambda}_t)} \right| ,$$

essendo $V_{jr}(s)$ il determinante ottenuto da $V(s)$ sopprimendo la riga di posto $j+1$ e la colonna di posto r.

Si ha $V_{jp}/V = O(|s|^{-n+(n-m)/m+\omega_j})$ per $|s| \to +\infty$ con $\omega_j = m + (m-1-j)(n-m)/m$ se $j \leq m-1$ e $p \leq m$, $\omega_j = m-1+(m-j)(n-m)/m$ se $j \leq m-1$ e $p > m$, $\omega_j = 2m-1-j$ se $j > m-1$. Inoltre $(-is+\gamma\lambda_r)^h (is+\gamma\bar{\lambda}_t)^h \lambda_r^k \bar{\lambda}_t^k/(\lambda_r + \bar{\lambda}_t) = O(|s|^{\omega_{hk}})$ per $|s| \to +\infty$, con $\omega_{hk} = 2h + 2k(n-m)/m - (n-m)/m$ se $r \leq m$, $t \leq m$, $\omega_{hk} = h + h(n-m)/m + k + k(n-m)/m - 1$ se $r \leq m$, $t > m$ oppure $r > m$, $t \leq m$ e $\omega_{hk} = 2h(n-m)/m + 2k - (n-m)/m$ se $r > m$, $t > m$.

Volendo che sia $u_j(x, y) \in H_P(R_\eta^{+2})$ *deve essere* $\varphi_j(\xi) \in H^{n-(2j+1)(n-m)/2m}(R^1)$ *per* $j \leq m-1$ *e* $\varphi_j(\xi) \in H^{2m-j-1+(n-m)/2m}(R^1)$ *per* $j > m-1$.

In particolare si ha quindi $u|_{\eta=0} = \varphi_0(\xi) \in H^{n-(n-m)/2m}(R^1)$. Si ha poi

$$D_\xi^p (u)_{\eta=0} = D_x^p u|_{\eta=0} + \binom{p}{1} (-\gamma) D_x^{p-1} D_y u|_{\eta=0} + \cdots + (-\gamma)^p D_y^p u|_{\eta=0};$$

supposto $p \leq n-1$, si ha allora $D_\xi^p (u)_{\eta=0} \in H^{n-p-(n-m)/2m}(R^1)$; $D_y^p u|_{\eta=0} = \varphi_p(\xi) \in H^{n-(2p+1)(n-m)/2m}(R^1)$ oppure $H^{2m-p-1+(n-m)/2m}(R^1)$; è $n-p-(n-m)/2m < n-(2p+1)(n-m)/2m$, $n-p-(n-m)/2m < 2m-p-1+(n-m)/2m$.

D'altra parte, in base al risultato del n. 3, le derivate $D_x^{p-j} D_y^j u$ hanno su $\eta=0$ traccia $\in H^\omega$ con $\omega = \min(2m-p-1/2, n-p+j-(2j+1)\cdot(n-m)/2m, n-j-(2(p-j)+1)(n-m)/2m)$ e quindi $\omega > n-p-(n-m)/2m$ per $0 < j < p$. Concludendo, $D_x^p u|_{\eta=0} \in H^{n-p-(n-m)/2m}(R^1)$ per $0 \leq p \leq n-1$; l'esponente di H è quello stesso indicato dalla proposizione del n. 3.

Si ha poi

$$(\widetilde{D_x^h D_y^k u|_{\eta=0}}) = \sum_{j=0}^{h} \binom{h}{h-j} (-is)^j (\gamma)^{h-j} \tilde{\varphi}_{h+k-j}(s).$$

Si riconosce quindi, in particolare, che $D_x^m D_y^{m-1} u|_{\eta=0} \in H^{(n-m)/2m}(R^1)$ e che $D_x^{m-1} D_y^{m-1} u|_{\eta=0} \in H^{1+(n-m)/2m}(R^1)$; gli esponenti di H sono quelli stessi indicati dalla proposizione del n. 3.

Pertanto, se $m = n-2$, *la funzione* (11) *appartiene ad* $H_P(R_\eta^{+2})$ *ed è tale che* $D_x^j u|_{\eta=0} \in H^{n-j(n-m)/2m}(R^1)$ *per* $0 \leq j \leq n-1$), $D_x^{m-1} D_y^{m-1} u|_{\eta=0} \in H^{1+(n-m)/2m}(R^1)$, $D_x^m D_y^{m-1} u|_{\eta=0} \in H^{(n-m)/2m}(R^1)$ (conformemente alla proposizione del n. 3).

5. APPLICAZIONI. – Sia Ω un aperto limitato di R^2; sia

$$A(x, y; D_x, D_y) = M(x, y; D_x, D_y) + N(x, y; D_x, D_y)$$

con

$$M(x, y; D_x, D_y) = D_x^m D_y^m (a(x, y) D_x^m D_y^m) + (-1)^n D_x^n (b(x, y) D_x^n) + (-1)^n D_y^n (c(x, y) D_y^n),$$

$$N(x, y; D_x, D_y) = \sum_{h,k} D_x^h D_y^k (a_{hk}(x, y) D_x^{h+h'} D_y^{k+k'}), \qquad h', k' = 0, 1,$$

con $a(x, y), b(x, y), c(x, y), a_{hk}(x, y) \in C^\infty(\overline{\Omega}), a(x, y) > 0, b(x, y) > 0$, $c(x, y) > 0$ e $\inf_\Omega \{a(x, y), b(x, y), c(x, y)\} > 0$; per ogni $\varepsilon > 0$ esista poi una costante positiva C_ε tale che

$$\varepsilon P(s, \sigma) + C_\varepsilon > \sum_{h,k} (s^{2h}\sigma^{2k} + s^{2h+2h'}\sigma^{2k+2k'}).$$

Sia $\mathcal{H}_M(\Omega)$ la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma corrispondente alla forma

$$(u, v)_{\mathcal{H}_M(\Omega)} =$$

$$= \int_\Omega (a(x, y) D_x^m D_y^m u \cdot \overline{D_x^m D_y^m v} + b(x, y) D_x^n u \cdot \overline{D_x^n v} + c(x, y) D_y^n u \cdot \overline{D_y^n v}) \, dx \, dy.$$

Allora se $g(x, y) \in L^2(\Omega)$, esiste una ed una sola $u \in \mathcal{H}_M(\Omega)$ soluzione debole di

$$Au + Cu = g,$$

se C è una costante positiva sufficientemente grande.

I risultati del n. 1 assicurano quanto segue. Se appartiene alla frontiera di Ω un segmento parallelo all'asse x $I = \{(x, y); x_1 \le x \le x_2, y = l\}$, se $I' = \{(x, y); x_1' \le x \le x_2', y = l\}$ con $x_1 < x_1', x_2' < x_2$ e se $(x, y + \varepsilon) \in \Omega$ per $(x, y) \in I'$ e $\varepsilon > 0$ oppure $\varepsilon < 0$ e $|\varepsilon|$ sufficientemente piccolo, si ha

$$\| D_y^j u(x, l + \varepsilon) \|_{L^2(x_1', x_2')} \longrightarrow 0, \qquad j = 0, 1, \cdots, n-1,$$

per $\varepsilon \to 0+$ oppure $\varepsilon \to 0-$. Analogo risultato scambiando x con y.

Supponiamo ora che appartenga alla frontiera di Ω un arco $\mathcal{C}$ di curva dotata in ogni punto di tangente non parallela né all'asse né all'asse y; sia $y = f(x)$ la sua equazione; fissato un suo punto (x_0, y_0) (non terminale) e detta $e(\xi)$ una funzione $\in C_0^\infty$, eguale a 1 in un intorno di x_0 e nulla fuori di un intorno di x_0, la trasformazione $\xi = x, \eta = y - [f(\xi) - f(x_0) - (\xi - x_0) f'(x_0)] e(\xi)$ effettua lo spianamento di una porzione $\mathcal{C}_0$ di $\mathcal{C}$ in un segmento di retta non caratteristica.

I risultati dei nn. 2–3 assicurano che, detto $\mathcal{C}_0(\varepsilon)$ un arco parallelo a $\mathcal{C}_0$ e interno a Ω, si ha per $0 \le h \le n-1$, $0 \le k \le n-1$, $h + k \le 2m - 1$,

$$\| D_x^h D_y^k u |_{\mathcal{C}_0(\varepsilon)} \|_{L^2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Passando al problema non omogeneo, i risultati dei numeri 1–4 assicurano che, se Ω è un intervallo, allora è ben posto il problema consistente nell'assegnare $D_y^j u$, $0 \leq j \leq n-1$, sui lati paralleli all'asse x e $D_x^j u$, $0 \leq j \leq n-1$ sui lati paralleli all'asse y (nelle esplicitate classi H^s, a parte i raccordi). Se invece Ω ha per frontiera una curva costituita di segmenti paralleli all'asse x o all'asse y e di archi dotati di tangente in nessun punto parallela all'asse x o all'asse y, si assegnerà sui primi i dati corrispondenti al caso dell'intervallo e sui secondi, supposto ad esempio $m = n - 2$, si assegnerà $D_y^j u$, $0 \leq j \leq n-1$ e anche $D_x^{m-1} D_y^{m-1} u$ e $D_x^m D_y^{m-1} u$ (nelle esplicitate classi H^s, a parte i raccordi).

Si noti la differenza tra questi problemi e quelli ellittici, parabolici e quasi-ellittici.

I risultati si possono estendere al caso di operatori ipoellittici che abbiano la parte principale in comune con operatori del tipo

$$\prod_j \left((-1)^{m_j} (\alpha_j D_x + \beta_j D_y)^{2m_j} + (-1)^{n_j} (\gamma_j D_x + \delta_j D_y)^{2n_j}\right),$$

con $\alpha_j \delta_j - \beta_j \gamma_j = 1$.