Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Adelina Santolini

A proposito di un teorema sugli autoomeomorfismi del piano reale euclideo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.3, p. 358–361.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_3_358_0>

Matematica. — *A proposito di un teorema sugli autoomeomorfismi del piano reale euclideo.* Nota di ADELINA SANTOLINI, presentata [*] dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

In questa Nota [1] mi propongo di precisare un mio recente teorema sulle trasformazioni topologiche del piano reale euclideo su se stesso [2], dimostrando che:

Se la trasformazione topologica t del piano reale euclideo su se stesso ammette come uniti due insiemi di punti U *e* V, *il primo chiuso e connesso* [3] *ed il secondo eventualmente vuoto, e se una delle potenze di t ammette come libera una curva semplice chiusa tale che la regione da essa delimitata* [4] *contenga tutti i punti di* U *e non contenga nell'interno punti di* V, *allora esiste una curva semplice chiusa libera nella t che aggira* U *e lascia all'esterno* V [5].

Di qui segue immediatamente un teorema sugli autoomeomorfismi di una superficie piana S col bordo formato da $p+1$ curve semplici chiuse a due a due disgiunte [6], e precisamente:

Se la trasformazione topologica t di una tal superficie piana S *applica le curve del bordo ciascuna su se stessa e se una delle potenze di t ammette come libera una tal curva semplice chiusa j contenuta in* S *che la regione* J *da essa delimitata contenga almeno una* U *delle curve interne del bordo di* S *allora esiste una curva semplice chiusa che è contenuta nell'interno di* S, *che è libera nella t, che aggira* U *e che lascia all'esterno quelle curve del bordo di* S *che non sono contenute in* J.

La dimostrazione del primo teorema ha molti punti in comune con quella svolta nella mia Nota citata e per evitare ripetizioni inutili rimanderò a quest'ultima, ogni volta che sarà possibile.

(*) Nella seduta del 13 marzo 1965.

(1) Eseguita nell'ambito dell'attività dei Gruppi Matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) A. SANTOLINI, *A proposito delle trasformazioni topologiche del piano reale euclideo su se stesso* [« Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », ser. 8ª, vol. XXXVI, pp. 609–614 (1964)].

(3) E non vuoto, in quanto connesso.

(4) Nel piano la regione delimitata da una curva semplice chiusa è l'insieme costituito dai punti della curva e da quelli che la curva separa dall'infinito.

(5) La curva semplice chiusa c aggira l'insieme E se la regione C delimitata da c contiene nell'interno tutti i punti di E; la curva c lascia invece all'esterno l'insieme E se la regione C non contiene nessun punto di E.

(6) In altre parole, S si ottiene sottraendo da una regione S′, delimitata da una curva semplice chiusa, gli interni di p regioni $S'_1, S'_2, \cdots, S'_p$ a due a due disgiunte, contenute nell'interno di S′ e delimitate da curve semplici chiuse. Il bordo di S′ formerà la curva esterna del bordo di S; i bordi di $S'_1, S'_2, \cdots, S'_p$ formeranno le curve interne del bordo di S.

1. Consideriamo dunque la trasformazione topologica t del piano reale euclideo su se stesso; gli insiemi U e V siano uniti nella t ed U sia chiuso e connesso.

Sia j una curva semplice chiusa tale che la regione J da essa delimitata contenga U e non contenga nell'interno punti di V; e j sia libera nella t^n. Non è restrittivo supporre n positivo e maggiore di 1. Indichiamo con

$$j_r \qquad (r = 0, 1, \cdots, n)$$

la trasformata di j nella t^r $(r = 0, 1, \cdots, n)$, di modo che $j_0 = j$; e con

$$J_r \qquad (r = 0, 1, \cdots, n)$$

la regione delimitata da j_r.

L'insieme J_r è l'immagine di J_0 nella t^r $(r = 1, \cdots, n)$ e perciò, al pari di J_0, contiene U e non contiene nell'interno punti di V.

La $j_0 \cap j_n = \emptyset$ implica la $J_0 \cap J_n = \emptyset$ oppure la $J_n \subset J_0 - j_0$ oppure la $J_0 \subset J_n - j_n$. La prima eventualità va esclusa perché tanto J_0 quanto J_n contengono U, che non è vuoto. E dopo di ciò non è restrittivo supporre

$$J_0 \subset J_n - j_n, \tag{1}$$

perché nel caso contrario basterebbe scambiare gli uffici di t e t^{-1} e quelli di j_0 e j_n: infatti j_n è libera nella $(t^{-1})^n$ e la regione da essa delimitata contiene U e non contiene nell'interno punti di V.

Dalla (1) segue immediatamente che J_0 lascia all'esterno V e che J_n, e quindi anche J_0, contiene U nell'interno; dunque l'insieme J_r $(r = 1, \cdots, n)$, al pari di J_0, lascia all'esterno V e contiene nell'interno U.

Consideriamo un punto A di U. Poiché A è interno a $J_0, J_1, \cdots, J_{n-1}$, l'insieme dei punti che si possono unire ad A mediante curve semplici aperte prive di punti in comune con $j_0, j_1, \cdots, j_{n-1}$ è delimitato da una curva semplice chiusa γ_0 (7).

La curva γ_0 è contenuta ovviamente nell'unione di $j_0, j_1, \cdots, j_{n-1}$:

$$\gamma_0 \subseteq j_0 \cup j_1 \cup \cdots \cup j_{n-1}; \tag{2}$$

la regione Γ_0 delimitata da γ_0 è contenuta nell'intersezione di $J_0, J_1, \cdots, J_{n-1}$:

$$\Gamma_0 \subseteq J_0 \cap J_1 \cap \cdots \cap J_{n-1}, \tag{3}$$

e pertanto non ha punti in comune con V. Dimostriamo ora che Γ_0 contiene nell'interno tutti i punti di U.

Infatti un punto di U non può appartenere a γ_0, perché allora per la (2) apparterrebbe ad almeno una delle curve $j_0, j_1, \cdots, j_{n-1}$; non può nemmeno essere esterno a Γ_0, perché allora l'insiemme connesso U interesserebbe la frontiera γ_0 di Γ_0, cosa già riconosciuta impossibile.

(7) Si veda, per esempio, G. SCORZA DRAGONI, *Qualche teorema sulle curve di Jordan*, [« Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », ser. 6ª, vol. XXIII, pp. 181–186 (1936)], nº 4.

Dalla (1) e dalla (3) segue immediatamente

$$\gamma_0 \cap j_n = \emptyset. \tag{4}$$

La curva γ_1, immagine di γ_0 nella t, soddisfa alla

$$\gamma_1 \subseteq j_1 \cup j_2 \cup \cdots \cup j_n, \tag{5}$$

che è una conseguenza immediata della (2). Inoltre γ_1 è distinta da γ_0: infatti supponiamo per assurdo che γ_1 coincida con γ_0; allora anche l'immagine, γ_r, di γ_0 nella t^r $(r = 2, \cdots, n)$ coincide con γ_0; di qui e dalla (4) segue che $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ non hanno punti in comune con j_n e quindi che γ_1 non ha punti in comune con $j_1, j_2, \cdots, j_n$; donde l'assurdo.

Se γ_0 e γ_1 non hanno punti in comune il teorema è dimostrato. Supponiamo dunque che l'intersezione di γ_0 e γ_1 non sia vuota, indichiamo con Γ_1 la regione delimitata da γ_1, non coincidente con Γ_0, e dimostriamo che:

$$\Gamma_1 \supset \Gamma_0. \tag{6}$$

Infatti se la (6) non fosse verificata, l'insieme Γ_0, distinto da Γ_1, conterrebbe nell'interno almeno un punto P esterno a Γ_1. Allora, poiché Γ_1, al pari di Γ_0, contiene nell'interno tutti i punti di U, ogni curva semplice aperta che unisca P ad un punto, B, di U incontrerebbe γ_1, cioè $j_1 \cup j_2 \cup \cdots \cup j_n$. Inoltre P, essendo interno a Γ_0, potrebbe essere unito a B mediante una curva semplice aperta, c, interna a Γ_0 e pertanto priva di punti in comune con $j_0, j_1, \cdots, j_{n-1}$. D'altra parte $c \cap j_n = \emptyset$ per la (1) e la (3). D'onde l'assurdo.

A questo punto si possono ripetere tutte le considerazioni svolte nel n° 2 del lavoro citato nella nota [2], sostituendo il punto unito U là considerato con l'attuale insieme unito U (così la distanza, là indicata con δ, di quel punto U da quella curva γ_0, dovrà essere sostituita dalla distanza, anche essa positiva, dell'attuale insieme chiuso U dall'attuale curva γ_0). E si concluderebbe con l'esistenza di una curva semplice chiusa γ, libera nella t, aggirante U e conteuta in Γ_0, che non ha punti in comune con V. Donde il risultato.

Se si sviluppassero tutti i ragionamenti si vedrebbe anche che la curva γ si può supporre contenuta nel ρ–intorno piano chiuso di γ_0, il numero reale positivo ρ essendo prefissato a piacere.

2. Sia ora t una trasformazione topologica di quella superficie piana S col bordo formato da $p + 1$ curve semplici chiuse; e t applichi su se stessa ciascuna delle curve del bordo di S. La curva semplice chiusa j sia contenuta in S e sia libera nella t^n $(n > 1)$; la regione J delimitata da j contenga almeno una curva, U, interna del bordo di S.

Indichiamo con U* l'insieme di tutte le curve interne del bordo di S contenute in J, e con V l'insieme di tutte le curve del bordo di S non contenute in J, cioè delle curve del bordo non aventi punti interni a J, dato che j è contenuta in S. Gli insiemi U* e V sono uniti nella t ed esauriscono la totalità delle curve del bordo di S.

Prolunghiamo ora la trasformazione topologica t di S su se stessa, in una trasformazione topologica, che per semplicità indicheremo ancora con t, del piano reale euclideo su se stesso [8].

Indichiamo al solito con j_r l'immagine di j nella t^r $(r = 0, 1, \cdots, n)$, e con J_r la regione delimitata da j_r; e possiamo anche adesso supporre valida la (1).

Poiché J_0 contiene U^* e non contiene nell'interno punti di V dalla (1) possiamo anche adesso dedurre che J_0 contiene nell'interno U^* e lascia all'esterno V, cioè che j_0, e quindi j_r $(r = 1, \cdots, n)$, è contenuta nell'interno di S, dato che U^* e V esauriscono il bordo di S.

La curva γ_0, analoga a quella considerata nel paragrafo precedente, in quanto contenuta nell'unione di $j_0, j_1, \cdots, j_{n-1}$, appartiene anch'essa all'interno di S. Indichiamo con ρ un numero reale positivo minore della distanza, certamente positiva, di γ_0 dal bordo di S.

Poiché la regione J_0 contiene l'insieme U, chiuso e connesso, e non contiene nell'interno punti di V, poiché U e V sono uniti nella t e j_0 è libera nella t^n, esiste, a norma del teorema precedente, una curva γ semplice chiusa, che è libera nella t, che aggira U e lascia all'esterno V e che è contenuta nel ρ–intorno piano chiuso di γ_0. Donde il risultato.

(8) Cfr. B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie*, Springer, Berlino (1923), cap. 2, § 2.